УДК 517.5

М. Ш. Шабозов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We consider the problem of reconstruction of solution of the Dirichlet boundary-value problem for a biharmonic equation on the basis of known information about a boundary function. The obtained estimates of reconstruction error are unimprovable in some cases.

Розглядається задача відновлення розв'язку крайової задачі Діріхле для бігармонійного рівняння за відомою інформацією про граничну функцію. Одержані оцінки похибки відновлення в деяких випадках не можна покращити.

Решения задачи восстановления приводятся в двух случаях, когда известна информация:

1) о граничной функции в виде первых $2n-1$ коэффициентов Фурье;

2) в виде средних значений граничной функции на некоторых интервалах из области определения.

В первом случае в качестве аппарата восстановления используем тригонометрические полиномы, а во втором — сплайны первой степени. Полученные оценки погрешности восстановления решения краевой задачи в ряде случаев являются неулучшаемыми. Основная краевая задача Дирихле для бигармонического уравнения в единичном круге формулируется так: найти функцию $U = U(\rho, t)$, $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(\rho, t) = 0 \tag{1}$$

и двум граничным условиям

$$U(\rho, t)\Big|_{\rho=1} = g(t), \qquad \frac{\partial U(\rho, t)}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1} = 0. \tag{2}$$

Решение граничной задачи (1), (2) существует и задается сверткой [1 с. 395]

$$U(\rho, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-\tau) g(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le \rho < 1, \tag{3}$$

где ядро $K_\rho(t)$ имеет вид

$$K_\rho(t) = \frac{1}{2}(1-\rho^2)^2(1-\rho\cos t)(1-2\rho\cos t+\rho^2)^{-2}.$$

Функция $K_\rho(t)$ имеет следующее разложение в ряд Фурье:

$$K_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt.$$

Обозначим через L_p, $1 \le p \le \infty$, пространство суммируемых в p-й степени 2π-периодических функций $g(t)$ с нормой

$$\|g\|_p = \left(\int_0^{2\pi}|g(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

а через $C_{2\pi}$ (или L_∞) — пространство непрерывных функций $g(t)$ с нормой

$$\|g\|_\infty = \max_t |g(t)|.$$

© М. Ш. ШАБОЗОВ, 1998

Пусть $\mathfrak{M}_{2n-1}^{T}$ — множество тригонометрических полиномов вида

$$T_{n-1}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt \right)$$

порядка $n-1$. Тогда величина

$$E_n(g)_p = \inf \left\{ \| g - T_{n-1} \|_p : T_{n-1} \in \mathfrak{M}_{2n-1}^{T} \right\}$$

есть наилучшее приближение функции $g(t)$ множеством $\mathfrak{M}_{2n-1}^{T}$ в метрике L_p.

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [2].

Теорема 1. *Для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $\rho \in [0, 1)$ *справедливы равенства*

$$E_n(K_\rho)_1 = 4 \operatorname{arctg} \rho^n + 2(1-\rho^2) \frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}},$$

$$\sup_{\|g\|_p \le 1} E_n(U(\rho, \cdot))_p = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2) \frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \quad p = 1, \infty.$$

Найдем явный вид тригонометрического полинома $T_{n-1}(t) =: T_{n-1}(t, K_\rho)$, доставляющего наилучшее приближение функции $K_\rho(t)$ в метрике L_1, т. е. укажем явные выражения для его коэффициентов. Очевидно, что в силу четности ядра $K_\rho(t)$ полином $T_{n-1}(t)$ является четным

$$T_{n-1}(t) = \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \cos kt.$$

В [2] доказано, что этот полином является интерполяционным и интерполирует функцию $K_\rho(t)$ в нулях $\cos nt$.

Из условия интерполяции

$$K_\rho\left(\frac{2j-1}{2n} \pi \right) = T_{n-1}\left(\frac{2j-1}{2n} \pi \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

по известной схеме [3, с. 159] коэффициенты μ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, определяются однозначно:

$$\mu_0 = 1 + 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(1 + (1-\rho^2) sn \right)^{2sn} = 1 + \frac{2}{1+\rho^{2n}} - 2(1-\rho^2) \frac{n\rho^n}{(1+\rho^{2n})^2},$$

$$\mu_k = 1 + \frac{1}{2}(1-\rho^2) k\rho^k + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (\rho^{2sn+k} + \rho^{2sn-k}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\rho^2) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[(2sn+k)\rho^{2sn+k} + (2sn-k)\rho^{2sn-k} \right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(1-\rho^2) k\rho^k - \frac{\rho^{2n+k} + \rho^{2n-k}}{1+\rho^{2n}} - \frac{1}{2}(1-\rho^2) \left[(2n+k)\rho^{2n+k} + \right.$$

$$\left. + (2n-k)\rho^{2n-k} + k(\rho^{4n+k} - \rho^{4n-k} \right] (1+\rho^{2n})^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Эти коэффициенты нам потребуются при построении наилучшего линейного метода восстановления.

Рассмотрим задачу восстановления решения $U(\rho, t)$ задачи (1), (2) в случае, когда известны значения первых $2n-1$ коэффициентов Фурье $\{a_k\}_{k=0}^{n-1}$,

$\{b_k\}_{k=0}^{n-1}$ граничной функции $g(t)$. С помощью набора числовых коэффициентов $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$, находящихся в нашем распоряжении, решению $U(\rho, t)$ сопоставим тригонометрический полином

$$T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda, t) = \frac{a_0\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(a_k\cos kt + b_k\sin kt). \tag{5}$$

Таким образом, набором $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$ задается некоторый метод восстановления функции $U(\rho, t)$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$. Оптимальный выбор набора λ будет связан с ядром $K_\rho(t)$.

Очевидно, что полином (5) представим в виде

$$T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{n-1}^*(t-\tau, \lambda)g(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где

$$T_{n-1}^*(t, \lambda) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\cos kt.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для погрешности восстановления решения* $U(\rho, t)$ *задачи* (1), (2) *тригонометрическими полиномами вида* (5) *в метрике* L_p, $1 \le p \le \infty$, *справедлива оценка*

$$\sup_{\|g\|_p \le 1}\inf_\lambda \| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda)\|_p = \sup_{\|g\|_p \le 1}\| U(\rho, \cdot) -$$

$$- T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu)\|_p \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \quad 0 \le \rho < 1, \tag{7}$$

где набор коэффициентов $\mu = \{\mu_k\}_{k=0}^{n-1}$ *определен равенствами* (4). *Неравенство* (7) *неулучшаемо при* $p = 1, \infty$.

Доказательство. Используя равенство (3) и представление (6) полинома (5), запишем

$$U(\rho, t) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [K_\rho(t-\tau) -$$

$$- T_{n-1}^*(t-\tau, \lambda)]g(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [K_\rho(\tau) - T_{n-1}^*(\tau, \lambda)]g(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда, в силу общих неравенств для сверток [4, с. 71], имеем

$$\| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda)\|_p \le \frac{1}{\pi}\| K_\rho - T_{n-1}^*(\lambda)\|_1 \| g\|_p, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{8}$$

Неравенство (8) дает общую оценку погрешности восстановления решения задачи (1), (2) в метрике L_p, $1 \le p \le \infty$, полиномом (5) с произвольным набором коэффициентов $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$. Из (8) следует

$$\inf_\lambda \| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda)\|_p \le \frac{1}{\pi}\inf_\lambda \| K_\rho - T_{n-1}^*(\lambda)\|_1 \| g\|_p \tag{9}$$

Выберем коэффициенты $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$ так, чтобы правая часть (9) принимала наименьшее значение. Если полагать $\lambda = \mu$, т. е. $\lambda_k = \mu_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где μ_k определены равенствами (4), то полином $T^*_{n-1}(\lambda, t)$ тождественно совпадает с полиномом $T_{n-1}(K_\rho, t)$ наилучшего приближения для ядра $K_\rho(t)$. Поэтому из (9) имеем

$$\inf_\lambda \| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \lambda) \|_p = \| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu) \|_p \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} E_n(K_\rho)_1 \| g \|_p = \left\{ \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}} \right\} \| g \|_p. \tag{10}$$

Переходя в (10) к верхней грани по функциям $g \in L_p$ с нормой $\| g \|_p \le 1$, получаем (7). Неулучшаемость соотношения (7) при $p = 1, \infty$ вытекает из утверждения теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы 2 следует, что полином $T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu, t)$ является наилучшим линейным методом восстановления решения $U(\rho, t)$ задачи (1), (2) среди всех полиномов вида (5) при $p = 1, \infty$ и реализует наилучшее приближение $U(\rho, t)$ в соответствующих случаях. Использование полинома $T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu, t)$ позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Для наилучшего приближения решения $U(\rho, t)$ задачи (1), (2) в метрике L_p, $1 \le p \le \infty$, справедлива оценка*

$$E_n(U(\rho, \cdot))_p \le \left\{ \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}} \right\} E_n(g)_p, \quad 0 \le \rho < 1. \tag{11}$$

Существует функция $g_0(t) \in L_p$ с нормой $\| g_0 \|_p \le 1$, для которой в (11) при $p = 1, \infty$ имеет место знак равенства.

Доказательство. Пусть $T^0_{n-1}(t) \in \mathfrak{M}^T_{2n-1}$, а $T_{n-1}(t)$ — полином наилучшего приближения ядра $K_\rho(t)$ в метрике L_1. Тогда функция

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K_\rho(\tau) - T_{n-1}(\tau)]\, T^0_{n-1}(t-\tau) d\tau$$

принадлежит множеству $\mathfrak{M}^T_{2n-1}$. Из (3) и (6) следует

$$U(\rho, t) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu, t) - Q(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K_\rho(t-\tau) - T_{n-1}(t-\tau)]\; [g(\tau) - T^0_{n-1}(\tau)] d\tau. \tag{12}$$

Если полагать, что $T^0_{n-1}(t)$ является полиномом наилучшего приближения функции $g(t)$ в метрике L_p, $1 \le p \le \infty$, то из (12), в силу общих неравенств для сверток, вытекает

$$E_n(U(\rho, \cdot))_p \le \| U(\rho, \cdot) - T_{n-1}(U(\rho, \cdot), \mu) - Q \|_p \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} E_n(K_\rho)_1 \| g - T^0_{n-1} \|_p = \frac{1}{\pi} E_n(K_\rho) E_n(g)_p =$$

$$= \left\{ \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}} \right\} E_n(g)_p.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $p = 1, \infty$ в (11) знак равенства достигается для функции $g(t) = \operatorname{sgn} \sin nt$, откуда следует утверждение теоремы 3.

Рассмотрим еще один метод восстановления решения $U(\rho, t)$. Через H^1 обозначим класс функций $g(t)$, удовлетворяющих условию

$$| g(t') - g(t'') | \le | t' - t'' |.$$

Пусть

$$t_i = i\pi/n, \quad \tau_i = t_i - \pi/(2n), \qquad i = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и $s(t) = s(g, t)$ — периодический сплайн порядка 1 дефекта 1 по разбиению $\{t_i\}$, однозначно определяемый по функции $g(t) \in C_{2\pi}$ условиями

$$s(g, \tau_i) = \frac{\pi}{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(\tau) d\tau, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{13}$$

Свертке (3) сопоставим функцию

$$S(U(\rho, \cdot), t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} K_\rho(t - \tau) s(g, \tau) d\tau \tag{14}$$

и рассмотрим задачу вычисления точной верхней грани

$$\sup\left\{ | U(\rho, t) - S(U(\rho, \cdot), t) | : \ g \in H^1 \right\}. \tag{15}$$

В работе [5] величины, аналогичные (15), в частности, вычислены для свертки с ядром Пуассона. Этот же метод позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для восстановления решения* $U(\rho, t)$ *задачи* (1), (2) *методом (14) справедлива точная оценка*

$$\sup\left\{ | U(\rho, t) - S(U(\rho, \cdot), t) | : \ g \in H^1 \right\} =$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu-1}}{(2\nu-1)^2} \sin^2 \frac{2\nu-1}{4n}\pi + \frac{4}{\pi}(1-\rho^2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\rho^{2\nu-1}}{2\nu-1} \sin^2 \frac{2\nu-1}{4n}\pi.$$

Для сравнения заметим, что если сплайн $s(g, t)$ вместо (13) определить условиями $s(g, \tau_i) = g(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, то точная погрешность на классе H^1 такова [2]:

$$\sup\left\{ | U(\rho, t) - S(U(\rho, \cdot), t) | : \ g \in H^1 \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n(2\nu-1)}}{(2\nu-1)^2} + \frac{1}{\pi}(1-\rho^2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n(2\nu-1)}}{2\nu-1} =$$

$$= \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{\pi}(1-\rho^2) \ln \frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\rho \frac{1}{r} \ln \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}, \qquad 0 \le \rho < 1.$$

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Шабозов М. Ш.* Наилучшее и наилучшее одностороннее приближение ядра бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №11. – С. 1549–1557.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
5 *Корнейчук Н. П.* О приближении сверток периодических функций // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 76–80.

Получено 04.04.96