УДК 517. 9

И. А. Джалладова (Киев. нац. экон. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We investigate a system of linear differential equations with random coefficients which depend on the periodic Markov process.

Досліджується система лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами, що залежать від періодичного марковського процесу.

Асимптотические методы являются очень эффективными при решении многих задач теории нелинейных колебаний. Их создание и развитие связано с именами Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Н. М. Крылова, А. М. Самойленко [1 – 3] и др. Для исследования стохастических систем асимптотические методы применялись во многих работах (см., например, [4 – 8]). В данной работе развивается метод, предложенный в работах [9, 10].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \mu A(t,\xi(t))\,X(t,\mu), \qquad \dim X(t,\mu) = m. \tag{1}$$

В общем случае предполагаем, что:

1) $\xi(t)$ — периодический случайный процесс с плотностями вероятности

$$f_1(t,\xi),\ \ f_2(\xi,\xi_1,t,t_1),\ \ldots,\ \ f_k(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},t,\ldots,t_{m-1}),$$
$$t \ge t_1 \ge t_2 \ge \ldots \ge t_{m-1};$$

2) функция $A(t,\xi(t))$ ограничена и интегрируема по t;

3) μ — малый параметр.

В частном случае предполагаем, что:

1) $\xi(t)$ — случайный марковский процесс, принимающий конечное число состояний θ_i, $i = 1,\ldots,n$, с вероятностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \vartheta_k\}, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\,p_s(t), \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_{ks}(t)$ интегрируемы, ограничены и удовлетворяют условиям [11]

$$a_{ks}(t) \ge 0, \quad k \ne s, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ks}(t) = 0, \quad k,s = 1,\ldots,n;$$

2) частные значения матрицы $A_k(t) = A(t,\theta_k)$ являются ограниченными интегрируемыми периодическими с периодом 2π функциями.

Решение $X(t) = 0$ системы уравнений (1) называем p-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при фиксированном μ и $t \ge t_0$

$$|X_0(t_0)| < \delta, \quad M(X(t,t_0,\xi(t),X_0))^p < \varepsilon,$$

и асимптотически p-устойчивым, если оно p-устойчиво и

$$M(X(t,t_0,\xi(t),X_0))^p \to 0, \quad t \to \infty.$$

Асимптотическую устойчивость при $p = 2$ называем устойчивостью в среднем квадратичном.

Ставится задача построения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. стационарной системы, устойчивость решений которой эквивалентна p-устойчивости решений системы (1). При этом используем обозначения: $M(t,\mu) = \langle X(t,\mu) \rangle$ — математическое ожидание случайного решения $X(t,\mu)$ системы уравнений (1); $[R(t)] = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\,dt$ — операция усреднения во времени; $\mathring{A}(t,\xi(t)) = A(t,\xi(t)) - M(A(t,\xi(t)))$ — центрируемая случайная функция.

2. Алгоритм построения стационарной системы уравнений для системы уравнений (1).

Шаг 1. Система уравнений (1) сводится к детерминированной системе уравнений для математического ожидания случайного решения.

Ищем решение системы уравнений (1) в виде ряда

$$X(t,\mu) = M(t,\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, T_k(t,\xi(t))\, M(t,\mu), \tag{3}$$

$$M(t,\mu) = \langle X(t,\mu) \rangle,$$

где $M(t,\mu)$ удовлетворяет детерминированной системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, R_k(t)\, M(t,\mu), \tag{4}$$

существование которой вытекает из теорем 2, 3 [12].

Подставляя разложение (3) в систему (1) и учитывая (4), имеем

$$\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, T_k(t,\xi(t)) \right) \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, R_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dT_k(t,\xi(t))}{dt} =$$

$$= \mu A(t,\xi(t)) \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, T_k(t,\xi(t)) \right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получаем систему матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dT_1(t,\xi(t))}{dt} + R_1(t) = A(t,\xi(t)),$$

$$\frac{dT_k(t,\xi(t))}{dt} + R_k(t) + \sum_{s=1}^{k-1} T_s(t,\xi(t))\, R_{k-s}(t) = A(t,\xi(t))\, T_{k-1}(t,\xi(t)),$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$

Предполагая выполнение условий

$$\langle T_k(t,\xi(t)) \rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

находим уравнение для определения детерминированных матриц

$$R_1(t) = \langle A(t,\xi(t))) \rangle,$$

$$R_k(t) = \langle A(t,\xi(t))\, T_{k-1}(t,\xi(t)) \rangle, \quad k = 2, 3. \tag{5}$$

Матрицы $T_k(t,\xi(t))$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем из бесконечной системы уравнений

$$\frac{dT_1(t,\xi(t))}{dt} = A(t,\xi(t)) - \langle A(t,\xi(t))\rangle,$$

$$\frac{dT_k(t,\xi(t))}{dt} + \sum_{s=1}^{k-1} T_s(t,\xi(t))\,R_{k-s}(t) = \tag{6}$$

$$= A(t,\xi(t))\,T_{k-1}(t,\xi(t)) - \langle A(t,\xi(t))\,T_{k-1}(t,\xi(t))\rangle, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Из первого уравнения системы (6) находим матрицу $T_1(t,\xi(t))$:

$$T_1(t,\xi(t)) = \int_0^t (A(t_1,\xi(t_1)) - R_1(t_1))\,dt_1,$$

затем находим матрицу $R_2(t)$:

$$R_2(t) = \left\langle A(t,\xi(t)) \int_0^t (A(t_1,\xi(t_1)) - R_1(t_1))\,dt_1 \right\rangle =$$

$$= \int_0^t \left\langle \mathring{A}(t,\xi(t))\,\mathring{A}(\tau,\xi(\tau)) \right\rangle d\tau.$$

Таким образом нахождение матриц $R_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, сводится к интегрированию известных центрируемых функций, для вычисления которых необходимо знать многомерные плотности распределения.

В частности, в явном виде имеем

$$R_1(t) = \int_0^t f_1(t,\xi(t))\,A(t,\xi(t))\,dt,$$

$$R_2(t) = \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi,\xi_1,t,t_1)\,A(t,\xi)\,A(t_1,\xi_1)\,d\xi\,d\xi_1 - \int_0^t R_1(t)\,R_2(t_1)\,dt_1. \tag{7}$$

Шаг 2. Детерминированная система уравнений (3) сводится к стационарной системе.

Ищем решение системы (2) в виде

$$M(t,\mu) = Z(t,\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\,\Phi_k(t)\,Z(t,\mu), \tag{8}$$

где матрица $Z(t,\mu)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dZ(t,\mu)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k Q_k\,Z(t,\mu), \quad Q_k = \text{const}. \tag{9}$$

Подставляя правые части соотношений (8), (9) в уравнение (3), получаем бесконечную систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + Q_1 = R_1(t),$$

$$\frac{d\Phi_k}{dt} + Q_k + \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l(t)\,Q_{k-l} = R_1(t)\Phi_{k-1}(t), \qquad k = 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

После усреднения по времени при условии $[\Phi_k(t)] = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, из системы (10) находим соотношения для вычисления матриц Q_k, $k = 1, 2, \ldots$:

$$Q_1 = \left[R_1(t) \right],$$

$$Q_k = \left[R_k(t) \right] + \left[\sum_{l=1}^{k-1} R_l(t)\, \Phi_{l-k}(t) \right], \qquad k = 2, 3, \ldots . \tag{11}$$

Матрицы $\Phi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, можно искать из рекуррентных соотношений

$$\Phi_k(t) = \int_0^t \left(R_k(\tau) - \left[R_k(\tau) \right] \right) d\tau + \int_0^t R_k(\tau)\, \Phi_{k-1}(\tau)\, d\tau .$$

Шаг 3. Получение системы (9) в частном случае.

Пусть известна фундаментальная матрица $\Phi(t, \tau)$ решений системы уравнений (2), нормированная при $t = \tau$. Если $\varphi_{ks}(t, \tau)$, $k, s = 1, 2, \ldots, n$, — элементы матрицы, то

$$p_k(t) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{ks}(t, \tau)\, p_s(t), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Элементы $\varphi_{ks}(t, \tau)$, $k, s = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $\Phi(t, \tau)$ можно рассматривать как условные вероятности перехода из s-го состояния в k-е:

$$\varphi_{ks}(t, \tau) = P\{ \xi(t) = \theta_k \mid \xi(\tau) = \theta_s \}.$$

В этом случае подынтегральные выражения в формулах (7) при $t \geq t_1 \geq \ldots \geq t_s$ можно вычислить следующим образом:

$$\langle A(t, \xi(t))\, A(t_1, \xi(t_1)) \ldots A(t_s, \xi(t_s)) \rangle =$$

$$= \sum_{k, k_1, \ldots, k_s = 1}^{n} \varphi_{kk_1}(t, t_1)\, \varphi_{k_1 k_2}(t_1, t_2) \ldots \varphi_{k_{s-1} k_s}(t_{s-1}, t_s) \times$$

$$\times\, p_{ks}(t)\, A(t_1, \theta_{k_1})\, A(t_2, \theta_{k_2}) \ldots A(t_s, \theta_{k_s}). \tag{12}$$

В скалярном случае для функции $a(t, \xi(t))$, принимающей значения $a_k(t) = a(t, \theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, формула (12) принимает вид

$$\langle a(t, \xi(t))\, a(t_1, \xi(t_1)) \ldots a(t_s, \xi(t_s)) \rangle = C A(t) \Phi(t, t_1)\, A(t_1)\, \Phi(t_1, t_2) \ldots A(t_s)\, p(t_s),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_n(t) \end{pmatrix}, \qquad C = (1, 1, \ldots, 1). \tag{13}$$

Полученные формулы громоздки, однако вычисление с их помощью не вызывает трудностей. Для аналитических исследований на практике бывает достаточно оставить в рядах (3), (9) два члена. Так, система уравнений

$$\frac{dX(t, \mu)}{dt} = \left[\mu A_1(t, \xi(t)) + \mu^2 A_2(t, \xi(t)) \right] X(t, \mu) + o(\mu^3) \tag{14}$$

в соответствии с предложенным алгоритмом может быть сведена к системе уравнений вида (9):

$$\frac{dZ(t, \mu)}{dt} = \left[\mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + o(\mu^3) \right] Z(t, \mu), \tag{15}$$

где

$$Q_1 = \left[\left\langle A_1(t, \xi(t)) \right\rangle \right], \quad Q_2 = \left[\int_0^t \left\langle \mathring{A}_1(t, \xi(t))\, \mathring{A}_2(\tau, \xi(\tau)) \right\rangle d\tau + \left\langle A_2(t, \xi(t)) \right\rangle \right].$$

Замечание. Как известно [13], для устойчивости решений системы типа (15) достаточно, чтобы все характеристические числа матрицы с вероятностями p_1, p_2, удовлетворяющими системе уравнений

$$\dot{p}_1 = -\nu p_1 + \nu p_2, \qquad \dot{p}_2 = \nu p_1 - \nu p_2. \tag{20}$$

Построим в этом случае систему уравнений (15). Для этого сначала вычислим матрицы $R_1(t)$, $R_2(t)$ по формулам (7) с учетом (13):

$$R_1(t) = \langle a(t,\xi(t))\rangle \frac{1}{\omega} C(t),$$

$$R_2(t) = \frac{1}{\omega^2} C(t) \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 0 \\ -(\beta_2(t)+\beta_3(t))/2 & (\beta_2(t)-\beta_3(t))/2 \\ 0 & -\beta_1(t) \end{pmatrix} + \beta D(t), \tag{21}$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & 2\sin^2 2\omega t & 0 \\ -\cos^2\omega t & 0 & \sin^2\omega t \\ 0 & -2\cos 2\omega t & -2\sin 2\omega t \end{pmatrix},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} -2\sin^2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ (1/2)\sin 2\omega t & -1 & (1/2)\sin 2\omega t \\ 0 & \sin 2\omega t & -2\cos^2\omega t \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \int_0^t \langle a(t,\xi(t))\, a(\tau,\xi(\tau))\rangle \sin 2\omega\tau\, d\tau,$$

$$\beta_2 = \int_0^t \langle a(t,\xi(t))\, a(\tau,\xi(\tau))\rangle\, d\tau, \tag{22}$$

$$\beta_3 = \int_0^t \langle a(t,\xi(t))\, a(\tau,\xi(\tau))\rangle \cos 2\omega\beta\tau\, d\tau.$$

По формулам (22) с учетом того, что

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+e^{-2\nu t}}{2} & \dfrac{1-e^{-2\nu t}}{2} \\ \dfrac{1-e^{-2\nu t}}{2} & \dfrac{1+e^{-2\nu t}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \langle a(t,\xi(t))\rangle = \alpha,$$

$$\langle a(t,\xi(t))\, a(\tau,\xi(\tau))\rangle = \cos 2\omega t \cos 2\omega\tau\, e^{-2\nu(t-\tau)},$$

имеем

$$\beta_1 = (1/2)\cos 2\omega t \left[\frac{2\nu\sin 4\omega t - 4\omega\cos 4\omega t}{4(\nu^2+4\omega^2)} + \frac{\omega e^{-2\nu t}}{\nu^2+4\omega^2}\right],$$

$$\beta_2 = \frac{\nu(1+\cos 4\omega t) + \omega\sin 4\omega t}{4(\nu^2+\omega^2)} + \frac{2\nu e^{-2\nu t}\cos 2\omega t}{4(\nu^2+\omega^2)},$$

$$\beta_3 = (1/2)\cos 2\omega t \left(\frac{1}{2\nu} - \frac{e^{-2\nu t}}{2\nu}\right) +$$

$$+ (1/2)\cos 2\omega t \left[\frac{2\nu\cos 4\omega t + 4\omega\sin 4\omega t}{4(\nu^2+4\omega^2)} - \frac{2\nu e^{-2\nu t}}{4(\nu^2+4\omega^2)}\right].$$

По формулам (11) с учетом (21) получаем

$$G(\mu) = \mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + o(\mu^3)$$

имели отрицательные вещественные части независимо от членов порядка μ^3.

3. Применение алгоритма к исследованию стохастического уравнения типа Матье. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка со случайными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2\beta\frac{dy}{dt} + \left(\omega^2 + \mu a(t, \xi(t))\right)y = 0, \tag{16}$$

где $a(t, \xi(t))$ — случайная периодическая функция, $\xi(t)$ — марковский процесс, принимающий два состояния θ_1, θ_2 с вероятностями p_1, p_2, удовлетворяющими системе уравнений (2) при $n = 2$.

Решение уравнения (16) при $\mu = 0$ можно записать в виде

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \tag{17}$$

Это уравнение служит отправным пунктом для метода малого параметра [14], идея которого применяется ниже. При малом $\mu \neq 0$ периодическое решение уравнения (16) сохраняет такой же вид, как и решение (17), если рассматривать A и B как медленно изменяющиеся функции времени. Определим их так, чтобы решения (17) были решениями системы уравнений

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -\left(\omega^2 + \mu a(t, \xi(t))\right)y_1 - \mu^2\beta y_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A' &= \mu\frac{a(t, \xi(t))}{\omega}\left[A\sin\omega t\cos\omega t + B\sin^2\omega t\right] + \\ &\quad + \mu^2\beta\left[-A\sin^2\omega t + B\sin\omega t\cos\omega t\right], \\ B' &= -\mu\frac{a(t, \xi(t))}{\omega}\left[A\cos^2\omega t + B\sin\omega t\cos\omega t\right] + \\ &\quad + \mu^2\beta\left[A\sin\omega t\cos\omega t - B\cos^2\omega t\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Для исследования устойчивости решений уравнения (16) в среднем квадратичном положим

$$u = A^2, \quad v = AB, \quad w = B^2.$$

После дифференцирования получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left[\mu A_1(t, \xi(t)) + \mu^2 A_2(t, \xi(t))\right]\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

$$A_1(t, \xi(t)) = \frac{a(t, \xi(t))}{\omega}\begin{pmatrix} \sin 2\omega t & 2\sin^2 2\omega t & 0 \\ -\cos^2\omega t & 0 & \sin^2\omega t \\ 0 & -2\cos\omega t & -\sin 2\omega t \end{pmatrix},$$

$$A_2(t, \xi(t)) = \beta\begin{pmatrix} -2\sin^2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ (1/2)\sin 2\omega t & -1 & (1/2)\sin 2\omega t \\ 0 & \sin 2\omega t & -2\cos^2\omega t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, систему уравнений (18) свели к системе уравнений вида (14).

Пример. Исследуем устойчивость в среднем квадратичном решения уравнения (16) в случае, когда величина $a(t, \xi(t))$ принимает два значения

$$a(t, \xi(t)) = \begin{cases} \alpha + \cos 2\omega t, & \xi(t) = \theta_1, \\ \alpha - \cos 2\omega t, & \xi(t) = \theta_2, \end{cases} \tag{19}$$

$$Q_1 = \frac{\alpha}{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 3a+b+d & -2c & a+b+d \\ c & 2a+2b-2d & -c \\ a+b+d & 2c & 3a+b-d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{\nu}{\omega^2 32(\nu^2+4\omega^2)}, \quad b = \frac{\nu}{16\nu^2\omega^2},$$

$$c = \frac{1}{\omega 16(\nu^2+4\omega^2)}, \quad d = \frac{\nu}{\omega^2 8(\nu^2+\omega^2)}.$$

Принимая во внимание замечание и условия (19), (20), получаем условия устойчивости в среднем квадратичном решения уравнения (16):

$$\frac{\nu}{\omega^2}\left[\frac{1}{2\nu^2}+\frac{1}{2(\nu^2+4\omega^2)}-\frac{2}{\nu^2+\omega^2}\right] < 8\beta + o(\mu),$$

$$\left|\frac{\mu\alpha}{\omega}-\frac{\mu^2}{8\omega(\nu^2+4\omega^2)}\right| >$$

$$> \mu^2\sqrt{\frac{1}{(16\nu\omega^2)^2}-\left(\beta-\frac{1}{16\nu\omega^2}+\frac{\nu}{4\omega^2(\nu^2+\omega^2)}-\frac{\nu}{16\omega^2(\nu^2+4\omega^2)}\right)^2}.$$

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 503 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
3. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: АН УССР, 1937. – 363 с.
4. *Анисимов В. В.* Асимптотические методы анализа стохастических систем. – Тбилиси: Мецниереба, 1984. – 178 с.
5. *Коломиец В. Г., Притула Н. Н.* Асимптотические методы в исследовании случайных колебаний в некоторых системах с распределенными параметрами и последействием. – Киев: 1985. – 51 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.33).
6. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
7. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
8. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 418 с.
9. *Алексеев В. М., Валеев К. Г.* Исследование колебаний линейной системы со случайными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – **14**, №12. – С. 1811–1815.
10. *Валеев К. Г., Якубов М. Я.* Исследование сходимости асимптотического метода для системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. – Самарканд, 1990. – 15 с. – Деп. в УзНИИТИ, №1347.
11. *Тихонов В. И., Миронов М. И.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
12. *Валеев К. Г., Джалладова И. А.* Об одном обобщении метода усреднения // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №7. – С. 906 – 911.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 471 с.
14. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771 с.

Получено 25.03.98