

Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

## ЭЛЛИПС МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ, СОДЕРЖАЩИЙ КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО ТОЧЕК. II

We continue the investigation of the problem of constructing the minimal area ellipse for a given convex polygon (this problem is solved for a rectangle and a trapezoid). For an arbitrary polygon, we prove that, in the case where a boundary of the minimal area ellipse possesses exactly four or five common points with the polygon, this ellipse is the minimal area ellipse for quadrangles and pentagons formed by these common points.

Продовжується дослідження задачі побудови еліпса мінімальної площі (ЕМП) для опуклого багатокутника (ця задача розв'язана для прямокутника та трапеції). Для довільного багатокутника доведено, що у випадку, коли межа ЕМП має з багатокутником рівно 4 або 5 спільних точок, еліпс є ЕМП для чотирикутників та п'ятикутників, що утворюються цими спільними точками.

Настоящая статья является второй частью работы [1], поэтому в ней продолжается нумерация пунктов, теорем, формул и т. д.

**4. Построение эллипса минимальной площади для трапеций.** Как было показано ранее, для построения ЭМП для произвольной трапеции достаточно рассмотреть эту задачу в случае равнобокой трапеции. Пусть  $ABCD$  — равнобокая трапеция из класса  $W(1, \sqrt{n})$ . Пусть трапеция  $ABCD$  вписана в единичный круг с центром в начале координат и ее вершины имеют координаты  $A(-\sqrt{1-b^2}, -b)$ ,  $B(\sqrt{1-b^2}, -b)$ ,  $C(\sqrt{1-b_1^2}, b_1)$ ,  $D(-\sqrt{1-b_1^2}, b_1)$  (рис. 4); при этом параметры  $b$  и  $b_1$  удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_1 \geq \frac{1}{2b}. \quad (17)$$

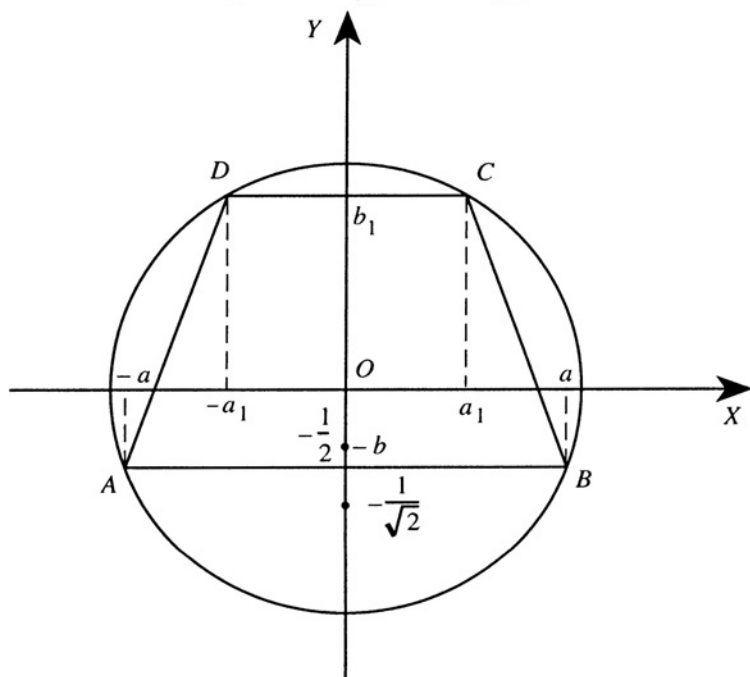


Рис. 4

В силу соображений симметрии ЭМП для трапеции  $ABCD$  задается уравнением

$$\left(\frac{x}{U}\right)^2 + \left(\frac{y-t}{V}\right)^2 = 1, \quad t < \frac{b_1-b}{2}. \quad (18)$$

Введем следующие обозначения:

$$a = \sqrt{1-b^2}, \quad a_1 = \sqrt{1-b_1^2}, \quad \alpha = \frac{1}{U^2}, \quad \beta = \frac{1}{V^2}.$$

Поскольку эллипс (18) проходит через точки  $B$  и  $C$ , то

$$\begin{cases} a^2\alpha + (b+t)^2\beta = 1, \\ a_1^2\alpha + (b_1-t)^2\beta = 1. \end{cases}$$

Положим

$$\Delta(t) = a^2(b_1-t)^2 - a_1(b+t)^2 = (b_1+b)(b_1-b-2t+2bb_1t+t^2(b_1-b)) = (b_1+b)\Delta_1(t) \geq 0$$

(при условии (18)), где

$$\Delta_1(t) = b_1-b-2t+2bb_1t+t^2(b_1-b) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$\beta = \frac{b_1-b}{\Delta_1(t)}, \quad \alpha = \frac{b_1-b-2t}{\Delta_1(t)}.$$

Задача нахождения ЭМП равносильна минимизации функции  $f(t) = \frac{\Delta_1^2(t)}{b_1-b-2t}$ .

Используя аппарат математического анализа, находим искомое значение параметра  $t$ , при котором площадь эллипса (18) будет минимальна. Обозначая это значение через  $t_1$ , получаем

$$t_1 = f(t) = \frac{b_1^2 + b^2 + 1 - 3bb_1 - \sqrt{b_1^4 + b^4 + 1 - b^2b_1^2 - b_1^2 - b^2}}{3(b_1 - b)}.$$

Заметим, что при  $bb_1 = 1/2$  величина  $t_1 = 0$ , при этом  $\alpha = \beta = 1$  и ЭМП превращается в единичный круг. Если  $bb_1 > 1/2$ , то  $f'(0) > 0$ , следовательно, функция  $f$  в окрестности нуля возрастает, а это означает, что существует такое  $\delta_0 > 0$ , что для каждого  $\delta \in (0, \delta_0)$  эллипс

$$\left(\frac{x}{U}\right)^2 + \left(\frac{y+\delta}{V}\right)^2 \leq 1$$

имеет площадь меньше, чем площадь единичного круга.

В случае произвольной трапеции  $ABCD$  задача построения для нее ЭМП может быть решена с помощью аналогичных рассуждений, однако для наших дальнейших исследований достаточно рассмотренного варианта.

**5. ЭМП для произвольного многоугольника в случае, когда ровно четыре его вершины лежат на границе ЭМП.**

**Теорема 4.** ЭМП для выпуклого многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$ , граница которого имеет с многоугольником ровно четыре общие точки, является ЭМП для четырехугольника, порожденного этими точками.

**Доказательство** проведем методом от противного. Предположим, что для многоугольника  $M$  ЭМП является эллипсом  $e_1$ , на границе которого лежат ровно четыре вершины многоугольника  $M$ ; обозначим их через  $A', B', C', D'$ . Проведем аффинное преобразование, переводящее эллипс  $e_1$  в единичный круг  $K$ , при этом четырехугольник  $A'B'C'D'$  переходит в четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $AB$  — его наибольшая сторона, тогда ее длина  $AB \geq \sqrt{2}$ . Если

предположить, что сторона  $AB = \sqrt{2}$ , то круг  $K$  является ЭМП для квадрата  $ABCD$  [2], что противоречит нашему предположению.

Расположим отрезок  $AB$  параллельно оси  $OX$  в нижней полуплоскости ( $y \leq 0$ ). Если при этом четырехугольник  $ABCD$  будет расположен ниже отрезка  $AB$ , то легко построить эллипс  $e$  так, чтобы  $K$  не был ЭМП для многоугольника  $M$  (аналогично случаю тупоугольного треугольника при доказательстве теоремы 3).

Положим  $A(-\sqrt{1-b^2}, -b)$ ,  $B(\sqrt{1-b^2}, -b)$ . Рассмотрим отрезки  $AD$  и  $BC$ . Без ограничения общности можно считать, что ордината точки  $D$  не превышает ординату точки  $C$ ; пусть при этом точка  $C$  имеет координаты  $(\sqrt{1-b_1^2}, b_1)$ . Рассмотрим семейство  $e_\delta$  эллипсов (16), проходящих через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  при малых положительных значениях параметра  $\delta$ . В случае  $2bb_1 < 1$  рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.

Рассмотрим теперь случай, когда  $2bb_1 \geq 1$ ; при этом

$$\frac{1}{2} < b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_1 > \frac{1}{2b}. \quad (19)$$

Используя результаты, изложенные в п. 1, легко найти координаты четвертой точки пересечения ЭМП  $e$  для треугольника  $ABC$  и единичной окружности  $\Gamma(K)$ :

$$y^* = \frac{4b^4c + 4b^3 - 3b^2c - 4b + 2bc^2 + c^3}{4b^4 + 4b^3c + 4b^2c^2 - 7b^2 - 2bc - 3c^2 + 4},$$

$$x^* = \sqrt{1 - (y^*)^2}.$$

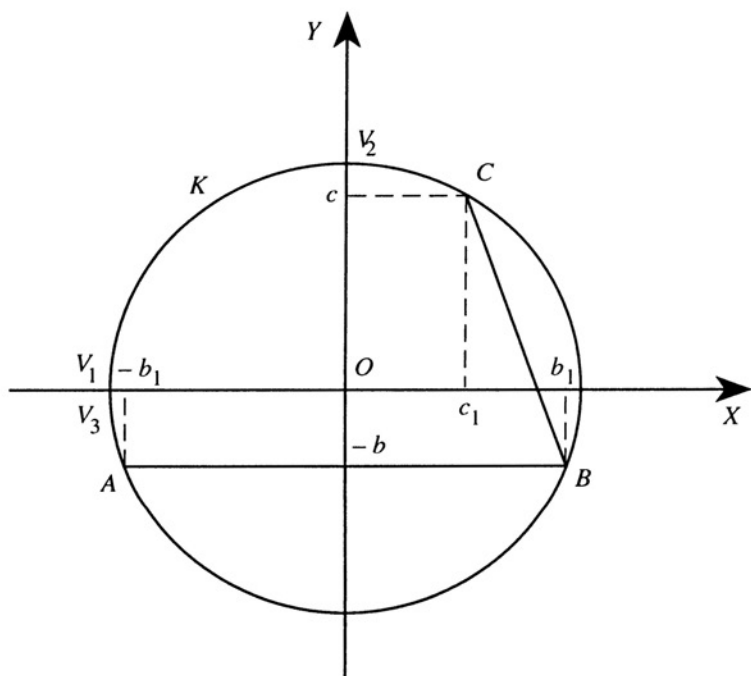


Рис. 5

Полученное выражение для координат четвертой точки пересечения  $e$  и

$\Gamma(K)$  не позволяет определить расположение этой точки на окружности  $\Gamma(K)$ , а потому и эллипса  $e$ , даже используя ограничения (19). Для решения последней проблемы определим расположение некоторых интересных нас точек на единичной окружности  $\Gamma(K)$  относительно эллипса  $e$ .

Точки  $V_1(-1, 0)$ ,  $V_2(0, 1)$  и  $V_3(-x_0, -y_0)$ , где  $y_0 \rightarrow b - 0$ , не принадлежат эллипсу  $e$ , так что меньшая дуга эллипса  $e$ , соединяющая точки  $A$  и  $C$ , лежит внутри круга  $K$  (рис. 5). Из изложенного выше и решения задачи 2 видим, что ЭМП для четырехугольника  $ABCD$  проходит через все четыре его вершины.

Обозначим точку пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  через  $Q$ . Пусть  $AQ:QC = 1:k^2$ ,  $BQ:QD = n^2:1$ , причем, как и в п. 2,  $k \leq 1$ ,  $n \leq 1$ . Выполним преобразование гомотетии, переводящее ЭМП  $e$  четырехугольника  $ABCD$  в круг, и перемещение системы координат так, чтобы центр новой системы координат был расположен в точке пересечения диагоналей четырехугольника  $A'B'C'D'$  (образ четырехугольника  $ABCD$ ), а ось  $OX$  содержала диагональ  $A'C'$ . Выберем направление осей координат и единицы измерения таким образом, чтобы получилось расположение преобразованных фигур, аналогичное изображенному на рис. 2. Для краткости обозначим преобразованные фигуры теми же символами, не используя знак штрих. Из формул (10), (11) п. 2 видно, что центр  $O_\phi$  круга  $K$  и его радиус  $R_\phi$  являются непрерывными функциями параметра  $\phi$ , и величина отношения площади круга  $K$  к площади четырехугольника  $ABCD \in W(k, n)$  представляет функцию  $\phi$ , которая вначале убывает до некоторого значения  $\phi_0$ , а затем возрастает на промежутке  $(\phi_0, \pi)$ . При  $\phi = \phi_0$  ЭМП для четырехугольника  $ABCD$  превращается в круг  $K$ .

Рассмотрим достаточно малое изменение угла  $\phi$  на величину  $\Delta\phi > 0$ ; положим  $\phi_1 = \phi + \Delta\phi$ . При таком изменении угла уменьшается отношение площади четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1 \in W(k, n)$  с углом  $\phi_1$  между диагоналями и площади круга  $K$ .

Построим трехмерную декартову систему координат  $OXYZ$ , в плоскости  $XOY$  которой расположим четырехугольник  $AB_\phi CD_\phi$  из класса  $W(k, n)$  с углом  $\phi$  между диагоналями, а в плоскости  $ZOX$  — четырехугольник  $AB_{\phi_1} C_{\phi_1} D_{\phi_1}$  из того же класса с углом  $\phi_1 = \phi + \Delta\phi$  между диагоналями (рис. 6). В этой системе координат вершины указанных четырехугольников имеют следующие координаты

$$A_1(1, 0, 0), \quad B_\phi(-kn \cos \phi, -kn \sin \phi, 0), \quad D_\phi\left(\frac{k}{n} \cos \phi, \frac{k}{n} \sin \phi, 0\right), \\ C(-k^2, 0, 0), \quad B_{\phi_1}(-kn \cos \phi_1, 0, -kn \sin \phi_1), \quad D_{\phi_1}\left(\frac{k}{n} \cos \phi_1, 0, \frac{k}{n} \sin \phi_1\right).$$

Как и в п. 1, проведем преобразование проектирования плоскости  $XOY$  на  $ZOX$  в направлении прямой  $B_\phi B_{\phi_1}$ , которая параллельна прямой  $D_\phi D_{\phi_1}$ ; при этом вектор проектирования

$$\overrightarrow{B_\phi B_{\phi_1}} = (-kn(\cos \phi - \cos \phi_1), -kn \sin \phi, kn \sin \phi_1) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Заметим, что при  $\Delta\phi \rightarrow 0$  ( $\phi_1 \rightarrow \phi$ ) имеем  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta/\gamma \rightarrow -1$ .

Уравнения окружностей  $\Gamma(K_\phi)$  в плоскости  $XOY$  и  $\Gamma(K_{\phi_1})$  в плоскости  $ZOX$ , описанных вокруг четырехугольников  $AB_\phi CD_\phi$  и  $AB_{\phi_1} C_{\phi_1} D_{\phi_1}$ , соответственно имеют вид

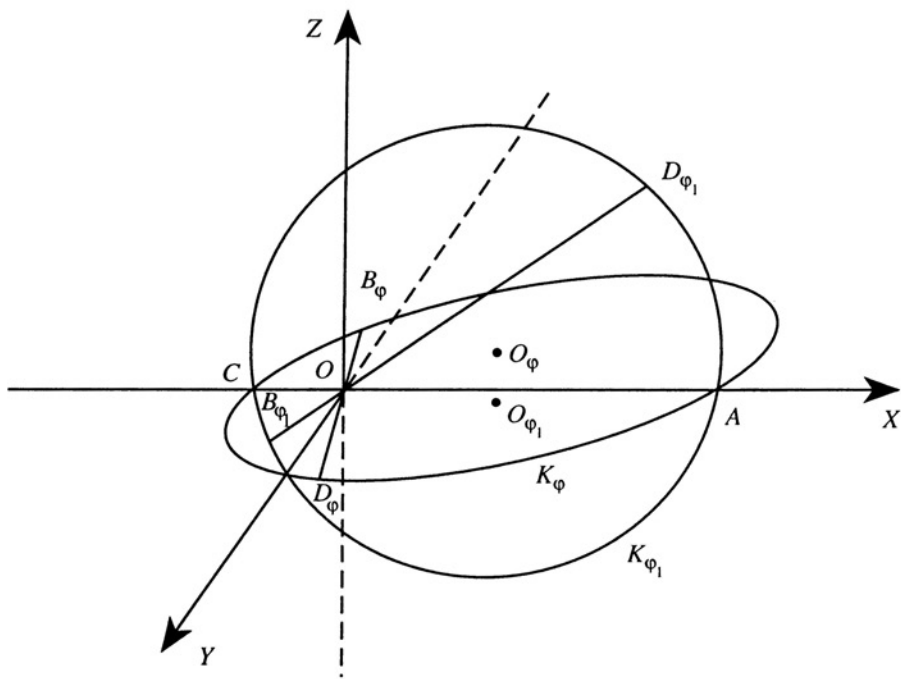


Рис. 6

$$(x - x_\varphi)^2 + (y - y_\varphi)^2 = R_\varphi^2, \quad (20)$$

$$(x - x_{\varphi_1})^2 + (z - z_{\varphi_1})^2 = R_{\varphi_1}^2.$$

Тогда уравнение эллипса, в который переходит окружность  $\Gamma(K_\varphi)$  при указанном проектировании, таково:

$$\begin{aligned} & (x_0 - x_{\varphi_1})^2 + (z_0 - z_{\varphi_1})^2 + 2x_0(x_{\varphi_1} - x_\varphi) + (x_\varphi^2 - x_{\varphi_1}^2) + \\ & + z_0^2 \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) + (y_\varphi^2 - z_{\varphi_1}^2) - \frac{2x_0 z_0}{\gamma} \alpha + \frac{2x_\varphi z_0 \alpha}{\gamma} + \\ & + \frac{z_0^2 \alpha^2}{\gamma^2} + 2z_0 \left( z_{\varphi_1} + \frac{\beta}{\gamma} y_\varphi \right) = R_{\varphi_1}^2 + (R_\varphi^2 - R_{\varphi_1}^2). \end{aligned}$$

При  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  последнее уравнение можно представить в виде

$$(x_0 - x_{\varphi_1})^2 + (z_0 - z_{\varphi_1})^2 + o(1) = R_{\varphi_1}^2.$$

Сравнивая его с уравнением окружности  $\Gamma(K_{\varphi_1})$  из (20), нетрудно заметить, что при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  расстояние Хаусдорфа между кругом  $K_{\varphi_1}$  и эллипсом  $e_{\Delta\varphi}$  (образом окружности  $\Gamma(K_\varphi)$ ) стремится к нулю. Таким образом, при достаточно малом  $\Delta\varphi$  эллипс  $e_{\Delta\varphi}$  содержит все вершины  $AB_\varphi CD_\varphi$ , а значит, и все вершины многоугольника  $M$ , а отношение площадей  $S(e_{\Delta\varphi})/S(AB_\varphi CD_\varphi)$  будет меньше, чем  $S(K_\varphi)/S(AB_\varphi CD_\varphi)$ , а это противоречит тому, что  $K$  есть

ЭМП для многоугольника  $M$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**6. ЭМП, содержащий произвольный выпуклый многоугольник.** Для описания алгоритма построения ЭМП для произвольного выпуклого многоугольника необходимо решить несколько вспомогательных задач.

**Задача 4.** Построить ЭМП для произвольного прямоугольника.

Из соображений симметрии легко получить условие того, что искомым будет эллипс с центром, совпадающим с центром заданного прямоугольника, осями, параллельными его сторонам, и полуосями, равными  $\sqrt{2}p$  и  $\sqrt{2}q$ , где  $2p$  и  $2q$  — стороны прямоугольника.

**Замечание 1.** Если граница ЭМП  $e$  для выпуклого многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$  проходит ровно через четыре вершины  $M$ , то (в отличие от аналогичного случая для трех вершин; см. лемму 2) этот четырехугольник не обязательно имеет наибольшую площадь среди всех четырехугольников вида  $A_iA_jA_kA_l$ , где  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ .

Для доказательства этого утверждения достаточно привести соответствующий контрпример. Рассмотрим восьмиугольник  $AMNBTDLEL$ , вписанный в единичную окружность, вершины которого имеют следующие координаты:

$$A\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \quad B\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \quad E\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right), \quad D\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right), \\ N\left(\frac{7}{10}, -\frac{\sqrt{51}}{10}\right), \quad T\left(\frac{7}{10}, \frac{\sqrt{51}}{10}\right), \quad L\left(-\frac{7}{10}, \frac{\sqrt{51}}{10}\right), \quad M\left(-\frac{7}{10}, -\frac{\sqrt{51}}{10}\right).$$

Легко понять, что эллипсом этого восьмиугольника будет единичный круг, который является ЭМП для трапеции  $AEDB$ , а из всех четырехугольников максимальную площадь имеет прямоугольник  $MNTL$ , а его ЭМП имеет площадь, меньшую единицы.

Далее сформулируем несколько утверждений, доказательство которых легко проводится методом от противного.

**Теорема 5.** ЭМП для произвольного выпуклого многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$  единствен.

**Лемма 3.** Если ЭМП для многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$  имеет на своей границе ровно четыре вершины  $M$ , то ни один из ЭМП, построенный для всех других четырехугольников  $A_iA_jA_kA_l$ , где  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ , не содержит полностью многоугольник  $M$ .

**Лемма 4.** Если ЭМП для многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$  имеет на своей границе ровно пять вершин  $M$ , то ни один из ЭМП, построенных для всех других пятиугольников  $A_iA_jA_kA_lA_m$ , где  $1 \leq i < j < k < l < m \leq n$ , не содержит полностью многоугольник  $M$ .

Перейдем теперь к описанию алгоритма построения ЭМП для произвольного выпуклого многоугольника  $M = A_1A_2 \dots A_n$ . Этот алгоритм состоит из трех шагов.

1. Рассмотрим все треугольники вида  $A_iA_jA_k$  где  $1 \leq i < j < k \leq n$ , образованные вершинами многоугольника  $M$ , и среди них выберем треугольник  $A_iA_jA_k$  наибольшей площади. Для этого треугольника построим ЭМП  $e_{ijk}$  если выполняется включение  $M \subset e_{ijk}$ , то  $e_{ijk}$  — искомый ЭМП для всего многоугольника  $M$ , и алгоритм построения ЭМП заканчивается на этом; если же  $M \not\subset e_{ijk}$ , то переходим к шагу 2.

2. Рассмотрим все возможные четырехугольники вида  $A_iA_jA_kA_l$ ,  $1 \leq i < j <$

$< k < l \leq n$ , образованные вершинами многоугольника  $M$ . В силу замечания 1 необходимо для каждого из таких четырехугольников (число которых  $C_n^4$ ) построить ЭМП  $e_{ijkl}$  и проверить условие  $M \subset e_{ijkl}$ . Если это условие выполняется хотя бы для одного из четырехугольников  $A_i A_j A_k A_l$ , то ЭМП  $e_{ijkl}$  для  $A_i A_j A_k A_l$  будет ЭМП для всего  $M$ , и на этом алгоритм построения ЭМП заканчивается (что непосредственно следует из леммы 3). Если же включение  $M \subset e_{ijkl}$  никогда не выполняется, то следует перейти к шагу 3.

3. Рассмотрим все возможные пятиугольники  $A_i A_j A_k A_l A_m$ ,  $1 \leq i < j < k < l < m \leq n$ , образованные вершинами многоугольника  $M$ , и для каждого из них построим соответствующий ЭМП  $e_{ijklm}$ . Среди всех таких ЭМП, в силу леммы 4, существует единственный ЭМП  $e$ , который содержит многоугольник  $M$ . Этот ЭМП и будет искомым, и третий шаг алгоритма завершен.

**Замечание 2.** Алгоритм построения ЭМП для произвольных пятиугольников проводится так же, как и для произвольного выпуклого многоугольника на первом и втором шагах, однако третий шаг алгоритма существенно упрощается, поскольку существует единственный эллипс, проходящий через все вершины этого пятиугольника, который и будет искомым ЭМП.

**7. Необходимое и достаточное условие прохождения ЭМП для четырехугольника ровно через три его вершины.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу, которая может существенно упростить алгоритм построения ЭМП для произвольного четырехугольника.

**Задача 5.** Для произвольного выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , диагонали которого в точке пересечения делятся в отношении  $1:k$  и  $1:m$  в зависимости от  $k$  и  $m$ , сформулируем критерий, позволяющий определить число вершин этого четырехугольника, которые лежат на границе его ЭМП.

Из результатов п. 3 вытекает, что для решения этой задачи для произвольного выпуклого четырехугольника  $A_1 B_1 C_1 D_1$  необходимо выбрать из четырех треугольников  $A_1 B_1 C_1$ ,  $A_1 C_1 D_1$ ,  $A_1 B_1 D_1$ ,  $B_1 C_1 D_1$  треугольник наибольшей площади и построить для него ЭМП. Предположим для определенности, что наибольшую площадь имеет треугольник  $A_1 B_1 C_1$ . Используя аффинное отображение, преобразуем треугольник  $A_1 B_1 C_1$  в правильный треугольник  $ABC$  (при этом четырехугольник  $A_1 B_1 C_1 D_1$  переходит в четырехугольник  $ABCD$ ), для которого ЭМП является описанным кругом. Используя свойства аффинного преобразования, переведем этот круг в единичный круг  $K$  в декартовой системе координат  $XOY$  с центром в начале координат так, чтобы вершина  $B$  имела координаты  $(0, -1)$  (рис. 7). При этом точки  $A$  и  $C$  будут иметь координаты  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Для того чтобы единичный круг  $K$  являлся ЭМП для выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , необходимо и достаточно, чтобы четвертая вершина  $D$  была расположена внутри круга  $K$ . Легко видеть, что вершина  $D$  будет находиться внутри круга  $K$  тогда и только тогда, когда она принадлежит круговому сегменту  $AFCG$ .

Теперь несложно получить этот критерий аналитически:

$$\forall m \geq 1 \quad m + 1 + \frac{1}{m} < k, \quad \text{если } k \geq m, \quad (21)$$

$$\forall k \geq 1 \quad k + 1 + \frac{1}{k} < m, \quad \text{если } m \geq k.$$

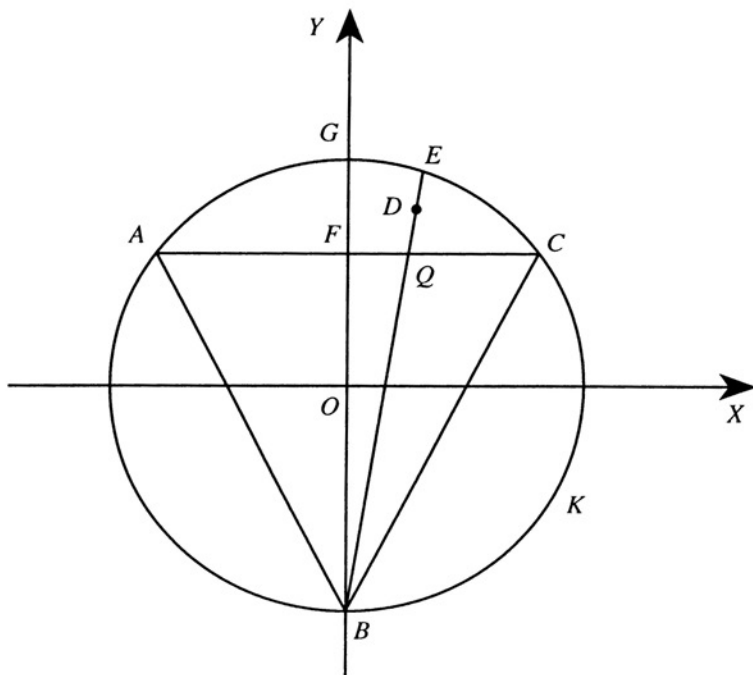


Рис. 7

**8. Заключение.** Подводя итог проведенным исследованиям, следует отметить, что в этой работе мы не затрагивали проблемы эффективности рассмотренного алгоритма построения ЭМП, количество ресурсов, необходимых для его реализации (машинное время, память и т.п.). Кроме того, мы не исследовали задачи, возникающие в ходе реализации рассмотренного алгоритма, например по заданным вершинам выпуклого многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_n$  найти треугольник вида  $A_i A_j A_k$ ,  $1 \leq i < j < k \leq n$ , наибольшей площади, поскольку исследование всех этих проблем значительно увеличивает содержание работы и в идейном плане не совпадает с ее методологической направленностью. Мы хотели лишь доказать с чисто геометрической точки зрения возможность построения ЭМП для выпуклого многоугольника за конечное число шагов. А возникающие при этом смежные проблемы будут изучены авторами в дальнейшем.

1. Рублев Б. В., Петушиц Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. I // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 7. – С. 980–988.
2. Бляшке В. Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.

Получено 04.11.96