УДК 517.9

В. Н. Бобочко (Кировоград. пед. ун-т)

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

The uniform asymptotics of a solution of heterogeneous system of singularly perturbed differential equations is constructed in the case where a boundary operator cannot be diagonalized. The case is investigated where the spectrum of boundary operator contains an unstable element at the point $x = 0$.

Побудовано рівномірну асимптотику розв'язку неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь у випадку, коли граничний оператор не можна діагоналізувати. Досліджується випадок, коли спектр граничного оператора містить нестабільний елемент у точці $x = 0$.

1. Введение. Рассмотрим векторное уравнение

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - \mathbf{A} Y(x, \varepsilon) = 0\tilde{h}(x) \tag{1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0; a]$.

Здесь $\mathbf{A}$ — линейный оператор, заданный в R^n, $Y(x, \varepsilon)$ — искомая вектор-функция, $\tilde{h}(x)$ — заданная вектор-функция.

Известно, что структура векторного уравнения (1) однозначно определяется спектром предельного оператора $\mathbf{A}$. Если спектр оператора $\mathbf{A}$ простой, то структура решения уравнения (1) изучена достаточно хорошо (см. [1 – 4]). Если же оператор $\mathbf{A}$ недиагонализируемый, то фундаментальная система решений (ф. с. р.) уравнения (1) тоже хорошо изучена (см., например, [1, 3]). Во всех этих работах асимптотика решения строится по дробным степеням малого параметра $\varepsilon > 0$. Сущность и правило выбора степени малого параметра описаны в монографии [3, с. 85 – 91]. Эти методы применимы для достаточно широкого класса задач, особенно для задач со стабильным спектром предельного оператора. Однако можно привести примеры уравнений, для которых неприменимы методы работ [1, 4], особенно в той части, когда спектр предельного оператора $\mathbf{A}$ не является стабильным.

Поэтому есть смысл разработать другой метод построения ф. с. р. для векторного уравнения (1), который: 1) решал бы те уравнения, для которых неприменимы методы работ [1, 3]; 2) структура решения уравнения (1), в том числе и ф. с. р., была бы четко выражена через собственные векторы предельного оператора.

Цель данной работы и состоит в построении ф. с. р. уравнения (1), удовлетворяющего условиям 1, 2. Для того чтобы показать, что разработанный метод применим и для исследования неоднородных начальных и краевых задач, ф. с. р. будет построена в процессе исследования неоднородного векторного уравнения (1). Причем будет рассмотрен случай нестабильного спектра предельного оператора $\mathbf{A}$. В отличие от работ [1, 4] асимптотика решения уравнения (1) будет построена по целым степеням малого параметра $\varepsilon > 0$. Характеристика каждого из двух подходов к исследованию уравнений с недиагонализируемым предельным оператором будет приведена ниже.

Векторное уравнение (1) будем изучать при выполнении таких условий.

Условие 1^0. $A(x)$, $\tilde{h}(x) \in C^\infty[I]$, где $A(x)$ — матрица оператора $\mathbf{A}$ в пространстве R^n.

Условие 2^0. Спектр предельного оператора $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_1(x) \equiv \lambda_2(x) \equiv \ldots \equiv \lambda_{s+2}(x) < \lambda_{s+3}(x) < \ldots < \lambda_n(x) \equiv x\tilde{\lambda}_n(x), \tag{2}$$

где $\tilde{\lambda}_n(x) < 0$ для всех $x \in I$.

Предположим, что кратному элементу спектра предельного оператора **A** соответствуют следующие элементарные делители: $[\lambda(x)-\lambda_1(x)]$, $[\lambda(x)-\lambda_1(x)]$, $[\lambda(x)-\lambda_1(x)]^s$. Тогда существует такой преобразующий линейный оператор **T**, что замена $Y(x,\varepsilon)=\mathbf{T}W(x,\varepsilon)$ преобразует уравнение (1) к уравнению

$$\varepsilon W'(x,\varepsilon)-(\mathbf{G}+\varepsilon\mathbf{P})W(x,\varepsilon) = h(x), \tag{3}$$

где главный оператор **G** имеет следующую жорданову форму:

$$\mathbf{G} = ((g_{ik})), \quad g_{ii}(x) = \lambda_i(x), \quad g_{k(k-1)}(x) = 1, \quad i = \overline{1;\, n}, \quad k = \overline{1;\, s-1}, \tag{4}$$

а все остальные элементы этой матрицы тождественно равны нулю.

Используя спектр предельного оператора **A**, легко можно построить преобразующий оператор **T**, а следовательно, перейти от уравнения (1) к уравнению (3). Переход от уравнения (1) к уравнению (3) проведен по следующей причине. Исследование сингулярно возмущенного уравнения (с. в. у.) (1) в случае недиагонализируемого предельного оператора не является простым обобщением исследований с. в. у. с диагонализируемым предельным оператором. Поэтому для большей наглядности и проведена такая замена. Проведенные в данной работе исследования легко обобщить на векторное уравнение (1), не приводя его к уравнению (3).

2. Биортогональная система векторов. В работах [2, 3 – 6] структура ф. с. р. и решение уравнения вида (1) существенно зависят от биортогональной системы векторов. Существование такой системы векторов для диагонализируемого оператор **A** обеспечено известной теоремой [7, с. 218].

Рассмотрим систему векторов

$$\begin{gathered}(\mathbf{G}-\lambda_i E)b_i = 0, \quad i = 1\cup\overline{s+1;\, n}, \quad (\mathbf{G}-\lambda_i E)b_i = \varepsilon b_{i-1}, \quad i = \overline{2;\, s},\\ (\mathbf{G}^*-\lambda_k E)\,b_k^* = 0, \quad k = \overline{s;\, n}, \quad (\mathbf{G}^*-\lambda_k^* E)\,b_k^* = \varepsilon b_{k-1}^*, \quad k = \overline{1,\, s-1}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь b_i, $i=1\cup\overline{s+1;\, n}$, b_k^*, $k = \overline{s;\, n}$, — собственные векторы соответственно оператора **A** и сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$, отвечающие собственным значениям $\lambda_i(x)$, $\overline{\lambda}_k(x)$.

Проведя непосредственные вычисления, получаем биортогональную систему векторов в явном виде

$$\begin{gathered}b_1 = (C_1, 0, \ldots, 0), \quad b_2 = (C_2, \varepsilon C_1, \ldots, 0),\\ b_s = (C_s, \varepsilon C_{s-1}, \ldots, \varepsilon^{s-1}C_1, 0, \ldots, 0),\\ b_n = (0, \ldots, C_n), \quad b_1^* = (\varepsilon^{s-1}C_s^*, \varepsilon^{s-2}C_{s-1}^*, \ldots, C_1^*, 0, \ldots, 0),\\ b_s^* = (0, \ldots, C_s^*, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad b_n^* = (0, \ldots, C_n^*).\end{gathered} \tag{6}$$

Система (6) будет биортонормированной, если произвольные постоянные этой системы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}C_1C_s^* = \varepsilon^{1-s}, \quad C_2C_s^* + C_1C_{s-1}^* = 0, \quad C_iC_i^* = 1, \quad i = \overline{s+1;\, n},\\ C_sC_s^* + C_{s-1}C_{s-1}^* + \ldots + C_1C_1^* = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

3. О структуре решения вырожденного уравнения. Вырожденное уравнение, соответствующее возмущенному уравнению (3), имеет вид

$$-\mathbf{G}\omega(x) = h(x). \tag{8}$$

Если n-я компонента вектора $h(x)$ имеет нуль в точке $x = 0$, то решение вырожденного векторного уравнения (8) является непрерывной вектор-функцией при $x \in I$. Мы будем исследовать общий случай, т. е. когда точка $x = 0$ не обязательно будет нулем n-й компоненты вектора $h(x)$. Следовательно, в общем случае решение векторного уравнения (8) имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Таким образом, необходимо построить достаточно гладкое решение уравнения (3), которое в пределе при $\varepsilon \to +0$ будет иметь разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Разложим вектор-функцию $h(x)$ по базису b_i, $i = \overline{1; n}$. Имеем

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} (h(x), b_i^*)b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} H_i(x)b_i. \tag{9}$$

В исследуемом случае решение вырожденного векторного уравнения (8) представимо в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)b_i, \tag{10}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\omega_1(x) = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \lambda_1^{-j}(x)H_j(x), \qquad \omega_2(x) = \sum_{j=2}^{s} (-1)^{j-1} \lambda_1^{-j+1}(x)H_j(x),$$
$$\omega_i(x) = \lambda_i^{-1}(x)H_i(x), \qquad i = \overline{s; n}. \tag{11}$$

4. Расширение возмущенного уравнения. Согласно разработанной методике для случая диагонализованного предельного оператора (см. [4 – 6]), для исследуемого случая тоже необходимо выделить и описать все существенно особые многообразия (с.о.м), порожденные особой точкой $\varepsilon = 0$ и содержащиеся в решении с. в. у. (3). С этой целью, наряду с независимой переменной $x \in I$, введем новую вектор-переменную $t = \{t_j\}$, $j = \overline{s+2; n}$ по формулам

$$t_j = \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^{x} \lambda_j(x)\,dx \equiv \varepsilon^{-1}\varphi_j(x) \equiv \Phi_j(x, \varepsilon). \tag{12}$$

Тогда вместо вектор-функции $W(x, \varepsilon)$ будем изучать новую расширенную вектор-функцию $\tilde{W}(x, t, \varepsilon)$. Согласно методу регуляризации [2], для определения расширенной вектор-функции $\tilde{W}(x, t, \varepsilon)$ получим расширенную задачу

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \tilde{W}(x, t, \varepsilon) \equiv [\mathbf{L}_0 + \varepsilon \mathbf{L}_1]\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = h(x), \tag{13}$$

где

$$\mathbf{L}_0 \equiv \mathbf{D}_\lambda - \mathbf{G} \equiv \sum_{j=s+2}^{n} \varphi_j'(x)\frac{\partial}{\partial t_j} - \mathbf{G}, \qquad \mathbf{L}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{P}. \tag{14}$$

5. Пространства безрезонансных решений. Рассмотрим множества (подпространства) функций

$$Y_{rij}^s = \left\{\left[\sum_{i=1}^{s} b_i \alpha_{rij}(x)\right]\exp t_j\right\}, \quad j = \overline{s+2; n}, \qquad X_{ri}^s = \left\{\sum_{i=1}^{s} b_i \omega_{ri}(x)\right\},$$
$$Y_{rij} = \{b_i \alpha_{rij}(x)\exp t_j\}, \quad i = \overline{s+1; n}, \qquad X_{ri} = \{b_i \omega_{ri}(x)\}, \quad i = \overline{s+1; n}, \tag{15}$$
$$V_{ri}^s = \left\{\left[\sum_{i=1}^{s} b_i f_{ri}(x)\right]\Psi(x, \varepsilon)\right\}, \qquad V_{ri} = \{b_i f_{ri}(x)\Psi(x, \varepsilon)\}, \quad i = \overline{s+1; n}.$$

Здесь $\alpha_{rij}(x)$, $f_{ri}(x)$, $\omega_{ri}(x)$ — произвольные, достаточно гладкие функции при $x \in I$, а с.о.м. $\Psi(x, \varepsilon)$ определяется равенством

$$\Psi(x, \varepsilon) \equiv \exp\{\varepsilon^{-1}\varphi_n(x)\} \int\limits_{x_0}^{x} \exp\{-\varepsilon^{-1}\varphi_n(x)\}\, dx, \tag{16}$$

свойства которого описаны в [4, с. 49].

Из этих пространств составим новое пространство

$$Y_r = Y_r^s \oplus \tilde{Y}_r, \tag{17}$$

где

$$Y_r^s = \bigoplus_{j=s+2}^{n} Y_{rij}^s \oplus V_{ri}^s \oplus X_{ri}^s, \qquad \tilde{Y}_r = \bigoplus_{i=s+1}^{n} \left[\bigoplus_{j=s+2}^{n} Y_{rij} \oplus V_{ri} \oplus X_{ri} \right]. \tag{18}$$

Элемент пространства безрезонансных решений (п. б. р.) (17) имеет вид

$$W_r(x, t) \equiv W_r^s(x, t) + \tilde{W}_r(x, t), \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} W_r^s(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{s} \left\{ \sum_{j=s+2}^{n} b_i [\alpha_{rij}(x) \exp t_j + f_{ri}(x)\Psi(x, \varepsilon) + \omega_{ri}(x)] \right\}, \\ \tilde{W}_r(x, t) \equiv \sum_{i=s+1}^{n} b_i \left[\sum_{j=s+2}^{n} \alpha_{rij}(x) \exp t_j + f_{ri}(x)\Psi(x, \varepsilon) + \omega_{ri}(x) \right]. \end{gathered} \tag{20}$$

6. Инвариантность пространств безрезонансных решений. Согласно общей схеме, разработанной для построения равномерной асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи с нестабильным спектром (см. [4 – 6]), нам необходимо изучить действие расширенного оператора $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ на элементы с п. б. р. (17). Схема таких исследований достаточно подробно описана в цитируемых работах (см., например, [4]. Поэтому, из-за ограниченности по объему данной работы, приведем только окончательный результат таких исследований.

Таким образом, результат действия расширенного оператора на элементы с п. б. р. (17) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon W_r(x, t) \equiv [\mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{R}_1] W_r(x, t). \tag{21}$$

Здесь операторы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$ в их действии на элементы $W_r(x, t) \in Y_r$ имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{R}_0 W_r(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \left\{ \sum_{j=s+2}^{n} [\lambda_j(x) - \lambda_i(x)] \alpha_{rij}(x) \exp t_j + \right. \\ \left. + [\lambda_n(x) - \lambda_i(x)] f_{ri}(x) \Psi(x, \varepsilon) - \lambda_i(x)\omega_{ri}(x) \right\}, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{R}_1 W_r(x, t) \equiv -\sum_{i=2}^{n} b_{i-1} \left[\sum_{j=s+2}^{n} \alpha_{rij}(x) \exp t_j + f_{ri}(x) + \omega_{ri}(x) \right] + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i \left\{ \sum_{j=s+2}^{n} \alpha'_{rij}(x) \exp t_j + f'_{ri}(x)\Psi(x, \varepsilon) + \omega'_{ri}(x) + f_{ri}(x) - \right. \\ \left. - \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{P} b_\nu, b_i^*) \left[\sum_{j=s+2}^{n} \alpha_{r\nu j}(x) \exp t_j + f_{r\nu}(x)\Psi(x, \varepsilon) + \omega_{r\nu}(x) \right] \right\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Из полученных тождеств (21) – (23) можно сделать следующие ***выводы.***

1. П. б. р. (17) инвариантны относительно операторов $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_1$, а следовательно, и относительно расширенного оператора $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{R}_1$.

2. Оператор $\mathbf{R}_0$ является главным оператором расширенного оператора $\mathbf{L}_\varepsilon$ в п. б. р. (17).

3. Расширенное уравнение (13) является регулярно возмущенным относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ в п. б. р. (17).

Следовательно, введя дополнительную вектор-переменную t за формулами (12), мы свели изучение с. в. у. (3) к уравнению (13), которое в п. б. р. (17) уже является регулярно возмущенным по малому параметру $\varepsilon > 0$; т. е. нами проведена регуляризация с. в. у. (3).

7. Формализм построения ряда решения расширенного уравнения. Поскольку расширенное уравнение (13) в п. б. р. (17) регулярно зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$, асимптотику решения этого уравнения будем строить в виде ряда

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r W_r(x, t), \qquad W_r(x, t) \in Y_r. \tag{24}$$

Подставим ряд (24) в расширенное уравнение (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon > 0$. Тогда для определения коэффициентов ряда (24) получим следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\mathbf{R}_0 W_{-1}(x, t) = 0, \tag{25}$$

$$\mathbf{R}_0 W_0(x, t) = h(x) - \mathbf{R}_1 W_{-1}(x, t), \tag{26}$$

$$\mathbf{R}_0 W_r(x, t) = -\mathbf{R}_1 W_{r-1}(x, t), \quad r \ge 1. \tag{27}$$

8. Теория разрешимости итерационных уравнений в п. б. р. Поскольку п. б. р. (17) инвариантны относительно операторов $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$, необходимо изучить вопрос о существовании решения итерационного уравнения

$$\mathbf{R}_0 W_r(x, t) = H_r(x, t) \tag{28}$$

в п. б. р. (17). Будем предполагать, что правая часть этого уравнения принадлежит п. б. р. (17).

Запишем структуру ядра оператора $\mathbf{R}_0$. Имеем

$$\operatorname{Ker} \mathbf{R}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{s} b_i \alpha_{ris}(x) \exp t_i,\ b_j \alpha_{rjj}(x) \exp t_j,\ j = \overline{s+1;\ n},\ b_n f_{rn}(x) \Psi(x, \varepsilon) \right\}, \tag{29}$$

где коэффициенты возле с.о.м. являются произвольными, достаточно гладкими функциями при $x \in I$. Для удобства использования знака суммы, здесь введены обозначения $t_1 = t_2 = \ldots \equiv t_{s+2}$.

Теорема 1. *Пусть:* 1) *выполняются условия* 1^0 *и* 2^0; 2) *правая часть итерационного уравнения* (28) *не содержит элементов ядра оператора* $\mathbf{R}_0$; 3) $S_{rn}(0) = 0$, *где* $S_{rn}(x)$ — *проекция правой части уравнения* (28) *на подпространство* X_{rn}. *Тогда в п. б. р.* (17) *существует решение итерационного уравнения* (28), *представимое в виде*

$$W_r(x, t) = Z_r(x, t) + y_r(x, t), \tag{30}$$

где

$$Z_r(x, t) = \sum_{i=1}^{s} b_i \alpha_{ris}(x) \exp t_i + \sum_{j=s+1}^{n} b_j \alpha_{rjj}(x) \exp t_j + b_n f_{rn}(x) \Psi(x, \varepsilon), \tag{31}$$

а $y_r(x, t)$ — *однозначно определенная вектор-функция, явный вид которой при необходимости легко записать.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы в [5].

9. Построение главного члена асимптотики решения расширенного уравнения. Используя теорему 1, перейдем к последовательному решению серии итерационных уравнений (25) – (27). Решением однородного уравнения (25) в пространстве Y_{-1} будет вектор-функция (30) при $r = -1$, коэффициенты которой, до определенного времени, будут произвольными, достаточно гладкими функциями при $x \in I$.

Перед тем как перейти к решению следующего итерационного уравнения (26), необходимо сначала вычислить и исследовать его правую часть. Используя тождество (23), имеем

$$H_0(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} (h(x), b_i^*) b_i + \sum_{i=2}^{s} b_{i-1} \alpha_{(-1)is}(x) \exp t_s - \sum_{i=s+1}^{n} b_i \alpha'_{(-1)ii}(x) \exp t_i -$$

$$- b_n f'_{(-1)n}(x) \Psi(x, \varepsilon) - b_n f_{(-1)n}(x) - \sum_{i=1}^{s} b_i \alpha'_{(-1)is}(x) \exp t_s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i \left[\sum_{j=s+1}^{n} (\mathbf{P} b_j, b_i^*) \alpha_{(-1)jj}(x) \exp t_j + (\mathbf{P} b_n, b_i^*) f_{rn}(x) \Psi(x, \varepsilon) \right]. \qquad (32)$$

Для того чтобы правая часть уравнения (26) не содержала элементов ядра оператора $\mathbf{R}_0$, используем произвольность коэффициентов ранее полученного решения $W_{-1}(x, t)$ следующим образом. Часть коэффициентов, отвечающих диагонализированным элементам спектра предельного оператора, выберем как решения дифференциальных уравнений $(r = -1)$

$$\alpha'_{rjj}(x) - (\mathbf{P} b_j, b_i^*) \alpha_{rjj}(x) = 0, \quad j = \overline{s+1;\, n}. \qquad (33)$$

Коэффициенты, отвечающие недиагонализированной части спектра, определяются из следующей системы уравнений $(r = -1)$

$$\alpha'_{rs}(x) - (M + E_G) \alpha_{rs}(x) = 0, \qquad (34)$$

где

$$M = (M_{ik})_{i,k=1}^{s}, \quad M_{ik} = (\mathbf{P} b_j, b_k^*), \quad \alpha_{rs}(x) = \operatorname{colon}(\alpha_{rls}(x), \ldots, \alpha_{rss}(x)), \qquad (35)$$

$E_G = (e_{ik})$ — матрица, в которой $e_{k(k+1)} = 1$, $k = \overline{1;\, s-1}$, а все остальные элементы тождественно равны нулю.

Вывод 4. Диагонализируемые элементы спектра оператора $\mathbf{A}$ порождают скалярные дифференциальные уравнения (33), а недиагонализируемая часть спектра порождает систему дифференциальных уравнений (34).

Условие 3 теоремы 1 будет выполнено, если для произвольной функции $f_{(-1)n}(x)$ задать начальное условие

$$f_{(-1)n}(0) = \lambda_n^{-1}(0)(h(0), b_n^*). \qquad (36)$$

Следовательно, при выполнении условий (33) – (36), согласно теореме 1, в п. б. р. Y_0 существует решение итерационного уравнения (26), представимое по формуле (30) при $r = 0$.

Проделаем еще один цикл, т. е. потребуем существования решения итерационного уравнения (27) при $r = 1$. По аналогии с предыдущим, сначала вычислим правую часть этого уравнения и потребуем чтобы она удовлетворяла условию 2 теоремы 1. В результате выполнения этого условия получим дифференциальные уравнения (33) и систему дифференциальных уравнений (34) при $r = 0$. Кроме этого получим точечное условие $f_{0n}(0) = 0$.

При выполнении указанных выше условий в п. б. р. Y_1 существует решение итерационного уравнения (27) при $r = 1$.

Выпишем в явном виде полученные решения $W_r(x, t)$, $r = -1, 0$. Имеем

$$W_0(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1} W_{-1}(x, t) + W_0(x, t) \equiv \sum_{r=-1}^{0} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{s} b_i \alpha_{ris}(x) \exp t_s + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=s+1}^{n} b_j \alpha_{rjj}(x) \exp t_j \right] + \varepsilon^{-1} b_n f_{(-1)n}(x) \Psi(x, \varepsilon) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{-1}(x)(h(x), b_i^*) b_i + [\lambda_n^{-1}(x)(h(x), b_n^*) - f_{(-1)n}(x)] b_n. \qquad (37)$$

Продолжая далее решать итерационные уравнения (27), методом математической индукции можно показать, что серия уравнений (25) – (27) асимптотически корректна в п. б. р. (17).

Согласно методу регуляризации, проведем сужение в построенном решении расширенного уравнения (13) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$, $\Phi(x, \varepsilon) = \{ \Phi_j(x, \varepsilon),\ j = \overline{s+2;\ n} \}$. Тогда получим асимптотику решения неоднородного векторного уравнения (3) вида

$$W(x, \varepsilon) \equiv W(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv \tilde{W}(x, t, \varepsilon)\big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r W_r(x, \Phi(x, \varepsilon)). \qquad (38)$$

Вывод 5. Из полученного решения (38), как частный случай, легко записать асимптотику решения однородного уравнения (3), т. е. ф. с. р. этого уравнения.

10. Особенности и некоторые свойства построенной ф. с. р. Цель данной работы состоит не только в построении асимптотики решения уравнения (1), а и в том, чтобы показать, что построенная асимптотика решения векторного уравнения (1) содержит в себе, как частные случаи, не только асимптотику вида Шлезингера – Биркгоффа, но и классическую теорию интегрирования систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [8, с. 525 – 538].

Для большей наглядности сначала предположим, что оператор $\mathbf{P}$, содержащийся в уравнении (3), тождественно равен нулю, т. е. рассмотрим однородную систему

$$\varepsilon W'(x, \varepsilon) - \mathbf{G} W(x, \varepsilon) = 0. \qquad (39)$$

В этом случае тождества (22), (23) примут вид

$$\mathbf{R}_0 W_r(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=s+2}^{n} [\lambda_j(x) - \lambda_i(x)] \alpha_{rij}(x) \exp t_j, \qquad (40)$$

$$\mathbf{R}_1 W_r(x, t) \equiv -\sum_{i=2}^{n} b_{i-1} \sum_{j=s+2}^{n} \alpha_{rij}(x) \exp t_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=s+2}^{n} \alpha'_{rij}(x) \exp t_j. \qquad (41)$$

В исследуемом случае решение однородного уравнения $\mathbf{R}_0 W_r(x, t) = 0$ будет представимо равенством (31), в котором отсутствует слагаемое $b_n f_{rn}(x) \Psi(x, \varepsilon)$. Вычислим правые части уравнений (26) и (27) при $r = 1$. Требуя, чтобы они не содержали элементов ядра оператора $\mathbf{R}_0$, т. е. чтобы выполнялось условие 2 теоремы 1, получаем скалярные дифференциальные уравнения $(r = -1, 0)$

$$\alpha'_{rii}(x) = 0, \quad i = \overline{s+1;\, n} \tag{42}$$

и систему дифференциальных уравнений $(r = -1, 0)$

$$\alpha'_{rs}(x) - E_G \alpha_{rs}(x) = 0. \tag{43}$$

Продолжая решать уравнения (27) при $r > 1$, для определения коэффициентов $\alpha_{rii}(x)$, $r > 1$, $i = \overline{1;\, n}$, получаем неоднородные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений вида (42), (43). Проинтегрируем эти уравнения и подставим их решения в ряд (24). Тогда решение однородной системы уравнений (39) будет иметь следующую структуру:

$$W(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv \tilde{W}(x, t, \varepsilon)\big|_{t = \Phi(x, \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \sum_{i=1}^{s} b_i \left[\gamma_i(\varepsilon) + \int\limits_{x_0}^{x} \alpha_{i-1}(x)\, dx \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=s+1}^{s+2} b_i \gamma_i(\varepsilon) \right\} \exp \Phi_s(x, \varepsilon) + \sum_{i=s+3}^{n} b_i \gamma_i(\varepsilon) \exp \Phi_i(x, \varepsilon), \tag{44}$$

где

$$\gamma_i(\varepsilon) = \sum_{r}^{+\infty} \varepsilon^r \gamma_{ri}. \tag{45}$$

Для того чтобы получить в явном виде структуру частных решений, т. е. чтобы записать ф. с. р., приравняем коэффициенты при одинаковых постоянных γ_{ri}, $i = \overline{1;\, n}$. Получим

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r}^{+\infty} \varepsilon^r \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} D_i(x, \varepsilon) \exp t_i, \tag{46}$$

где $D_i(x, \varepsilon)$ — n-мерные вектор-столбцы вида

$$D_1(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, D_s(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x^{s-1}[(s-1)!] \\ \varepsilon x^{s-2}[(s-2)!] \\ \cdot \\ \varepsilon^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$D_i(x, \varepsilon)$, $i = \overline{s+1;\, n}$ — единичные n-мерные вектор-столбцы, в которых на i-м месте находится единица, а все остальные компоненты этих векторов тождественно равны нулю.

Легко проверить, что каждый вектор-столбец $D_i(x, \varepsilon) \exp t_i$, $i = \overline{1;\, n}$, является частным решением однородного с.в.д.у. (39).

Если в формуле (45) положить $r = \overline{0,\, +\infty}$, то $W_{Bp.}(0) = \prod_{i=1}^{s-1} \varepsilon^i \neq 0$.

Построенные частные решения удовлетворяют условиям

$$W_{ii}(0) = \varepsilon^{i-1}, \quad i = \overline{1;\, s}, \quad W_{ii}(0) = 1, \quad i = \overline{s+1;\, n},$$

$$W_{ik}(0) = 0, \quad i, k = \overline{1;\, n}, \quad i \neq k. \tag{48}$$

Если в формуле (45) положить $r = \overline{1-i,\, +\infty}$, то получим $W_{ii}(0) = 1$, $i = \overline{1;\, n}$, т. е. $W_{Bp.}(0) = 1$.

Структура решения начальной (или краевой) задачи зависит от начальных (или краевых) условий. Поэтому выбор изменения индекса r в формулах (45) зависит от структуры начальных (или краевых) условий, заданных в исследуемом уравнении.

Из полученного можно сделать следующие ***выводы.***

6. Каждое из частных решений векторного уравнения (39), соответствующее простым элементам спектра предельного оператора, т. е. решения $D_i(x,\varepsilon)\times \times \exp t_i \equiv b_i\alpha_i(x,\varepsilon)\exp t_i$, $i=\overline{s+3;\,n}$, можно строить отдельно, независимо друг от друга.

7. Поскольку кратному элементу спектра предельного оператора соответствует два простых инвариантных множителя, каждое из частных решений $D_i(x,\varepsilon)\exp t_i \equiv b_i\alpha_i(x,\varepsilon)\exp t_s$, $i=s+1,\,s+2$, тоже можно строить отдельно от других решений.

8. Кратному элементу спектра оператора $\mathbf{G}$ соответствует s-кратный инвариантный множитель $[\lambda(x)-\lambda_s(x)]^s$. Хотя для построения s частных решений используется только одно собственное значение $\lambda_s(x)$, однако частные решения $D_i(x,\varepsilon)\exp t_s$, $i=\overline{1;\,s}$, отвечающие этому собственному значению, образуют отдельную циклическую систему решений. Поэтому эти решения строятся отдельно от других решений, но все же они строятся единым циклом.

9. Если оператор $\mathbf{G}$ диагонализируемый, то построенная ф. с. р. содержит в себе, как частный случай, классические результаты Шлезингера – Биркгоффа и результаты, полученные другими авторами (см. [1 – 4]).

10. Если $\varepsilon=1$ и спектр оператора $\mathbf{G}$ постоянный, то построенная ф. с. р. для векторного уравнения (39) соответствует классическим результатам [8, с. 525 – 530]. Заметим, что в цитируемой монографии была использована жорданова матрица, транспонированная к матрице $\mathbf{G}$.

Уяснив себе структуру решения векторного уравнения (39), вернемся еще к анализу исходного уравнения (3). Поскольку для однородного уравнения (39) $y_1(x,\Phi(x,\varepsilon))\equiv 0$, то нулевые приближения общих решений уравнений (3) и (39) совпадают.

П.б.р. (17) инвариантны относительно оператора $\mathbf{P}$. Однако каждое из подпространств Y_r^s, Y_{ri}, $r\ge 1$, $i=\overline{s+1;\,n}$, уже не является инвариантным относительно этого оператора. Следовательно, „неинвариантность" оператора $\mathbf{P}$ относительно этих подпространств вносит следующие изменения в структуру общего решения уравнения (3): для определения неизвестных функций вместо однородных уравнений (33) и (34) мы получим неоднородные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений.

11. Оценка остаточного члена асимптотики решения. Покажем, что построенное формальное решение неоднородного векторного уравнения (3) имеет асимптотический характер, и дадим оценку остаточного члена асимптотики решения.

Запишем решение уравнения (3), представленное в виде ряда (24), в виде тождества

$$\tilde W(x,t,\varepsilon)\;\equiv\;\tilde W_{\varepsilon m}(x,t)+\varepsilon^{m+1}\tilde\xi_{m+1}(x,t,\varepsilon), \tag{49}$$

где $\tilde W_{\varepsilon m}(x,t)$ — частичная сумма ряда (24), а $\varepsilon^{m+1}\tilde\xi_{m+1}(x,t,\varepsilon)$ — остаточный член этого ряда.

Проведем сужение в этом тождестве при $t=\Phi(x,\varepsilon)$. Получим тождество

$$W(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\;\equiv\;W_{\varepsilon m}(x,\Phi(x,\varepsilon))+\varepsilon^{m+1}\xi(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon),\qquad m>0. \tag{50}$$

Используя методику работ [4 – 6], можно показать, что выполняется оценка

$$|||\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)|||\;\le\;K,\qquad m>0, \tag{51}$$

где постоянная K не зависит от $x\in I$ и малого параметра $\varepsilon>0$.

Таким образом, из изложенного выше вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1^0 *и* 2^0. *Тогда при достаточно малых значениях малого параметра* $\varepsilon > 0$:

а) *существует преобразующий оператор* $\mathbf{T}$, *который заменой* $Y(x, \varepsilon) = \mathbf{T} W(x, \varepsilon)$ *уравнение* (1) *приводит к уравнению* (3), *в котором предельный оператор* $\mathbf{G}$ *имеет жорданову нормальную форму* (4);

б) *описанным выше методом для решения расширенного векторного уравнения* (13) *можно построить асимптотический ряд* (24);

в) *сужение асимптотического ряда* (24) *при* $t = \Phi(x, \varepsilon)$ *является асимптотическим рядом решения уравнения* (3);

г) *остаточный член асимптотики решения уравнения* (3) *имеет оценку, представленную формулой* (51).

Замечания. **1.** Построенное общее решение системы (3) имеет четко выраженную структуру, зависящую от базиса b_i, $i = \overline{1; n}$. Это означает, что из построенного решения легко можно записать компоненты вектор-функции $W(x, \varepsilon)$. Переход от полученного решения к классической форме записи общего решения уравнения (3) (см. [8, с. 525 – 530]) не представляет затруднений.

2. Пусть $(h(0), b_n^*) = 0$. В этом случае асимптотика решения системы (3) не содержит отрицательных степеней малого параметра.

3. В работах [1, 3] линейно независимые решения для случая кратных корней имели следующую структуру:

$$W_i(x, \varepsilon) = P_i(x, \varepsilon) \exp \left\{ \int_a^x \rho_i(x, \varepsilon) dx \right\}, \tag{52}$$

где $P_i(x, \varepsilon)$ — векторы, аналитически зависящие от малого параметра, а $\rho_i(x, \varepsilon)$ — многочлены относительно малого параметра, в которых главные члены имели вид $\rho_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \lambda_i(x)$. Построенные нами линейно независимые решения тоже имеют структуру, представленную формулой (52), в которой подынтегральная функция $\rho_i(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \lambda_i(x)$, т. е. построенная нами ф. с. р. по форме ближе к классическим результатам, относящимся к системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [8], гл. 10).

1. *Территин Х. Л.* Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Математика. – 1957. – **1**, № 2. – С. 29–59.
2. *Ломов С. А.* Ввведение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 310 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989. – 288 с.
4. *Бобочко В. М., Маркуш І. І.* Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора. – Київ: Віпол, 1993. – 214 с.
5. *Бобочко В. Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1505–1515.
6. *Бобочко В. М.* Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 147–160.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Техтеоретиздат, 1953. – 492 с.
8. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967. – 410 с.

Получено 26.12.96