УДК 517. 956. 4; 515.168.5

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т України „КПІ")

ОЦЕНКИ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

On a Riemann manifold of nonpositive curvature, we obtain dimension independent estimates for the fundamental solution of parabolic equation and for the logarithmic derivative of this solution.

На рімановому многовиді недодатної кривизни одержано незалежні від розмірності оцінки фундаментального розв'язку параболічного рівняння та його логарифмічної похідної.

1. Постановка задачи. Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности n с метрическим тензором $g_{jk}(x)$, метрикой $\rho(x, y)$ и объемом σ. Рассмотрим дивергентное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами, и обозначим через $p(t, x, y)$, $t > 0$, x, $y \in M$, его фундаментальное решение (ядро теплопроводности), т. е. p удовлетворяет (1) по переменным t, x и для непрерывной на M функции φ

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_M \varphi(y) p(t, x, y) \sigma(dy) = \varphi(x).$$

В данной работе устанавливаются двусторонние оценки для ядра теплопроводности и его логарифмического градиента через кривизну многообразия. Эти оценки сравнивают фундаментальное решение с функцией

$$q(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\} \tag{2}$$

и, в отличие от известных результатов [1 – 4], входящие в неравенства константы и функции не зависят от размерности.

Последнее утверждение означает следующее. В приложениях исходным объектом является параболическое уравнение в гильбертовом пространстве, а конечномерные уравнения (1) являются его аппроксимацией. Можно доказать, что последовательность фундаментальных решений уравнений (1) аппроксимируют некоторую меру $P(t, x, \Gamma)$ на гильбертовом пространстве, а не зависящие от размерности оценки позволяют изучить свойства этой меры.

2. Обозначения, определения, условия. Одним из основных объектов многообразия является тензор кривизны $R(x)$, определяемый в локальных координатах равенством [5]

$$R^k_{ijp} = \frac{1}{2} g^{kr} \left\{ \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^i \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^r \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial x^j \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^j \partial x^r} \right\} + g^{kr} g_{sq} \left(\Gamma^s_{jr} \Gamma^q_{ip} - \Gamma^s_{ir} \Gamma^q_{jp} \right),$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты связности, выражающиеся через первые производные метрического тензора. Тензор кривизны порождает на $T_x M$ четырехлинейный функционал

$$(R(x)(X, Y)Z, U) = g_{mk} R^k_{ijp} X^i Y^j Z^p U^m.$$

Тензор Риччи и скалярная кривизна определяются соответственно равенствами

$$Ric(x)(X, Y) = \sum_k \left(R(x)(X, e_k)Y, e_k \right), \qquad r(x) = \sum_k Ric(x)(e_k, e_k),$$

$\{e_k\}$ — ортобазис в $T_x M$.

Всюду ниже предполагается, что секционная кривизна многообразия неположительна, т. е.

$$(R(x)(X, Y)X, Y) \geq 0 \qquad \forall\, x \in M, \quad X, Y \in T_x M.$$

Геодезическая γ параметризуется длиной дуги т. е. $\dot\gamma(s)$ — единичный касательный вектор. Экспоненциальное отображение Exp_x определяется формулой

$$\mathrm{Exp}_x U = \gamma(\|U\|), \qquad \gamma(0) = x, \qquad \dot\gamma(0) = \frac{U}{\|U\|}$$

и в силу неположительности кривизны является диффеоморфизмом (теорема Картана – Адамара).

Определение 1. *Полем Якоби* $Z(s)$ *вдоль* γ *называется решение уравнения Якоби*

$$Z''(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s), \qquad Z'(s) = \nabla_{\dot\gamma(s)} Z(s).$$

Определение 2. *Пусть* $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x, y))$. *Поля Якоби* $Z_1(s), \ldots, Z_n(s)$ *называются базисными, если* $Z_k(0) = 0$, *а* $Z_k(\rho)$ *образуют в* $T_x M$ *полугеодезический ортобазис (т. е.* $Z_1(s) = \frac{s}{\rho}\dot\gamma(s)$*).*

Приведем условия на многообразие, сформулированные в терминах тензора кривизны.

1. Для любых ортобазисов $\{e_k\}$, $\{\varphi_k\}$ в $T_x M$

$$\sum_k \left| \left(R(x)(X, e_k)Y, \varphi_k \right) \right| < c\sqrt{Ric(x)(X, X) \cdot Ric(x)(Y, Y)}.$$

2. Для любой геодезической γ

$$\int_0^\infty s r(\gamma(s))\, ds < c,$$

причем константы в условиях 1 и 2 не зависят от размерности и от γ.

3. Вдоль произвольной геодезической γ ковариантные производные тензора кривизны имеют свойства:

3.1) $\displaystyle\sum_k \left\| (\nabla_{e_k} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \varphi_k)\dot\gamma(s) \right\| = f_1(s);$

3.2) $\sum_k \left\| (\nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))\big(e_k, \dot\gamma(s)\big)\varphi_k \right\| = f_2(s);$

3.3) $\sum_{j,k} \left\| (\nabla_{e_k} R)(\gamma(s))\big(\dot\gamma(s), e_j\big)\dot\gamma(s) \right\|^2 = f_3^2(s);$

3.4) $\sum_{j,k} \left\| (\nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))\big(e_j, \dot\gamma(s)\big)e_k \right\|^2 = f_4^2(s);$

3.5) $\sum_{j,k} \left| (\nabla_{e_k} R)(\gamma(s))(\varphi_i, \dot\gamma(s))e_j, \varphi_k \right| = f_5(s);$

3.6) $\sum_{j,k} \left| \Big(\big(\nabla_{e_k} \nabla_{e_j} R\big)(\gamma(s))\big(\dot\gamma(s), e_j\big)\dot\gamma(s), e_k\Big) \right| = f_6(s);$

3.7) $\sum_{j,k} \left| \Big(\big(\nabla_{e_k} \nabla_{\dot\gamma(s)} R\big)(\gamma(s))\big(e_j, \dot\gamma(s)\big)e_j, e_k\Big) \right| = f_7(s),$

где $\{e_k\}$, $\{\varphi_k\}$ — произвольные ортобазисы в T_xM, а функции $f_j(s)$ таковы, что

$$\int_0^\infty s^2 f_j(s)\,ds < c, \quad j = 1, 2; \quad \int_0^\infty s f_j(s)\,ds < c, \quad j = 3, \ldots, 7,$$

и константы не зависят от γ и от размерности.

Вытекающие из этих условий оценки для норм базисных полей Якоби и их производных установлены в [6]. В свою очередь, упомянутые оценки используются при доказательстве следующих ниже результатов.

3. Основные результаты. Пусть $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$, $Z(s)$ — поле Якоби вдоль γ. Определим следующие объекты:

1) оператор $T(\gamma(s))$ на полях Якоби:

$$T(\gamma(s))Z(s) = sZ'(s) \text{ для } Z(s) \perp \dot\gamma(s); \; T(\gamma(s))\,\dot\gamma(s) = \dot\gamma(s);$$

2) функции

$$a(x, y) = \operatorname{tr}(T(x) - I) = \sum_k \big(\rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)\big),$$

где Z_k — базисные поля Якоби;

$$b(x, y) = \int_0^\rho (\rho - s) Ric(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\,ds.$$

Лемма 1. *Оператор $T(x)$ симметричен и справедливы неравенства*

$$(T(x)U, U) \geq (U, U), \quad U \in T_xM,$$

$$0 \leq a(x, y) \leq \int_0^\rho s Ric(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\,ds.$$

Доказательство следует из оценки

$$s(Z'(s), Z(s)) \geq \| Z(s) \|^2,$$

выражающей выпуклость вниз $\|Z(s)\|$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 3.1, 3.2, 3.5, 3.6. *Тогда су-*

ществует не зависящая от размерности константа k *такая, что выполняется неравенство*

$$\exp\left\{-kt-\frac{b(x,y)}{2}\right\} \le \frac{p(t,x,y)}{q(t,x,y)} \le 1$$

для $t>0,\ x,y\in M$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 – 3.7. *Тогда для логарифмического градиента ядра теплопроводности справедливо представление*

$$\operatorname{grad}\ln p(t,x,y) = \operatorname{grad}\ln q(t,x,y)+W(t,x,y),$$

где норма векторного поля

$$\|W(t,x,y)\| < \frac{k}{\sqrt{t}}$$

для $t<t_0$, k *не зависит от размерности.*

Замечание. Справедливо соотношение

$$\operatorname{grad}\ln q(t,x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{t}\dot\gamma(x).$$

При доказательстве теорем используются оценки лапласианов функций $a(x, y)$ и $b(x,y)$.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы* 1 $|\Delta b(x,y)|<c$. *При выполнении условий теоремы* 2 $|\Delta a(x,y)|<c$ *и константы не зависят от размерности.*

Доказательство. Бескоординатное выражение для лапласиана

$$\Delta\varphi(x) = \sum\left(\nabla_{e_k}\operatorname{grad}\varphi, e_k\right) = \sum\left(\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\varphi, e_k\right), e_k\right)-\sum_k\left(\operatorname{grad}\varphi, \nabla_{e_k}, e_k\right)$$

требует выбора полей базисных векторов $\{e_k\}$ в окрестности точки x, что в силу непараллелизуемости M является нетривиальной задачей. В [6] в качестве такого ортобазиса выбраны значения базисных полей Якоби $X_i(\rho)$ и доказана формула

$$\nabla_{X_j}X_i(\rho) = -\left(X_j'(\rho), X_i(\rho)\right)\dot\gamma(\rho),$$

откуда

$$\Delta\varphi(x) = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}(x)+\sum_i\left(\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\varphi(x), X_i\right), X_i\right)+\sum_i\left(X_i', X_i\right)\frac{d}{d\rho}\varphi(x).$$

Дифференцируя $b(x,y)$ вдоль $X_i(\rho)$ и $\dot\gamma(\rho)$, получаем

$$\left(\operatorname{grad} b(x,y), X_i(\rho)\right) = \int_0^\rho Ric(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X_i(\tau))\,d\tau +$$

$$+\int_0^\rho(\rho-\tau)Ric(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau))\,d\tau +$$

$$+\sum_k\int_0^\rho(\rho-\tau)\Big((\nabla_{e_k}R)(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X_i(\tau))\dot\gamma(\rho), e_k\Big)\,d\tau,$$

$$\frac{db}{d\rho} = \int_0^{\rho} Ric(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\,d\tau, \qquad \frac{d^2 b}{d\rho^2} = \nabla_{\dot\gamma(\rho)} Ric(\gamma(\rho))(\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)).$$

Вновь дифференцируя вдоль $X_i(\rho)$, имеем

$$\left(\nabla_{X_1} \operatorname{grad} b(x, y), X_i\right) = \left(X_i'(\rho), X_i(\rho)\right)\int_0^{\rho} Ric(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\,d\tau +$$

$$+\, 2\int_0^{\rho} Ric(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), \nabla_{X_i} X_i(\tau)\right)d\tau -$$

$$-\int_0^{\rho} (\rho-\tau)\left((\nabla_{\dot\gamma(\tau)} Ric)(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \nabla_{X_i} X_i(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\int_0^{\rho} (\rho-\tau)\sum_k \left(\left(\nabla_{e_k} R\right)(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), \nabla_{X_i} X_i(\tau)\right)\dot\gamma(\tau), e_k\right)d\tau + I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_0^{\rho} \left[Ric(\gamma(\tau))\left(X_i'(\tau), X_i(\tau)\right) + \left(R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau)), X_i(\tau)\right)\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau)\right]d\tau +$$

$$+\int_0^{\rho} \Big[\, Ric(\gamma(\tau))(X_i'(\tau), X_i(\tau)) + Ric(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), R(\gamma(\tau))(X_i(\tau), \dot\gamma(\tau))X_i(\tau)) -$$

$$-\left(R(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau)\right)\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau)\right) - \left\| R(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau)\right)\dot\gamma(\tau)\right\|^2\Big]d\tau,$$

$$I_2 = \int_0^{\rho} \left(\nabla_{X_i} Ric\right)(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\int_0^{\rho} (\rho-\tau)\left[2\left(\nabla_{X_i} Ric\right)(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i'(\tau)\right) - \left(\nabla_{X_i} Ric\right)(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i(\tau)\right)\right]d\tau,$$

$$I_3 = \int_0^{\rho} (\rho-\tau)\sum_k \left(\left(\nabla_{X_i}\nabla_{e_k} R\right)(\gamma(\tau))\left(\dot\gamma(\tau), X_i(\tau)\right)\dot\gamma(\tau), e_k\right)d\tau.$$

При оценке полученного выражения используется представление из [6]

$$\nabla_{X_i} X_i(\tau) = -\left(X_i'(\tau), X_i(\tau)\right)\dot\gamma(\tau) + H_i(\tau)$$

с оценкой для ортогональной к $\dot\gamma(\tau)$ составляющей $H_i(\tau)$. Суммируя слагаемые $\left|\left(\nabla_{X_i} \operatorname{grad} b(x, y), X_i\right)\right|$, получаем выражение, оцениваемое сверху функцией

$$c_1 + \int_0^{\rho} f(\gamma(s))\,ds, \quad \text{где} \quad \int_0^{\rho} f(\gamma(s))\,ds < c_2,$$

причем c_1, c_2 не зависят от размерности и от γ.

Аналогично оценивается $|\Delta a(x, y)|$, а схема доказательства его ограниченности приведена в [6].

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим функцию

$$r(t, x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}b(x, y) - kt\right\}q(t, x, y), \quad k \geq \frac{|\Delta b(x, y)|}{4}$$

и покажем, что при одинаковых начальных условиях с ядром теплопроводности $p(t, x, y)$ функция r субпараболична, а q суперпараболична

$$\operatorname{grad} q(t, x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{t}\dot{\gamma}(\rho)q,$$

$$\nabla_X \operatorname{grad} q(t, x, y) = \left(\frac{\rho^2(\dot{\gamma}(\rho), X)\dot{\gamma}(\rho)}{t^2} - \frac{T(\rho)X}{t}\right)q,$$

так что

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta q = \frac{a(x, y)}{t}q(t, x, y) \geq 0.$$

Аналогично в силу леммы 2

$$\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta r = \left(\frac{a(x, y)}{2t} - \frac{\rho(x, y)}{2t}\int\limits_0^{\rho(x, y)} Ric(\gamma(\tau))(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))\,d\tau - \frac{1}{8}\|\operatorname{grad} b(x, y)\|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\Delta b(x, y) - k\right)q(t, x, y) \leq 0.$$

С другой стороны, замена переменных

$$y = \operatorname{Exp}_x\left(\sqrt{t}U\right), \qquad U = -\frac{\rho(t, y)}{\sqrt{t}}\dot{\gamma}(\rho) \tag{3}$$

приводит к формуле

$$\int\limits_M \varphi(y)q(t, x, y)\sigma(dy) = \int\limits_{T_xM} \varphi\left(\operatorname{Exp}_x\sqrt{t}U\right)J(t, x, U)\mu_x(dU),$$

где μ_x — каноническая гауссова мера на T_xM, а ограниченность якобиана J доказана в [6]. Из приведенной формулы следует, что для непрерывной функции φ

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_M \varphi(y)r(t, x, y)\sigma(dy) = \lim_{t\downarrow 0}\int\limits_M \varphi(y)q(t, x, y)\sigma(dy) = \varphi(x),$$

т. е. начальные условия для функций r, p, q одинаковы, что и завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Дифференцируя уравнение (1) вдоль произвольного векторного поля $H(x)$, получаем систему уравнений для векторных полей $V(t, x, y) = \operatorname{grad}\ln p(t, x, y)$ и $W(t, x, y) = V(t, x, y) + \frac{\rho(x, y)}{t}\dot{y}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(W, H) = \frac{1}{2}\Delta(W, H) + (\nabla_V W, H) - \frac{1}{t}(\nabla_W\dot{\gamma}, H) - \frac{\rho}{t}(W, \dot{\gamma}) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(W, \nabla_{\dot{\gamma}}H\right)\sum_k (Z_k', Z_k) - \sum_k\left(\nabla_{Z_k}W, \nabla_{Z_k}H\right) - \frac{1}{2}\sum_k\left(W, \nabla^2_{Z_k}H\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}Ric(x)(W, H) - \frac{1}{2t}(\operatorname{grad} a(x, y), H),$$

где Z_k — базисные поля Якоби в точке $x = \gamma(\rho)$. В частности, полагая $H(x) = W(t, x, y)$, получаем уравнение для функции $\alpha(t, x, y) = \| W(t, x, y)\|^2$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\alpha + (\operatorname{grad}\alpha, V(t,x,y)) + \alpha\big(Ric(x)(E,E)\big) - \frac{2}{t}(TE,E) -$$
$$- \frac{1}{t}(\operatorname{grad}\alpha, W) - \sum_k \left\|\nabla_{Z_k} W\right\|^2, \qquad E = \frac{W}{\|W\|}. \tag{4}$$

Используя теорему 1, можно получить и начальное условие для $\alpha(t,x,y)$. Функции

$$p(t,x,y) \le q(t,x,y) \le \frac{q^2}{p}(t,x,y) \equiv s(t,x,y)$$

образуют возрастающую геометрическую прогрессию с одинаковыми начальными условиями на непрерывных функциях, причем $s(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta s + \left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y)\right)s.$$

С помощью замены (3) установим формулу

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\frac{a(x,y)}{t}p(t,x,y)\sigma(dy) = \lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\frac{a(x,y)}{t}q(t,x,y)\sigma(dy) = \frac{1}{3}\varphi(x)r(x),$$

где $r(x)$ — скалярная кривизна, а из неравенства

$$s - p > 2(q-p)$$

для непрерывной функции $\varphi \ge 0$ следует соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y)\right)s(t,x,y)\sigma(dy) \ge$$
$$\ge 2\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_M \varphi(y)\big(q(t,x,y) - p(t,x,y)\big)\sigma(dy) = \frac{1}{3}\varphi(x)r(x),$$

откуда вытекает

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\alpha(t,x,y)q(t,x,y)\sigma(dy) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, функция α удовлетворяет уравнению (4) и начальному условию (5). Если теперь рассмотреть функцию

$$\beta(t,x,y) = \left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y) + \frac{k}{t}\right)p(t,x,y),$$

где k — некоторая положительная константа, то β удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\beta + \beta\left(Ric(x)(E,E)\big) - \frac{2}{t}(TE,E)\right) + p(t,x,y)f(t,x,y).$$

Здесь

$$f(t,x,y) = \frac{2}{t^2}a(x,y)\big((T(x)E,E) - 1\big) + \frac{k}{t^2}\big((T(x)E,E) - 1\big) +$$
$$+ \frac{1}{t^2}\left(k(TE,E) - \operatorname{tr}(T-I)^2\right) + \frac{\rho^2(x,y)}{t^2}Ric(x)\big(\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\big) -$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\alpha + (\operatorname{grad}\alpha, V(t,x,y)) + \alpha\big(Ric(x)(E,E)\big) - \frac{2}{t}(TE,E) - \\ - \frac{1}{t}(\operatorname{grad}\alpha, W) - \sum_k \left\|\nabla_{Z_k} W\right\|^2, \qquad E = \frac{W}{\|W\|}. \tag{4}$$

Используя теорему 1, можно получить и начальное условие для $\alpha(t, x, y)$. Функции

$$p(t,x,y) \le q(t,x,y) \le \frac{q^2}{p}(t,x,y) \equiv s(t,x,y)$$

образуют возрастающую геометрическую прогрессию с одинаковыми начальными условиями на непрерывных функциях, причем $s(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta s + \left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y)\right)s.$$

С помощью замены (3) установим формулу

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\frac{a(x,y)}{t}p(t,x,y)\sigma(dy) = \lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\frac{a(x,y)}{t}q(t,x,y)\sigma(dy) = \frac{1}{3}\varphi(x)r(x),$$

где $r(x)$ — скалярная кривизна, а из неравенства

$$s - p > 2(q - p)$$

для непрерывной функции $\varphi \ge 0$ следует соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y)\right)s(t,x,y)\sigma(dy) \ge \\ \ge 2\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_M \varphi(y)\big(q(t,x,y) - p(t,x,y)\big)\sigma(dy) = \frac{1}{3}\varphi(x)r(x),$$

откуда вытекает

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M \varphi(y)\alpha(t,x,y)q(t,x,y)\sigma(dy) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, функция α удовлетворяет уравнению (4) и начальному условию (5). Если теперь рассмотреть функцию

$$\beta(t,x,y) = \left(\frac{a(x,y)}{t} - \alpha(t,x,y) + \frac{k}{t}\right)p(t,x,y),$$

где k — некоторая положительная константа, то β удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\beta + \beta\left(Ric(x)(E,E)) - \frac{2}{t}(TE,E)\right) + p(t,x,y)f(t,x,y).$$

Здесь

$$f(t,x,y) = \frac{2}{t^2}a(x,y)\big((T(x)E,E) - 1\big) + \frac{k}{t^2}\big((T(x)E,E) - 1\big) + \\ + \frac{1}{t^2}\left(k(TE,E) - \operatorname{tr}(T-I)^2\right) + \frac{\rho^2(x,y)}{t^2}Ric(x)\big(\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)\big) -$$

$$-\frac{1}{t}\left[(1+k)Ric(x)(E, E)+\frac{1}{2}\Delta a(x, y)\right]+\sum_k \left\| \nabla_{Z_k} W(t, x, y)\right\|^2.$$

Первые два слагаемых в f неотрицательны в силу неравенства $(TE, E) \geq 1$. Поскольку

$$\operatorname{tr}\left(T(\rho)-I\right)^2 \leq a^2(x, y) < c,$$

то выбор достаточно большого k гарантирует положительность третьего слагаемого, а также положительность при малых t ($t < t_0$, где t_0 можно выбрать не зависящим от x, y) разности

$$\frac{1}{t^2}\left(k(TE, E)-\operatorname{tr}(T-I)^2\right)-\frac{1}{t}\left[(1+k)\,Ric(x)(E, E)+\frac{1}{2}\Delta a(x, y)\right],$$

так как $\Delta a(x, y)$ ограничен.

Из полученного уравнения следует неотрицательность функции $\beta(t, x, y)$ для $t < t_0$, откуда, в свою очередь, и следует утверждение теоремы.

1. *Cheng S. Y., Li P., Yau S. T.* On the upper estimate of the heat Kernel of a complete Riemannian manifold // Amer. J. Math. – 1981. – **103,** № 5. – P. 1021–1063.
2. *Cheeger .I, Yau S. T.* A lower bound for the heat Kernel // Communs Pure and Appl. Math. – 1981. – **34**.. – P. 465–480.
3. *Григорьян А. А.* О фундаментальном решении уравнения теплопроводности на произвольном римановом многообразии // Мат. заметки. – 1987. – **41,** № 5. – С. 687–692.
4. *Davies E. B.* The state of the art for heat Kernel bounds on negatively curved manifolds // Bull. London Math. Soc. – 1993. – **25.** – P. 289–292.
5. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, 1971. – 343 с.
6. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50,** № 6. – С. 755–764.

Получено 24.12.96