УДК 515.1

С. І. Максименко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ, У ЯКИХ $\pi_2 = 0$

We consider a certain construction over topological spaces and its influence on the group π_2.

Розглядається деяка конструкція над топологічними просторами та її вплив на групу π_2.

1. Основний результат. Нехай X та A — довільні зв'язні (не обов'язково лінійно зв'язні) топологічні простори. Розглянемо циліндр $A \times [-1, 1]$ і зафіксуємо деякі відображення його основ в X: $f^+ : A \times \{+1\} \to X$ та $f^- : A \times \times \{-1\} \to X$. Позначимо через Y простір, отриманий приклеєнням $A \times [-1, 1]$ до X за цими відображеннями.

Нагадаємо, що для кожного відображення $f : A \to X$ визначено його *циліндр* — простір отриманий приклеєнням підмножини $A \times 1 \subset A \times [0, 1]$ до X за відображенням f. Ототожнимо A з підмножиною $A \times 0 \subset C_f$ і для кожного $n > 1$ покладемо $\pi_n(f, a) = 0$. Умовимось також, що записи $\pi_n A = 0$, $\pi_n(Z, A) = 0$, $\pi_n(f) = 0$ означатимуть тривіальність вказаних груп у всіх точках із A.

Теорема. *Якщо* $\pi_2(f^+) = \pi_2(f^-) = 0$, *то* $\pi_2(Y, X) = 0$.

З точної послідовності гомотопічних груп пари (X, Y): $\pi_2 X \to \pi_2 Y \to \to \pi_2(Y, X)$ отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо в умовах теореми додатково* $\pi_2 X = 0$, *то* $\pi_2 Y = 0$.

2. Тривимірні многовиди з $\pi_2 = 0$. З теореми випливає один спосіб конструювання 3-многовидів з групою $\pi_2 = 0$. При цьому інші гомотопічні групи отриманого многовиду не обов'язково повинні бути тривіальними.

Нагадаємо, що *лінком* в 3-сфері S^3 називається PL-вкладення в S^3 незв'язного об'єднання скінченного числа кіл, образи яких називають компонентами лінка. Кажуть, що лінк $L \subset S^3$ *розпадається,* якщо в S^3 знайдуться такі два замкнені 3-диски D_1 та D_2, що $L \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ і $L \cap \cap D_1 \neq \varnothing \neq L \cap D_2$. Нехай N — регулярний окіл лінка L з $n > 1$ компонентами в S^3, $X = \overline{S^3 \setminus N}$. Зрозуміло, що компоненти ∂X є 2-торами. Нехай $T_1, \ldots, T_n$ — компоненти ∂X, $i_k : T_k \subset X$, $k = 1, \ldots, n$, — відповідні вкладення. З того, що ∂X має комір в X, випливає $\pi_2(X, T_k) = \pi_2(i_k)$. Відмітимо, що X є сильним деформаційним ретрактом $S^3 \setminus L$.

Твердження 1. *Наступні умови еквівалентні*:

1) L *не розпадається;*

2) $\pi_2(S^3 \setminus L) = \pi_2(X) = 0$;

3) *для всіх* $k = 1, \ldots, n$ $\pi_2(X, T_k) = \pi_2(i_k) = 0$.

Доведення. 1) $\leftrightarrow$ 2) за теоремою 27.1 з [1].

3) $\to$ 2). Це випливає з точної послідовності пари $(X, \partial X)$ і того факту, що $\pi_2(\partial X) = 0$.

1), 2) $\to$ 3). Припустимо, що $\pi_2(X) = 0$, але для деякого k $\pi_2(X, T_k) \neq 0$. Звідси випливає, що гомоморфізм $\pi_1(T_k) \to \pi_1(X)$ має нетривіальне ядро, а тому за відомою лемою Дена [1] в X існує такий 2-диск B, що $\partial B \subset T_k$. Це означає, що компонента C_k лінка L незчеплена з іншими, а отже, L розпадається. Отримали суперечність. Твердження доведено.

Нехай тепер $m > 0$ таке, що $2m \le n$. Для кожного $k = 1, \ldots, m$ зафіксуємо деякий гомеоморфізм $f_k\colon T_{2k-1} \to T_{2k}$ і ототожнимо T_{2k-1} та T_{2k} в X за допомогою f_k. Позначимо отриманий многовид через Y. З твердження 1 та теореми випливає таке твердження.

Твердження 2. *Якщо L не розпадається, то $\pi_2(Y) = 0$.*

3. Доведення теореми 1. Метод доведення є певним удосконаленням так званого методу усунення зайвих прообразів [2, с 44].

Нехай $f\colon (D^2, S^1) \to (Y, X)$ — неперервне відображення. Покажемо, що як відображення пар воно гомотопне відображенню в X. Ототожнимо $A \times (-1, 1)$ з підмножиною в Y і нехай p_A та p_I — проекції $A \times (-1, 1)$ на A та $(-1, 1)$ відповідно. Покладемо $U^\delta(t) = [t - \delta, t + \delta]$. Візьмемо довільне $\tau \in (-1, 1)$. Оскільки X, очевидно, є сильним деформаційним ретрактом $Y \backslash (A \times \tau)$, для доведення теореми досить показати, що f гомотопне відображенню, образ якого не перетинається з $A \times \tau$. Отже, нехай $f(D^2) \cap A \times \tau \neq \varnothing$.

Твердження 3. *Існує таке відображення $g\colon (D^2, S^1) \to (Y, X)$, гомотопне f відносно S^1, що для деякого $\varepsilon > 0$ та відкритого околу W множини $V = A \times U^\varepsilon(\tau)$ в $A \times (-1, 1)$ обмеження $v = p_I \circ g|_{g^{-1}(W)}\colon g^{-1}(W) \to (-1, 1)$ відображення $p_I \circ g$ на $g^{-1}(W)$ є гладким відображенням класу C^∞, причому кожне $t \in U^\varepsilon(\tau)$ є регулярним значенням цього відображення.*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, щоб $U^{2\varepsilon}(\tau) \subset (-1, 1)$. Нехай $V_1 = A \times U^\varepsilon(\tau)$, $V_2 = A \times U^{2\varepsilon}(\tau)$ і $K_i = f^{-1}(V_i)$, $i = 1, 2$. Зрозуміло, що $K_i \subset \operatorname{int} D^2$, $i = 1, 2$. Покладемо $u = p_I \circ f|_{K_2}\colon K_2 \to U^{2\varepsilon}(\tau)$. Обмеження u на K_1 є відображенням компактної підмножини многовиду $\operatorname{int} K_2$, тому існує таке $v\colon K_2 \to U^{2\varepsilon}(\tau)$, гомотопне u відносно ∂K_2, що

1) $v^{-1}(U^\varepsilon(\tau)) \subset f^{-1}(\operatorname{int} W_2) \subset \operatorname{int} K_2$;

2) обмеження u на множину $f^{-1}(\operatorname{int} W_2)$ є гладким відображенням класу C^∞, і кожне $t \in U^\varepsilon(\tau)$ є регулярним значенням v.

Нехай $F\colon K_2 \times I \to U^{2\varepsilon}(\tau)$ — гомотопія відносно ∂K_2, для якої $F_0 = u$, $F_1 = u$. Задамо гомотопію $G\colon (D^2, S^1) \times I \to (Y, X)$ формулою

$$G(x, t) = \begin{cases} f(x), & x \in D^2 \setminus \operatorname{int} K_2; \\ (p_A \circ f(x),\ F(x, t)), & x \in K_2. \end{cases}$$

Легко перевірити, що це відображення неперервне і є деформацією пар. Покладемо $g = G_1$. Тоді g є шуканим відображенням. Твердження доведено.

З умови 2 випливає, що для всіх $t \in U^\varepsilon(\tau)$ і, зокрема, для $\tau \in U^\varepsilon(\tau)$ множина $(p_I \circ g)^{-1}(\tau)$ є правильним компактним підмноговидом корозмірності 1 відкритого 2-многовиду $\operatorname{int} D^2$, а отже, це незв'язне об'єднання скінченного числа, наприклад, r кіл. Якщо $r = 0$, то $g(D^2)$ не перетинається з $A \times \tau$ і в цьому випадку теорему доведено. Припустимо, що $r > 0$. Ми покажемо, що існує відображення $h\colon (D^2, S^1) \to (Y, X)$, яке для деякого іншого $\tau' \in (-1, 1)$ задовольняє умови твердження 3 і для якого множина $(p_I \circ h)^{-1}(\tau)$ складається вже з $r - 1$ кола. За індукцією, це і доведе теорему.

Отже, нехай $C_1, \ldots, C_r \subset \operatorname{int} D^2$ — кола, що складають $(p_I \circ g)^{-1}(\tau)$ і $N = g^{-1}(A \times [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon])$. Тоді N — компактний підмноговид в D^2, що має рівно r компонент. Позначимо їх через $N_1, \ldots, N_r$ так, щоб $C_i \subset N_i$ при $i = 1, \ldots, r$ і нехай

$$N_i^- = N_i \cap g^{-1}(A \times [\tau - \varepsilon, \tau]),$$

$$N_i^+ = N_i \cap g^{-1}(A \times [\tau, \tau + \varepsilon]).$$

За теоремою Жордана – Шонфліса [3] кожне коло C_i розбиває D^2 на дві компоненти і є їх спільною межею. Крім цього замикання внутрішньої компоненти гомеоморфне замкненому 2-диску. Позначимо це замикання через B_i, а замикання іншої компоненти — через Q_i. Зрозуміло,що одна з множин N_i^- чи N_i^+ цілком міститься в B_i, а друга — в Q_i, і при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, диски B_i та B_j або не перетинаються, або один з них міститься у внутрішності іншого. Оскільки дисків скінченна кількість, то знайдеться хоча б один диск B_i, що не містить інших B_k при $k \neq i$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що таким диском є B_r і $N_r^+ \subset B_r$. Тоді $N_r^- \subset Q_r$ і $g(C_r) \subset A \times \tau$. Покажемо, що

$$g(B_r) \subset T = Y \backslash (A \times [\tau - \varepsilon, \tau]) = A \times [-1, \tau - \varepsilon] \bigcup_{f^-} X \bigcup_{f^+} A \times [\tau, 1]. \quad (1)$$

Дійсно, за означенням N_r^+ маємо $g(N_r^+) \subset A \times [\tau, \tau + \varepsilon] \subset T$. Далі, внаслідок вибору B_r маємо $B_r \cap N = N_r^+$, тому

$$g(B_r \backslash N_r^+) = g(B_r \backslash N) = g(B_r \backslash g^{-1}(A \times U^{\varepsilon}(\tau))) \subset Y \backslash (A \times U^{\varepsilon}(\tau)) \subset T$$

і (1) доведено. Таким чином, обмеження $g|B_r$ є відображенням пар $(B_r, C_r) \to (T, A \times \tau)$, а отже, і представником деякого елемента групи $\pi_2(T, A \times \tau)$. Легко бачити, що остання група тривіальна. Дійсно, підмножина $L = A \times [\tau, 1] \bigcup_{f^+} X \subset T$, очевидно, гомеоморфна циліндру відображення f^+ і є сильним деформаційним ретрактом T, тому за умовою теореми отримуємо $\pi_2(T, A \times \tau) = \pi_2(L, A \times \tau) = \pi_2(f^+) = 0$.

Таким чином, $g|B_r$ гомотопне відображенню в $A \times \tau$, а оскільки пара (B_r, C_r) задовольняє аксіому розповсюдження гомотопії [4], то цю гомотопію можна вибрати гомотопією відносно C_r. Звідси випливає, що вона продовжується до нерухомої на Q_r гомотопії всього диска D^2 і, отже, є (оскільки $S^1 \subset Q_r$) гомотопією пари (D^2, S^1). Позначимо кінцеве відображення цього продовження через h. Ми отримали відображення $h: (D^2, S^1) \to (Y, X)$, яке гомотопне g відносно Q_r, і $h(B_r) \subset A \times \tau$.

Нехай $\tau' \in (\tau, \tau + \varepsilon)$ і $\varepsilon' > 0$ таке, що $U^{\varepsilon'}(\tau') \subset (\tau, \tau + \varepsilon)$. Легко перевірити, що h є шуканим відображенням: h задовольняє умови твердження 3 і, крім цього, $(p_I \circ h)^{-1}(\tau')$ складається з $r - 1$ кола. Теорему доведено.

1. *Papakyriakopoulos C. D.* On Dehn's lemma and asphericity of knots // Ann Math. – 1957. – **66**. – P. 1–26.
2. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 301 с.
3. *Brown M.* A proof of generalized Shönflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. – 1960. – **66**.
4. *Ху Сы-Цзян.* Теория гомотопий. – М.: Мир, 1964. – 468 с.

Одержано 15.04.98