УДК 517. 9: 519.46:535.21

Р. М. Черніга (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НОВІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИФУЗІЙНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ОПИСУЄ РІСТ КРИСТАЛІВ ПРОТЕЇНУ*

By using the method of additional generating conditions, we construct multiparameter families of exact solutions of a nonlinear diffusion system which describes the growth of protein crystals. We demonstrate the efficiency of the application of the solutions obtained to the solution of the corresponding nonlinear boundary value problem with a moving interface.

За допомогою методу додаткових породжуючих умов побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійної дифузійної системи, що описує процес росту кристалів протеїну. Продемонстрована ефективність застосування одержаних розв'язків для розв'язування відповідної нелінійної задачі з рухомою границею.

1. Вступ. В роботах [1, 2] досліджувалась нелінійна математична модель для опису процесу росту кристалів протеїну. Базові рівняння моделі мають вигляд

$$U_t = \left(D_1(U, V)U_x\right)_x + \mu(t)U_x,$$
$$V_t = \left(D_2(U, V)V_x\right)_x + \mu(t)V_x, \tag{1}$$

де $U = U(t, x)$ — концентрація протеїну, $V = V(t, x)$ — концентрація „осаджувача" (the precipitant), $\mu(t)$ — швидкість межі розділу, а індекси t і x означають диференціювання за цими змінними. До системи рівнянь (1) додаються певні початкові та крайові умови [2] для однозначного визначення трьох невідомих функцій U, V, μ. Оскільки коефіцієнти дифузії D_1 та D_2 залежні явно від концентрацій U і V, ми маємо саме нелінійну задачу типу Стефана.

Загальновідомо, що побудова точного розв'язку нелінійної задачі з рухомими границями (ЗРГ) є дуже складною задачею. В роботі [2] наведено розв'язок задачі росту кристалів протеїну лише у випадку лінійної системи (1) (детально підходи до розв'язання лінійних ЗРГ описано в [3 – 5]). Деякі нелінійні ЗРГ для рівнянь дифузії (теплопровідності) були точно розв'язані [6 – 8].

Для побудови багатопараметричних сімей точних розв'язків системи (1) застосуємо підхід, що грунтується на розгляді заданого нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними (нижче ДРЧП) разом з *додатковою породжуючою умовою* у вигляді звичайного диференціального рівняння (ЗДР) високого порядку [9 – 11]. Зазначимо, що ідею такого підходу можна знайти в роботі [12], в якій за допомогою додаткових умов у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, породжених операторами Галілея, знайдено фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. В роботах [9 – 11, 13] цей підхід було успішно застосовано для побудови сімей точних розв'язків деяких нелінійних ДРЧП та систем ДРЧП, що описують реальні процеси у фізиці, біології та хімії.

В даній роботі (п. 2) запропоновано узагальнення згаданого підходу на випадок систем з коефіцієнтами, що залежать від часу t.

В п.3 побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків системи рівнянь (1) у випадку довільної функції μ та коефіцієнтів дифузії вигляду

$$D_1(U, V) = \lambda_0^1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V, \qquad D_2(U, V) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 U + \lambda_2^2 V, \tag{2}$$

де λ_i^k — довільні сталі або гладкі функції від t. Скрізь нижче припускається $\lambda_1^2 \lambda_2^1 \neq 0$, тобто система рівнянь (1), (2) не розпадається на два автономні рів-

* Виконана при частковій фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій (проект 1.4/356).

няння. Зазначимо, що у випадку лінійної залежності функцій U і V та рівності коефіцієнтів дифузії при сталих λ_i^k, тобто

$$V = \gamma U, \quad D_1(U, \gamma U) = D_2(U, \gamma U), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

ця система зводиться до скалярного рівняння теплопровідності. Справді, неважко переконатись, що локальна підстановка

$$y = x + \int \mu(t)\,dt, \quad W = \lambda_0^1 + \left(\lambda_1^1 + \gamma\lambda_2^1\right)U, \quad \lambda_1^1 + \gamma\lambda_2^1 \neq 0,$$

зводить систему рівнянь (1), (2) при умові (3) до нелінійного рівняння теплопровідності

$$W_t = (WW_y)_y,$$

де індекси t і y означають диференціювання за цими змінними. Побудові точних розв'язків рівнянь теплопровідності зі степеневою нелінійністю присвячено багато робіт (див., наприклад, [14 – 16]). Врешті-решт, у випадку $\lambda_1^1 + \gamma\lambda_2^1 = 0$ система рівнянь (1), (2) при умові (3) зводиться до лінійного рівняння теплопровідності. Нижче ці специфічні випадки не розглядаються, оскільки проблема побудови точних розв'язків зводиться до розв'язування добре вивчених рівнянь.

В останньому пункті продемонстровано застосування одержаних в п. 3 розв'язків до точного розв'язання деяких нелінійних ЗРГ для системи рівнянь дифузії (1), (2).

2. Конструктивний метод для побудови точних розв'язків нелінійної дифузійної системи (1), (2). Розглянемо додаткову умову до системи (1), (2) у формі лінійної незачепленої системи ЗДР, а саме:

$$\begin{gathered}\alpha_0(t,x)U + \alpha_1(t,x)\frac{dU}{dx} + \ldots + \alpha_m(t,x)\frac{d^m U}{dx^m} = 0,\\ \beta_0(t,x)V + \beta_1(t,x)\frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_n(t,x)\frac{d^n V}{dx^n} = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

де $\alpha_0(t,x), \ldots, \alpha_m(t,x)$, $\beta_0(t,x), \ldots, \beta_n(t,x)$ — довільні гладкі функції, які вважаються відомими, а змінна t розглядається як деякий параметр. Цю систему рівнянь в подальшому називатимемо *породжуючою*, оскільки з її допомогою одержуватимемо анзаци для побудови точних розв'язків системи (1), (2). Як відомо, загальний розв'язок системи (6) має вигляд

$$\begin{gathered}U = \varphi_0(t)g_0(t,x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x),\\ V = \psi_0(t)h_0(t,x) + \ldots + \psi_{n-1}(t)h_{n-1}(t,x),\end{gathered} \tag{5}$$

де $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{m-1}(t)$ та $\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_{n-1}(t)$ — довільні гладкі функції, $g_0(t,x), \ldots, g_{m-1}(t,x)$ та $h_0(t,x), \ldots, h_{n-1}(t,x)$ — фіксовані функції, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівнянь (4).

Зауважимо, що у багатьох випадках функції g_i, $i = 0, \ldots, m-1$ та h_j, $j = 0, \ldots, n-1$, вдається виразити у явному вигляді через елементарні функції.

Тепер подивимось на (7) як на анзац для заданої нелінійної системи рівнянь (1), (2). Особливість цього анзацу полягає в тому, що він містить $m + n$ довільних функцій φ_i та ψ_i. Це дає можливість у деяких випадках редукувати систему рівнянь (1), (2) до квазілінійної системи ЗДР першого порядку для невідомих функцій φ_i та ψ_i, яка містить лише рівняння першого порядку. Добре відомо, що такі системи досить детально досліджені.

Обчислюючи за анзацом (5) похідні U_t, U_x, U_{xx}, V_t, V_x, V_{xx} та підставляючи їх в систему рівнянь (1), (2), одержуємо на перший погляд надто громіздкий вираз. Проте якщо в ньому згрупувати відповідним чином доданки, то вдається помітити достатні умови для редукції одержаного виразу до системи ЗДР. Ці достатні умови мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\lambda_0^1 g_{i,xx} + \mu g_{i,x} - g_{i,t} &= g_{i_1} Q^1_{ii_1}(t),\\
\lambda_0^2 h_{j,xx} + \mu h_{j,x} - h_{j,t} &= h_{j_1} Q^2_{jj_1}(t),\\
\lambda_1^1 g_i g_{i,xx} + \lambda_1^1 (g_{i,x})^2 &= g_{i_1} R^1_{ii_1}(t),\\
\lambda_2^2 h_j h_{j,xx} + \lambda_2^2 (h_{j,x})^2 &= h_{j_1} R^2_{jj_1}(t),\\
\lambda_1^1 (g_i g_{i_1,xx} + g_{i_1} g_{i,xx}) + 2\lambda_1^1 g_{i,x} g_{i_1,x} &= g_{i_2} T^{i_2,1}_{ii_1}(t), \qquad i < i_1,\\
\lambda_2^2 (h_j h_{j_1,xx} + h_{j_1} h_{j,xx}) + 2\lambda_2^2 h_{j,x} h_{j_1,x} &= h_{j_2} T^{j_2,2}_{jj_1}(t), \qquad j < j_1,\\
\lambda_2^1 h_j g_{i,xx} + \lambda_2^1 g_{i,x} h_{j,x} &= g_{i_1} S^{i_1,1}_{ij}(t),\\
\lambda_1^2 h_j g_{i,xx} + \lambda_1^2 g_{i,x} h_{j,x} &= h_{j_1} S^{j_1,2}_{ij}(t),
\end{aligned} \tag{6}$$

де функції $R^k_{ii_1}$, $Q^k_{ii_1}$, $T^{j,k}_{ii_1}$ і $S^{i_1,k}_{ij}$ в правій частині — це деякі функції, що мають бути визначені через вирази у лівій частині. При виконанні умов (6) для знаходження невідомих функцій φ_i^1 та φ_j^2 одержуємо таку систему $(m+n)$ ЗДР:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_i}{dt} &= Q^1_{i_1 i}\varphi_{i_1} + R^1_{i_1 i}(\varphi_{i_1})^2 + T^{i,1}_{i_1 i_2}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2} + S^{i,1}_{i_1 j_1}\varphi_{i_1}\psi_{j_1},\\
\frac{d\psi_j}{dt} &= Q^2_{j_1 j}\psi_{j_1} + R^2_{j_1 j}(\psi_{j_1})^2 + T^{j,2}_{j_1 j_2}\psi_{j_1}\psi_{j_2} + S^{j,2}_{i_1 j_1}\varphi_{i_1}\psi_{j_1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

У правих частинах співвідношень (6), (7) за індексами i_1, i_2 та j_1, j_2, що повторюються, слід підсумовувати відповідно від 0 до $m-1$ та від 0 до $n-1$. Таким чином, одержали наступне твердження.

Теорема 1. *Будь-який розв'язок системи ЗДР* (7) *породжує точний розв'язок вигляду* (5) *нелінійної системи рівнянь* (1), (2), *якщо функції* g_i, $i = 0, \ldots, m-1$ *та* h_j, $j = 0, \ldots, n-1$, *задовольняють умови* (6).

Важливо розглянути випадки, коли умови (6) мають більш простий вигляд. З цією метою розглянемо породжуючу систему (4) у вигляді

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t,x)U + \alpha_1(t,x)\frac{dU}{dx} + \ldots + \alpha_m(t,x)\frac{d^m U}{dx^m} &= 0,\\
\alpha_0(t,x)V + \alpha_1(t,x)\frac{dV}{dt} + \ldots + \alpha_m(t,x)\frac{d^m V}{dx^m} &= 0.
\end{aligned}$$

Ця система породжує анзац

$$\begin{aligned}
U &= \varphi_0(t)g_0(t,x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x),\\
V &= \psi_0(t)g_0(t,x) + \ldots + \psi_{m-1}(t)g_{m-1}(t,x).
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогічно до теореми 1 можна довести таке твердження.

Теорема 2. *Будь-який розв'язок системи ЗДР*

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = Q^1_{i_1 i}\varphi_{i_1} + R^1_{i_1 i}(\varphi_{i_1})^2 + T^{i,1}_{i_1 i_2}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2},$$
$$\frac{d\psi_j}{dt} = Q^2_{j_1 j}\psi_{j_1} + R^2_{j_1 j}(\psi_{j_1})^2 + T^{j,1}_{j_1 j_2}\psi_{j_1}\psi_{j_2} \tag{9}$$

породжує точний розв'язок вигляду (8) *нелінійної системи рівнянь* (1), (2), *якщо функції* g_i, $i = 0, \ldots, m-1$, *задовольняють умови*

$$\lambda^1_0 g_{i,xx} + \mu g_{i,x} - g_{i,t} = g_{i_1} Q^1_{ii_1}(t),$$
$$\lambda^2_0 g_{j,xx} + \mu g_{j,x} - g_{j,t} = g_{j_1} Q^2_{jj_1}(t),$$
$$\left(\lambda^1_1 + \theta_i(t)\lambda^1_2\right)\left(g_i g_{i,xx} + (g_{i,x})^2\right) = g_{i_1} R^1_{ii_1}(t),$$
$$\left(\lambda^2_2 + \frac{\lambda^2_1}{\theta_i(t)}\right)\left(g_i g_{i,xx} + (g_{i,x})^2\right) = g_{i_1} R^2_{ii_1}(t), \tag{10}$$
$$\left(\lambda^1_1 + \theta_i(t)\lambda^1_2\right) g_i g_{i_1,xx} + \left(\lambda^1_1 + \theta_{i_1}(t)\lambda^1_2\right) g_{i_1} g_{i,xx} +$$
$$+ \left(2\lambda^1_1 + \theta_i(t)\lambda^1_2 + \theta_{i_1}(t)\lambda^1_2\right) g_{i,x} g_{i_1,x} = g_{i_2} T^{i_2,1}_{ii_1}(t), \quad i < i_1,$$
$$\left(\lambda^2_2 + \frac{\lambda^2_1}{\theta_i(t)}\right) g_i g_{i_1,xx} + \left(\lambda^2_2 + \frac{\lambda^2_1}{\theta_{i_1}(t)}\right) g_{i_1} g_{i,xx} +$$
$$+ \left(2\lambda^2_2 + \frac{\lambda^2_1}{\theta_i(t)} + \frac{\lambda^2_1}{\theta_{i_1}(t)}\right) g_{i,x} g_{i_1,x} = g_{i_2} T^{i_2,2}_{ii_1}(t), \quad i < i_1,$$

де функції $\theta_i(t) = \psi_i / \varphi_i$.

Легко помітити, що система ЗДР (9) є більш простою порівняно з (7), оскільки вона не містить доданків з функціями $S^{i,1}_{i_1 j_1}$ та $S^{i,2}_{i_1 j_1}$. Функції $\theta_i(t)$ у співвідношеннях (10) розглядаються як деякі відомі функції для одержання $R^k_{ii_1}$, $Q^k_{ii_1}$, $T^{j,k}_{ii_1}$. Виявляється, що навіть у випадку $\theta_i(t) = \theta_i \in \mathbb{R}$ за допомогою теореми 2 можна одержати нетривіальні розв'язки нелінійної системи рівнянь (1), (2) (див. наступний пункт).

3. Багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійної дифузійної системи (1), (2). Застосуємо описаний вище метод для побудови сімей розв'язків системи рівнянь (1), (2) зі сталими коефіцієнтами λ^k_i, а саме:

$$U_t = \left[\left(\lambda^1_0 + \lambda^1_1 U + \lambda^1_2 V\right)U_x\right]_x + \mu(t)U_x,$$
$$V_t = \left[\left(\lambda^2_0 + \lambda^2_1 U + \lambda^2_2 V\right)V_x\right]_x + \mu(t)V_x. \tag{11}$$

У частковому випадку додаткова генеруюча умова (4) при $n = m = 3$ має вигляд

$$\alpha_1(t)\frac{dU}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} = 0,$$
$$\alpha_1(t)\frac{dV}{dx} + \alpha_2(t)\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^3V}{dx^3} = 0. \tag{12}$$

Умова (12) породжує таку низку анзаців:

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2,$$
$$V = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)x^2, \tag{13}$$

якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x),$$
$$V = \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)\exp(\gamma(t)x), \tag{14}$$

якщо $\alpha_1 = 0$ і $\gamma = -\alpha_2$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \varphi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x),$$
$$V = \psi_0(t) + \psi_1(t)\exp(\gamma_1(t)x) + \psi_2(t)\exp(\gamma_2(t)x), \tag{15}$$

якщо $\psi_{1,2}(t) = \frac{1}{2}\left(\pm(\alpha_2 - 4\alpha_1)^{1/2} - \alpha_2\right)$ і $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\exp(\gamma(t)x) + x\varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x),$$
$$V = \psi_0(t) + \psi_1(t)\exp(\gamma(t)x) + x\psi_2(t)\exp(\gamma(t)x), \tag{16}$$

якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \neq 0$.

***Зауваження* 1.** У випадку $D = \alpha_2^2 - 4\alpha_1 < 0$ отримуємо комплексні значення функцій $\gamma_1 = \gamma_2^* = \frac{1}{2}\left(\pm i(-D)^{1/2} - \alpha_2\right)$, $i^2 = -1$, і тоді анзац (15) набуває вигляду

$$U = \varphi_0(t) + \left[\varphi_1(t)\cos\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right) + \varphi_2(t)\sin\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right)\right]\exp\left(-\frac{\alpha_2 x}{2}\right),$$
$$V = \psi_0(t) + \left[\psi_1(t)\cos\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right) + \psi_2(t)\sin\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right)\right]\exp\left(-\frac{\alpha_2 x}{2}\right). \tag{17}$$

Підставляючи функції $g_0 = h_0 = 1$, $g_1 = h_1 = x$, $g_2 = h_2 = x^2$ з анзацу (13) у співвідношення (6), одержуємо

$$\begin{gathered}
Q_{10}^1 = Q_{10}^2 = \mu(t), \quad Q_{20}^1 = 2\lambda_0^1, \\
Q_{21}^1 = Q_{21}^2 = 2\mu(t), \quad Q_{20}^2 = 2\lambda_0^2, \\
R_{10}^1 = \lambda_1^1, \quad R_{10}^2 = \lambda_2^2, \quad R_{22}^1 = 6\lambda_1^1, \quad R_{22}^2 = 6\lambda_2^2, \\
T_{02}^{0,1} = 2\lambda_1^1, \quad T_{02}^{0,2} = 2\lambda_2^2, \quad T_{12}^{1,1} = 6\lambda_1^1, \quad T_{12}^{1,2} = 6\lambda_2^2, \\
S_{11}^{0,1} = \lambda_2^1, \quad S_{20}^{0,1} = S_{12}^{1,1} = 2\lambda_2^1, \quad S_{21}^{1,1} = 4\lambda_2^1, \quad S_{22}^{2,1} = 6\lambda_2^1, \\
S_{11}^{0,2} = \lambda_1^2, \quad S_{02}^{0,2} = S_{21}^{1,2} = 2\lambda_1^2, \quad S_{12}^{1,2} = 4\lambda_1^2, \quad S_{22}^{2,2} = 6\lambda_1^2
\end{gathered} \tag{18}$$

та

$$R_{ii_1}^k = Q_{ii_1}^k = T_{ii_1}^{j,k} = S_{ij}^{i_1,k} = 0 \tag{19}$$

для всіх інших комбінацій індексів i, i_1, j.

З допомогою співвідношень (18), (19) система ЗДР (7) зводиться до вигляду

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi_0}{dt} &= \mu(t)\varphi_1 + 2\lambda_0^1\varphi_2 + \lambda_1^1(\varphi_1)^2 + 2\lambda_1^1\varphi_0\varphi_2 + \lambda_2^1\varphi_1\psi_1 + 2\lambda_2^1\varphi_2\psi_0, \\
\frac{d\varphi_1}{dt} &= 2\mu(t)\varphi_2 + 6\lambda_1^1\varphi_1\varphi_2 + 4\lambda_2^1\varphi_2\psi_1 + 2\lambda_2^1\varphi_1\psi_2, \\
\frac{d\varphi_2}{dt} &= 6\lambda_1^1(\varphi_2)^2 + 6\lambda_2^1\varphi_2\psi_2, \\
\frac{d\psi_0}{dt} &= \mu(t)\psi_1 + 2\lambda_0^2\psi_2 + \lambda_2^2(\psi_1)^2 + 2\lambda_2^2\psi_0\psi_2 + \lambda_1^2\varphi_1\psi_1 + 2\lambda_1^2\varphi_0\psi_2, \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= 2\mu(t)\psi_2 + 6\lambda_2^2\psi_1\psi_2 + 4\lambda_1^2\varphi_1\psi_2 + 2\lambda_1^2\varphi_2\psi_1, \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= 6\lambda_2^2(\psi_2)^2 + 6\lambda_1^2\varphi_2\psi_2.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Система ЗДР (20) нелінійна, але вона містить підсистему

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi_2}{dt} &= 6\lambda_1^1(\varphi_2)^2 + 6\lambda_2^1\varphi_2\psi_2, \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= 6\lambda_2^2(\psi_2)^2 + 6\lambda_1^2\varphi_2\psi_2,
\end{aligned} \tag{21}
$$

що інтегрується. Маючи функції φ_2 і ψ_2, легко знайти загальний розв'язок системи (21). Явний вигляд загального розв'язку системи (21) суттєво залежить від коефіцієнтів λ_i^k. Вибираючи $\varphi_2 = \psi_2 = 0$ (це є розв'язок (21) при довільних сталих λ_i^k), одержуємо розв'язок системи (20) вигляду

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= d_1, \qquad \psi_1 = d_2, \\
\varphi_0 &= d_1\int \mu(t)\,dt + (\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2)d_1 t + U_0, \\
\psi_0 &= d_2\int \mu(t)\,dt + (\lambda_1^2 d_1 + \lambda_2^2 d_2)d_2 t + V_0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

У (22) і скрізь нижче U_0, V_0, d_1, d_2 — довільні сталі. Таким чином, підставляючи функції (22) в анзац (13), одержуємо 4-параметричну сім'ю точних розв'язків нелінійної системи (11)

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 + d_1\Big[\int \mu(t)\,dt + \big(\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2\big)t + x\Big], \\
V &= V_0 + d_2\Big[\int \mu(t)\,dt + \big(\lambda_1^2 d_1 + \lambda_2^2 d_2\big)t + x\Big].
\end{aligned} \tag{23}
$$

Припустимо тепер, що $\lambda_1^2 = 0$ і $\psi_2 = 0$. У цьому випадку неважко побудувати загальний розв'язок системи (20), оскільки очевидно, що система (21) зводиться до одного ЗДР, яке легко інтегрується. В результаті знаходимо такий розв'язок:

$$
\varphi_0 = \varphi(t), \qquad \psi_0 = -v_1\int \mu(t)\,dt + v_1^2\lambda_2^2 t + V_0,
$$

$$
\varphi_1 = \frac{1}{3\lambda_1^1}\Big[\exp\varphi_2\int \mu(t)\exp(-\varphi_2)\,d\varphi_2 + U_0\exp\varphi_2 + 2v_1\lambda_2^1\Big], \quad \text{якщо} \ \ \lambda_1^1 \neq 0,
$$

$$\varphi_1 = -2u_2\int\mu(t)\,dt + 4u_2v_1\lambda_2^1 t + U_0, \qquad \text{якщо } \lambda_1^1 = 0, \tag{24}$$

$$\psi_1 = -v_1, \qquad \psi_2 = -\frac{u_2}{1+6u_2\lambda_1^1 t},$$

де $\varphi(t)$ — загальний розв'язок лінійного ЗДР першого порядку

$$\frac{d\varphi}{dt} - 2\lambda_1^1\varphi_2\varphi = \left(\mu(t) - \lambda_2^1 v_1\right)\varphi_1 + \lambda_1^1(\varphi_1)^2 +$$

$$+\ 2\left[\lambda_0^1 + \lambda_2^1\left(-v_1\int\mu(t)\,dt + v_1^2\lambda_2^2 t + V_0\right)\right]\varphi_2.$$

Таким чином, підставляючи функції (24) в анзац (13), одержуємо 5-параметричну сім'ю точних розв'язків нелінійної системи (11) при $\lambda_1^2 = 0$

$$U = \varphi(t) + \varphi_1(t)x - \frac{u_2}{1+6u_2\lambda_1^1 t}x^2,$$

$$V = V_0 + v_1^2\lambda_2^2 t - v_1\left(\int\mu(t)\,dt + x\right). \tag{25}$$

Аналогічно, підставляючи функції g_0, h_0, g_1, h_1, g_2 та h_2 з анзаців (14) – (16) у (6), одержуємо відповідні значення функцій $R_{ii_1}^k$, $Q_{ii_1}^k$, $T_{ii_1}^{j,k}$, $S_{ij}^{i_1,k}$, для яких система ЗДР (7) легко розв'язується. На жаль, при цьому отримуються обмеження $\varphi_2 = \psi_2 = 0$, які значно спрощують структуру одержаних розв'язків. Зважаючи на це, нижче для побудови точних розв'язків нелінійної системи (11) застосовуватимемо теорему 2.

Дійсно, підставляючи функції $g_0 = h_0 = 1$, $g_1 = h_1 = x$, $g_2 = h_2 = \exp(\gamma(t)x)$ з анзацу (14) у співвідношення (10), одержуємо відповідні значення функцій $R_{ii_1}^k$, $Q_{ii_1}^k$, $T_{ii_1}^{j,k}$, для яких система ЗДР (9) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \mu(t)\varphi_1, \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1\varphi_0 + \lambda_2^1\psi_0\right)\varphi_2 + \gamma\mu(t)\varphi_2,$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \mu(t)\psi_1, \qquad \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \gamma^2\left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2\varphi_0 + \lambda_2^2\psi_0\right)\psi_2 + \gamma\mu(t)\psi_2$$

при додаткових умовах

$$\lambda_1^2 = \alpha\lambda_1^1, \qquad \lambda_2^2 = \alpha\lambda_2^1, \qquad \psi_l = \theta_l(t)\varphi_l \equiv -\frac{\lambda_2^1}{\lambda_2^1}\varphi_l, \qquad l = 1, 2,$$

$$\lambda_0^2 = \lambda_0^1 + (1-\alpha)(\lambda_1^1\varphi_0 + \lambda_2^1\psi_0), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Інтегруючи систему ЗДР (26) з урахуванням обмежень (27), одержуємо 3-параметричну сім'ю точних розв'язків

$$U = U_0 + d_1\left[\int\mu(t)\,dt + x\right] + c_0\exp\left(M_0(t) + \gamma x\right),$$

$$V = V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}d_1\left[\int\mu(t)\,dt + x\right] - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}c_0\exp\left(M_0(t) + \gamma x\right) \tag{28}$$

системи (11) з коефіцієнтами дифузії вигляду

$$D_1(U,V) = \lambda_0^1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V,$$
$$D_2(U,V) = \lambda_0^1 + (1-\alpha)\left(\lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right) + \alpha\left(\lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V\right). \quad (29)$$

У (28) c_0, γ — довільні сталі, а

$$M_0(t) = \gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma\int \mu(t)\,dt, \qquad U_0, V_0 \in \mathbb{R}.$$

У випадку, коли коефіцієнти дифузії (див. (29) при $\alpha = 1$) мають вигляд

$$D_1 = D_2 = D(U,V) \equiv \lambda_0^1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V,$$

знаходимо таку сім'ю розв'язків:

$$U = \varphi_0(t) + d_1 x + \varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x),$$
$$V = \psi_0(t) + d_2 x - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\varphi_2(t)\exp(\gamma(t)x), \quad (30)$$

де функція $\gamma = \left(c_0 - \left(\lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2\right)t\right)^{-1}$, а функції $\varphi_0, \psi_0, \varphi_2$ є розв'язками системи ЗДР

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = d_1\left(\mu(t) + \lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2\right),$$
$$\frac{d\psi_0}{dt} = d_2\left(\mu(t) + \lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2\right),$$
$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \gamma(t)\left[\mu(t) + \lambda_1^1 d_1 + \lambda_2^1 d_2 + \gamma(t)D(\varphi_0, \psi_0)\right]\varphi_2.$$

Очевидно, що ця система ЗДР інтегрується в квадратурах.

Зауваження 2. Сім'я розв'язків (30) суттєво відрізняється від усіх попередніх тим, що у ній $\gamma(t) \neq \text{const}$. Іншими словами, це не є сім'я розв'язків з поділеними змінними вигляду

$$U = \varphi_0(t)g_0(x) + \ldots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(x),$$
$$V = \psi_0(t)h_0(x) + \ldots + \psi_{n-1}(t)h_{n-1}(x),$$

які одержуються з анзаців вигляду (5) у частковому випадку, коли функції $g_i = g_i(x)$, $h_j = h_j(x)$. Отже, ці розв'язки не можуть бути одержані з допомогою підходу для побудови нових точних розв'язків нелінійних двовимірних рівнянь дифузії, запропонованого в [17, 18] і розвинутого в роботах [19, 20] (метод інваріантних підпросторів).

Аналогічно, підставляючи функції $g_0 = h_0 = 1$, $g_1 = h_1 = \exp(\gamma_1(t)x)$, $g_2 = h_2 = \exp(\gamma_2(t)x)$ з анзацу (15) у співвідношення (10), одержуємо відповідні значення функцій $R^k_{ii_1}$, $Q^k_{ii_1}$, $T^{j,k}_{ii_1}$, для яких система (9) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_l}{dt} = \gamma_l\mu(t)\varphi_l + \gamma_l^2\left[\lambda_0^1\varphi_l + \lambda_1^1\varphi_0\varphi_l + \lambda_2^1\psi_0\varphi_l\right], \qquad l = 2, \quad (31)$$

з додатковим обмеженням (27). Ця система ЗДР легко інтегрується і, підставляючи її загальний розв'язок в анзац (15), одержуємо 4-параметричну сім'ю точних розв'язків нелінійної системи рівнянь (11) з коефіцієнтами дифузії вигляду (29)

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 + c_1 \exp\left[\gamma_1^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_1\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] + \\
&\quad + c_2 \exp\left[\gamma_2^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_2\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\
V &= V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c_1 \exp\left[\gamma_1^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_1\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] - \\
&\quad - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c_2 \exp\left[\gamma_2^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_2\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right],
\end{aligned}
\tag{32}
$$

де c_1, c_2, γ_1 і γ_2 — довільні сталі.

Зазначимо, що у випадку $\gamma_1 = -\gamma_2 = i\gamma$, $i^2 = -1$ і $c_1 = c_2 = c/2$, $c, \gamma \in \mathbb{R}$, довільний комплексний розв'язок вигляду (32) породжує дійсний, що містить періодичну функцію cos (або sin), а саме:

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 + c \exp\left[-\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t\right] \cos\left[\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\
V &= V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c \exp\left[-\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t\right] \cos\left[\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right].
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Очевидно, що у випадку $\gamma_1 = \gamma_2^* = \gamma_0 + i\gamma$, $\gamma_0, \gamma \in \mathbb{R}$, можна побудувати також розв'язки вигляду (17).

З іншого боку, сім'я точних розв'язків (32) дає змогу знайти її наступне нетривіальне узагальнення:

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 + c_k \exp\left[\gamma_k^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_k\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\
V &= V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c_k \exp\left[\gamma_k^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma_k\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right],
\end{aligned}
\tag{34}
$$

де передбачається підсумовування від 1 до $n \in \mathbb{N}$ за індексами k, що повторюються; а c_k, γ_k — довільні сталі. Можна зауважити, що у випадку комплексних значень сталих

$$
c_{2l-1} = \frac{1}{2}(a_l - ib_l), \qquad c_{2l} = \frac{1}{2}(a_l + ib_l), \qquad \gamma_{2l-1} = l\gamma i, \qquad \gamma_{2l} = -l\gamma i,
$$

де $l = 1, \ldots, m$; $m = n/2$, n — парне число, розв'язок (34) набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 + \exp\left[-l^2\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t\right] \times \\
&\quad \times \left[a_l \cos\left[l\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] + b_l \sin\left[l\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right]\right], \\
V &= V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} \exp\left[-l^2\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t\right] \times \\
&\quad \times \left[a_l \cos\left[l\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] + b_l \sin\left[l\gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right]\right],
\end{aligned}
\tag{35}
$$

де передбачається підсумовування від 1 до $m \in \mathbb{N}$ за індексами l.

Врешті-решт, багатопараметричну сім'ю точних розв'язків нелінійної дифузійної системи (11) можна одержати також з допомогою анзацу (16). Дійсно, для шуканих функцій $\varphi_i(t)$ та $\psi_j(t)$ отримуємо систему ЗДР

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \mu(t)(\gamma\varphi_1 + \varphi_2) + \gamma\left[\lambda_0^1 + \lambda_1^1\varphi_0 + \lambda_2^1\psi_0\right](\gamma\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \gamma\mu(t)\varphi_2 + \gamma^2\left[\lambda_0^1 + \lambda_1^1\varphi_0 + \lambda_2^1\psi_0\right]\varphi_2$$

з додатковим обмеженням (27). Ця система ЗДР легко інтегрується, і відповідна сім'я розв'язків нелінійної системи рівнянь (11) набуває вигляду

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \left[c_1 + 2c_2\gamma\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + c_2\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\ V &= V_0 - \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\left[c_1 + 2c_2\gamma\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + c_2\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[\gamma^2\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right)t + \gamma\left(\int \mu(t)\,dt + x\right)\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Як і у випадку сім'ї розв'язків (32), цю сім'ю також можна узагальнити до $2n$-параметричної сім'ї розв'язків.

Таким чином, для нелінійної дифузійної системи (11) з допомогою анзацу (13) побудовано 4-параметричну сім'ю розв'язків (23), яка може бути узагальнена до 5- або 6-параметричної сім'ї для будь-яких значень сталих коефіцієнтів λ_i^k. Використання анзаців (14) – (16) також дозволяє побудувати багатопараметричні сім'ї розв'язків, проте з додатковими обмеженнями (27) на вигляд коефіцієнтів λ_i^k.

4. Застосування побудованих розв'язків для точного розв'язування деяких нелінійних ЗРГ. Розглянемо систему рівнянь (1) з коефіцієнтами дифузії вигляду

$$\begin{aligned} D_1(U, V) &= \lambda_0^1 + \lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V, \\ D_2(U, V) &= \lambda_0^1 + (1-\alpha)\left(\lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0\right) + \alpha\left(\lambda_1^1 U + \lambda_2^1 V\right) \end{aligned} \tag{37}$$

та крайовими і початковими умовами

$$x = 0: \begin{cases} \mu(t)(U_s - U) = D_1 U_x, \\ \mu(t)(V_s - V) = D_2 V_x, \\ U + \dfrac{\lambda_2^1}{\lambda_1^1}V = U_0 + \dfrac{\lambda_2^1}{\lambda_1^1}V_0, \end{cases} \tag{38}$$

$$t = 0: \begin{cases} U = U_0 - c\exp(-\gamma x), \\ V = V_0 + c\dfrac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\exp(-\gamma x). \end{cases} \tag{39}$$

Нагадаємо, що тут $U = U(t, x)$ та $V = V(t, x)$ — шукані концентрації протеїну та „осаджувача" рідкої фази, U_s та V_s — ті ж концентрації твердої фази ($x < 0$), які припускаються сталими. Перші дві умови в (38) — це класичні умови

Стефана, які усоблюють закон збереження маси на межі розділу фаз. Третя умова в (38) — це умова динамічної рівноваги між двома компонентами рідкої фази [2]. Зрозуміло, що для однозначного знаходження розв'язку нелінійної ЗРГ (1), (37) – (39) необхідно згадати ще деякі крайові умови при $x \to +\infty$. З цією метою накладемо на шуканий розв'язок умови Діріхле

$$x = +\infty : \begin{cases} U = U_0, \\ V = V_0, \end{cases} \tag{40}$$

які скрізь нижче автоматично виконуються.

Неважко переконатись, що сім'я розв'язків (32) при $c_1 \to -c_1$, $\gamma_1 = -\gamma$ дає точний розв'язок нелінійної ЗРГ (1), (37), (38) (беручи лише третю умову !) та (39), що має вигляд

$$\begin{aligned} U &= U_0 - c \exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\ V &= V_0 + \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} c \exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right], \end{aligned} \tag{41}$$

де $D_0 = D_1(U_0, V_0) = D_2(U_0, V_0)$. Швидкість межі розділу $\mu(t)$ можна знайти, використавши перші дві крайові умови з (38). Дійсно, підставляючи (41) в ці умови, отримуємо

$$\begin{aligned} &(U_s - U_0)\mu(t) = (c\gamma D_0 - c\mu(t)) \exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt\right)\right], \\ &\lambda_1^1(U_s - U_0) = \lambda_2^1(V_0 - V_s). \end{aligned} \tag{42}$$

Перше рівняння з (42) зводиться до нелінійного ЗДР

$$D_0 \frac{d\mu}{dt} = \mu(\gamma D_0 - \mu)^2$$

з початковою умовою

$$\mu(0) = \frac{c\gamma D_0}{U_s - U_0 + c}, \qquad U_s - U_0 + c > 0.$$

Таким чином, функція $\mu(t)$ знаходиться у неявному вигляді

$$\log\left|\frac{\mu}{\gamma D_0 - \mu}\right| + \frac{\gamma D_0}{\gamma D_0 - \mu} = 1 + \gamma^2 D_0 t + \log\left|\frac{c}{U_s - U_0}\right| + \frac{c}{U_s - U_0}. \tag{43}$$

Неважко довести, що ця швидкість межі розділу $\mu(t)$ є монотонно зростаючою обмеженою функцією такою, що $\mu \to \gamma D_0$, якщо $t \to \infty$.

Отже, ми побудували точний розв'язок (U, V, μ) нелінійної ЗРГ (1), (37) – (39), який задається формулами (41) та (43). За відомою швидкістю μ легко знайти зміщення межі розділу рідкої та твердої фаз в будь-який момент часу за формулою

$$M(t) = \int_0^t \mu(t)\,dt.$$

Зауваження 3. У випадку $U_s = U_0$, $V_0 = V_s$ з першого рівняння (42) отримуємо стаціонарну швидкість $\mu = \gamma D_0$, яка породжує стаціонарні концентрації вигляду (39).

Розглянемо систему рівнянь (1), (37), (38) з початковими умовами

$$t = 0 : \begin{cases} U = U_0 - (c_1 - c_2 x)\exp(-\gamma x), \\ V = V_0 + \dfrac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}(c_1 - c_2 x)\exp(-\gamma x), \end{cases} \tag{44}$$

де $U_0, V_0, U_s, V_s, \gamma$— додатні сталі. Умови (44) — це деяке узагальнення початкових умов (39).

Знову ж таки неважко переконатися, що сім'я розв'язків (36) при $c_1 \to -c_1$, $\gamma_1 = -\gamma$ дає точний розв'язок нелінійної ЗРГ (1), (37), (38) (беручи лише третю умову !) та (44) вигляду

$$\begin{aligned} U &= U_0 - \left[c_1 + 2c_2\gamma D_0 t - c_2\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right]\exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right], \\ V &= V_0 + \frac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1}\left[c_1 + 2c_2\gamma D_0 t - c_2\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right]\exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt + x\right)\right]. \end{aligned} \tag{45}$$

Для знаходження швидкості межі розділу $\mu(t)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\begin{gathered}(U_s - U_0)\mu(t) = \\ = \left[(\gamma D_0 - \mu(t))\left(c_1 + 2c_2\gamma D_0 t - c_2\int_0^t \mu(t)\,dt\right) + D_0 c_2\right]\exp\left[\gamma^2 D_0 t - \gamma\left(\int_0^t \mu(t)\,dt\right)\right]\end{gathered} \tag{46}$$

разом з обмеженням $\lambda_1^1(U_s - U_0) = \lambda_2^1(V_0 - V_s)$. Підстановкою

$$M(t) = \int_0^t \mu(t)\,dt, \qquad \mu(t) = \frac{dM}{dt} \tag{47}$$

рівняння (46) зводиться до нелінійного ЗДР

$$\begin{gathered}(U_s - U_0)\frac{dM}{dt} = \\ = \left[\left(\gamma D_0 - \frac{dM}{dt}\right)(c_1 + 2c_2\gamma D_0 t - c_2 M(t)) + D_0 c_2\right]\exp(\gamma^2 D_0 t - \gamma M(t))\end{gathered} \tag{48}$$

з початковою умовою $M(0) = 0$.

При $U_s \neq U_0$ це рівняння не інтегрується в квадратурах, проте можна помітити, що у випадку $c_2 = \gamma(U_s - U_0)$ воно має частковий розв'язок $M^*(t) = \gamma D_0 t$, який задовольняє умову $M^*(0) = 0$. Отже, для швидкості одержуємо вираз $\mu^*(t) = \gamma D_0 = \text{const}$.

У випадку $U_s = U_0$ з рівняння (48) при умові $M(0) = 0$ функцію $M(t)$ отримуємо у неявному вигляді

$$\gamma^2 D_0 t - \gamma M(t) = \log\left|1 + \frac{c_2}{\gamma c_1 + c_2}(2\gamma^2 D_0 t - \gamma M(t))\right|, \qquad \gamma \neq -c_2/c_1. \tag{49}$$

Отже, ми побудували точний розв'язок (U, V, μ) нелінійної ЗРГ (1), (37), (38) та (44), який задається формулою (45) та рівнянням (46). У випадку $U_s = U_0$ рівняння (46) інтегрується, і тоді функція $\mu(t)$ знаходиться у неявному вигляді за допомогою (49), (47).

На закінчення зауважимо, що крайові умови (38) — це стандартні умови в математичній моделі для опису процесу росту кристалів протеїну [2]. Щодо початкових умов (39) та (44), то вони є деякими модельними випадками загального їхнього вигляду

$$t=0: \begin{cases} U = u_0 - U_1(x), \\ V = v_0 + V_1(x), \end{cases} \tag{50}$$

де $U_1(x)$, $V_1(x)$ — деякі гладкі функції. Очевидно, що у випадку $V_1(x) = \dfrac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} U_1(x)$ початкові умови (50) на довільному скінченному інтервалі $[0, X_0]$ можна розвинути в ряд Фур'є, а саме:

$$t=0: \begin{cases} U = U_0 - \sum\limits_{l=1}^{\infty} [a_l \cos(l\gamma x) + b_l \sin(l\gamma x)], \\ V = V_0 + \dfrac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} \sum\limits_{l=1}^{\infty} [a_l \cos(l\gamma x) + b_l \sin(l\gamma x)], \end{cases} \tag{51}$$

де

$$U_0 = u_0 - \frac{a_0}{2}, \qquad V_0 = v_0 + \frac{\lambda_1^1 a_0}{2\lambda_2^1}, \qquad l = \frac{2\pi}{X_0},$$

а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, \ldots$ обчислюються за відомими формулами (див., наприклад, [21]). У випадку рівномірної збіжності ряду Фур'є у правій частині (51) початкові умови (50) з довільною точністю можна апроксимувати таким чином:

$$t=0: \begin{cases} U = U_0 - [a_l \cos(l\gamma x) + b_l \sin(l\gamma x)], \\ V = V_0 + \dfrac{\lambda_1^1}{\lambda_2^1} [a_l \cos(l\gamma x) + b_l \sin(l\gamma x)], \end{cases} \tag{52}$$

де передбачається підсумовування за індексами l від 1 до необхідного номера $m \in \mathbb{N}$.

Розв'язок нелінійної ЗРГ (1), (37), (38) та (52) можна знайти, використавши сім'ю розв'язків (35). Детальнішому розглядові властивостей деяких розв'язків цієї задачі присвячено статтю [22], в якій досліджено питання виникнення так званих вибухаючих (blow-up) розв'язків та їхньої стійкості. В додатку наведено один з таких прикладів.

Додаток. Нами помічено такий цікавий факт: при певних співвідношеннях між довільними сталими в коефіцієнтах ЗРГ (1), (37), (38) знайдені розв'язки описують режими з загостренням. В англомовній літературі такі розв'язки називають „вибухаючими" (blow-up) [23] і останнім часом активно досліджують умови, за яких вони можуть виникати (див., наприклад, [24] та цитовану там літературу).

Отже, розглянемо 4-параметричну сім'ю точних розв'язків (23). Очевидно, що ці розв'язки задовольняють такі початкові умови:

$$U(x, 0) = U_0 + U_1 x, \qquad V(x, 0) = V_0 + V_1 x.$$

Нижче ми покажемо, що при певних значеннях параметрів λ_k^i, U_0, V_0, U_1, V_1, U_s, V_s з умов Стефана можна отримати швидкість $\mu(t)$, яка має властивість зростати до нескінченності за скінченний проміжок часу t. Дійсно, підставляючи (23) в (38) та припускаючи $d_1 = U_1 \neq 0$, $d_2 = V_1 \neq 0$, отримуємо, що $\mu(t)$ має задовольняти рівняння

$$\mu\left[\frac{U_s - U_0}{U_1} - M(t) - \left(\lambda_1^1 U_1 + \lambda_2^1 V_1\right)t\right] = \lambda_0^1 + \lambda_1^1 U_0 + \lambda_2^1 V_0 +$$
$$+ \left(\lambda_1^1 U_1 + \lambda_2^1 V_1\right) M(t) + \left[\lambda_1^1\left(\lambda_1^1 U_1 + \lambda_2^1 V_1\right) + \lambda_2^1\left(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^1 V_1\right)\right]t,$$
$$\mu\left[\frac{V_s - V_0}{V_1} - M(t) - \left(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 V_1\right)t\right] = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 U_0 + \lambda_2^2 V_0 + \tag{53}$$
$$+ \left(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 V_1\right) M(t) + \left[\lambda_1^2\left(\lambda_1^1 U_1 + \lambda_2^1 V_1\right) + \lambda_2^2\left(\lambda_1^2 U_1 + \lambda_2^2 V_1\right)\right]t,$$

де $M(t) := \int_0^t \mu(t)\,dt$. Хоча існують також деякі інші випадки розв'язків рівнянь (53), ми обмежимося найпростішим, коли $U_1 = -V_1$, $U_s - U_0 = V_0 - V_s$, $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$, $k = 1, 2, 3$. Тоді знову виконується $D_0 := D_1(U_0, V_0) = D_2(U_0, V_0)$. Зауважимо, що умова $U_1 = -V_1$ є типовою для даної задачі, оскільки зростанню (зменшенню) концентрації протеїну відповідає зменшення (зростання) концентрації осаджувача, решта умов також реальні [1]. При цих умовах сім'я розв'язків (23) набуває вигляду

$$U = U_0 + U_1\left[M(t) + \left(\lambda_1^1 - \lambda_2^1\right)U_1 t + x\right],$$
$$V = V_0 - U_1\left[M(t) + \left(\lambda_1^1 - \lambda_2^1\right)U_1 t + x\right].$$

Тепер обидва рівняння (53) можна умовно переписати як одне нелінійне ЗДР

$$\frac{dM}{dt}[A - (M + Bt)] = D_0 + BM + Ct,$$

де A, B і C — відповідні групування сталих. Позначаючи $q := A - (M + Bt)$ та враховуючи, що $q(0) = A$, легко знаходимо

$$q(t) = \sqrt{A^2 - 2(AB + D_0)t - (C - B^2)t^2},$$

а отже,

$$\mu(t) = -B + \frac{(AB + D_0)t + (C - B^2)t}{\sqrt{A^2 - 2(AB + D_0)t - (C - B^2)t^2}}. \tag{54}$$

Тепер видно, що в залежності від A, B, C та D_0 швидкість μ може зростати до нескінченності за скінченний проміжок часу. Якщо вибрати $A = \dfrac{U_s - U_0}{U_1} > 0$ і $D_0 > 0$ [1], а знаки B і C не фіксувати, то можна, зокрема, отримати, що член

$$C - B^2 = \left(\lambda_1^1 - \lambda_2^1\right)\left(\lambda_1^1(1 - U_1) + \lambda_2^1(1 + U_1)\right)U_1$$

матиме додатне значення. Отже, при $C - B^2 > 0$ отримуємо такий час, протягом якого розв'язок (54) зростає до нескінченності:

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{\left(\lambda_1^1 U_s + \lambda_2^1 V_s + \lambda_0^1\right)^2 + (C - B^2)(U_s - U_0)^2 / U_1^2} - \left(\lambda_1^1 U_s + \lambda_2^1 V_s + \lambda_0^1\right)}{C - B^2}.$$

Іншими словами, при $C - B^2 > 0$ розв'язок (54) відповідає режиму з загостренням (blow-up regime). Зауважимо, що випадок $C - B^2 = 0$ також веде до вибухаючих розв'язків при умові, що $AB + D_0 > 0$.

Автор вдячний рецензентові за корисні зауваження щодо покращання остаточного вигляду статті.

1. *Fehribach J. D., Rosenberger F.* Analysis of models for two solutions crystal growth problems // J. Cryst. Growth. – 1989. – **94.** – P. 6–14.
2. *Fehribach J. D.* Analysis and application of continuation method for a self-similar coupled Stefan system // Quart. Appl. Math. – 1993. – **51,** № 3. – P. 405–423.
3. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне, 1967. – 457 с.
4. *Crank J.* Free and moving boundary problems. – Oxford: Oxford Univ. press, 1984. – 300 p.
5. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40,** № 5. – С. 133–185.
6. *Черніга Р., Однороженко І.* Точні розв'язки нелінійної задачі плавлення та випаровування металу при дії потужного потоку енергії // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 44–47.
7. *Cherniha R. M., Cherniha N. D.* Exact solutions of a class of nonlinear boundary value problems with moving boundaries // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1993. – **26.** – P. L935–940.
8. *Однороженко І., Черніга Р., Черніга Н.* Побудова точних розв'язків одного класу нелінійних крайових задач з рухомими границями // Допов. АН України. – 1993. – № 5. – С. 31–35.
9. *Черніга Р. М.* Симетрія та точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу в термоядерній плазмі // Там же. – 1995. – № 4. – С. 17–21.
10. *Cherniha R.* A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996. – **38,** № 3. – P. 301–312.
11. *Черніга Р. М.* Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49,** № 9. – С. 814–827.
12. *Fushchych W., Cherniha R.* The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math and Gen. – 1985. – **18.** – P. 3491–3503.
13. *Cherniha R., Wilhelmsson H.* Symmetry and exact solutions of heat-mass transfer equations in thermonuclear plasma // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 9. – С. 1265–1277.
14. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16.** – С. 67–78.
15. *Соколов Ю. Д.* О некоторых частных решениях уравнения Буссинеска // Укр. мат. журн. – 1956. – **8,** № 1. – С. 54–58.
16. *Hill J. M.* Similarity solutions for nonlinear diffusion — a new integration procedure // J. Eng. Math. – 1989. – **23.** – P. 141–155.
17. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in degenerate diffusion equations // Nonlinear Analysis. TMA. – 1985. – **9.** –P. 987–1008.
18. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118,** № 4. – P. 172–176.
19. *Galaktionov V. A., Posashkov S. A.* Examples of nonsymmetric extinction and blow-up for quasilinear heat equations // Different. and Integr. Equat. – 1995. – **8.** –P. 87–103.
20. *Svirshchevskii S.* Invariant linear spaces and exact solutions of nonlinear evolution equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 1996. – **3.** – P. 164–169.
21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
22. *Cherniha R. M., Fehribach J. D.* New exact solutions for a free boundary system // J. Phys. A: Math and Gen. – 1998. – **31.** – P. 3815–3829.
23. *Baras P., Cohen L.* Complete blow-up after $T_{\max}$ for the solution of semilinear heat equation // J. Funct. Anal. – 1987. – **71.** – P. 142–174.
24. *Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kordiumov S. P., Mikhailov A. P.* Blow-up in quasilinear parabolic equations. – Berlin; New York: Gruyter, 1995. – 600 p.

Одержано 19.04.97