УДК 617.946

В. С. Ільків (Ун-т „Львів. політехніка")

ЗАДАЧА З ФОРМАЛЬНИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ*

We establish the conditions for the existence and uniqueness of a solution of formal initial-value problem. We investigate the solvability of a problem in the case where a solution is not unique.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з формальними початковими умовами. Досліджено розв'язність задачі у випадку неєдиності розв'язку.

1. Позначення. Розглядаємо функції змінних $x = (x_1, \ldots, x_m)$ і змінних x і t. Вважаємо, що x належить m-вимірному тору Ω_m, тобто функції 2π-періодичні за просторовими змінними x_j; змінна t належить деякому відрізку і функції неперервні по t. Отже,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx},$$

де $\psi(k) \in \mathbb{C}$ — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$, аналогічно

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} U(t, k) e^{ikx},$$

де $\mathbb{Z}^m$ складається з m-вимірних цілочислових векторів $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $kx = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m$.

Через $\mathbb{H}$ позначимо простір узагальнених періодичних функцій [1], які будемо зображати їх рядами Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx},$$

де $\{\psi(k)\}$ належить $\mathbb{C}^\infty$. Тут $\mathbb{C}^\infty$ — множина всіх послідовностей комплексних чисел. Відомо [1], що $\mathbb{H}$ — алгебра (щодо операції згортки) з одиницею, роль якої виконує δ-функція Дірака

$$\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} e^{ikx}.$$

Через $\mathbb{C}^l([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbb{H})$ $(\gamma_1 < \gamma_2; \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R})$ позначимо простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що $(d/dt)^j u$, $j = \overline{0, l}$, для кожного $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$ належить простору $\mathbb{H}$, і які неперервні по t в цьому просторі [1, 2].

Далі будемо позначати через A^H матрицю, транспоновану до матриці A, через A^* — матрицю комплексно-спряжену, через A^H — матрицю транспоновану і комплексно-спряжену, тобто $A^H = (A^T)^* = (A^*)^T$.

Лінійний псевдодиференціальний оператор (п. д. о.) з постійними коефіцієнтами $F = F(D)$, $D = (D_1, \ldots, D_m)$, $D_j = \partial/(i\partial x_j)$, $j = \overline{1, m}$, утотожнюється з послідовністю комплексних чисел $\{F(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$, тобто з елементом множини

---

* Частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій.

$\mathbb{C}^{\infty}$, і за означенням $Fe^{ikx} = F(k)e^{ikx}$. Надалі будемо розглядати тільки такі п. д. о., позначаючи їх множину через $\mathcal{F}$.

Операції над п. д. о. визначаються наступним чином [3]: $F_1 = F_2$ еквівалентно $F_1(k) = F_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$; $F_1 \neq 0$ еквівалентно $F_1(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^m$; $F_1 + F_2$ еквівалентно $F_1(k) + F_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$; аналогічно визначаються операції віднімання, множення, ділення та інші арифметичні операції. При діленні припускаємо, що $F_2 \neq 0$; також при $F \neq 0$ існує обернений оператор F^{-1}. Операцію порівняння $F_1 > F_2$ визначаємо за допомогою нерівностей $F_1(k) > F_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$; аналогічно визначаються й інші нерівності. Взагалі, кажемо, що оператор $F(D)$ має певну властивість тільки тоді, коли ця властивість стосується всіх чисел $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$.

Очевидно, що розглядувані п. д. о. комутують щодо операцій додавання і множення.

Для кожної функції

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx}$$

справедлива рівність $\varphi(x) = \psi(D)\delta(x)$, що встановлює бієкцію між $\mathbb{H}$ і множиною введених п. д. о. $\mathcal{F}$ ($\mathbb{H} = \mathcal{F}\delta(x)$), а також між $\mathbb{H}$ і $\mathbb{C}^{\infty}$.

Одиничний оператор позначаємо через I, нульовий — через 0. Вживаємо також проектори Π — оператори, для яких $\Pi(k)$ дорівнюють нулю або одиниці у відповідності з деякою умовою чи правилом.

2. Постановка задачі. Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$Lu \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u = 0 \tag{1}$$

і умови

$$l_j u\Big|_{t=0} \equiv l_j\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

де $L(\lambda, D)$ — поліном степеня n за змінною λ, тобто $L(\lambda, D) = \lambda^n + A_1(D)\lambda^{n-1} + \ldots + A_n(D)$, з коефіцієнтами $A_j(D) \in \mathcal{F}$ $(j = \overline{1, n})$; оператори умов $l_j(\lambda, D) \equiv (M_0(\lambda, D))^{j-1} P(\lambda, D)$, причому $M_0(\lambda, D) \in \mathcal{F}$, $P(\lambda, D) \in \mathcal{F}$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ і гладкі (нескінченно диференційовні) за змінною λ, праві частини умов (2) $\varphi_j(x)$ належать простору $\mathbb{H}$.

Будемо вивчати розв'язність задачі (1), (2) в просторі $\mathbb{C}^n([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbb{H})$ і встановимо умови існування та єдиності розв'язку.

Умови (2) названі початковими, оскільки значення функції $l_j u$ в лівій частині умов береться в точці $t = 0$. Оператори l_j з (2) породжують умови, які містять ряд відомих умов. Наведемо такі приклади, виписавши вирази для операторів $M_0(\lambda, D)$ і $P(\lambda, D)$, що утворюють відповідні l_j.

У першому випадку $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau}$ одержимо оператори l_j, що відповідають умовам Коші (власне початковим) в точці τ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u\Big|_{t=\tau} = \varphi_j(x);$$

у другому $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = 1 - e^{\lambda T}$ — періодичні умови

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u \bigg|_{t=0} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u \bigg|_{t=T} = 0, \qquad \varphi_j(x) = 0;$$

у третьому $M_0(\lambda, D) = \lambda$, $P(\lambda, D) = 1 - \mu e^{\lambda T}$ $(\mu \neq 0)$ — нелокальні умови

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u \bigg|_{t=0} - \mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u \bigg|_{t=T} = \varphi_j(x)$$

на відрізку $[0, T]$;

і у четвертому $M_0(\lambda, D) = e^{\lambda \Delta t}$, $P(\lambda, D) = e^{\lambda \tau}$ — багатоточкові умови у точках $\tau, \tau + \Delta t, \ldots, \tau + (n-1)\Delta t$:

$$u\,|_{t = \tau + (j-1)\Delta t} = \varphi_j(x).$$

Отже, умови (2) можуть бути і крайовими, і нелокальними, і багатоточковими, і є початковими лише формально, тому називаємо їх формальними початковими умовами.

3. Умови існування та єдиності. Побудова розв'язку. Нехай $\lambda_1(D), \ldots$ $\ldots, \lambda_{p(D)}(D)$ — корені рівняння $L(\lambda, D) = 0$, так що

$$L(\lambda, D) = (\lambda - \lambda_1(D))^{k_1(D)} \ldots \left(\lambda - \lambda_{p(D)}(D)\right)^{k_{p(D)}(D)}, \tag{3}$$

де $k_1(D), \ldots, k_{p(D)}(D)$ $(k_1(D) + \ldots + k_{p(D)}(D) = n)$ — кратності відповідних коренів. Тоді в просторі $\mathbb{C}^n([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbb{H})$ загальний розв'язок $u = u(t, x)$ рівняння (1) має наступний вигляд:

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} t^{\alpha-1} e^{\lambda_j(D) t} C_{j\alpha}(x), \tag{4}$$

де $C_{j\alpha}(x)$ — довільні функції із простору $\mathbb{H}$. Формулу (4) перепишемо у диференціальному вигляді

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{\alpha-1} e^{\lambda t}\right)_{\lambda = \lambda_j(D)} C_{j\alpha}(x). \tag{5}$$

Позначимо вектор лівих частин умов (2) через

$$l = M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right), \qquad M = \left(I, M_0, M_0^2, \ldots, M_0^{n-1}\right)^T, \tag{6}$$

тоді $M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) = M_j P_j$ для $j = \overline{1, p(D)}$, де M_j — матриця розміру $n \times$ $\times\, k_j(D)$ такого вигляду:

$$M_j = \left(M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right), \left(\frac{\partial}{\partial M_0}\right) M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial M_0}\right)^{k_j(D)-1} M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)\right),$$

вектор $P_j = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right), 0, \ldots, 0\right)^T$ має розмір $k_j(D)$.

Справедлива формула

$$\frac{d\left(M_j(\lambda, D) P_j(\lambda, D) e^{\lambda t}\right)}{d\lambda} = M_j(\lambda, D)(F_j + tI) P_j(\lambda, D) e^{\lambda t}, \tag{7}$$

де $F_j = F_j\left(\dfrac{d}{d\lambda}, D\right)$ — матричний оператор розміру $k_j(D)$ з елементами $d/d\lambda$ на головній діагоналі і елементами $N(\lambda, D) = \dfrac{dM_0(\lambda, D)}{d\lambda}$ на піддіагоналі; решта елементів матриці F_j — нульові оператори. Це випливає з рівностей

$$\frac{dM_jP_je^{\lambda t}}{d\lambda} = \frac{dM_j}{d\lambda}P_je^{\lambda t} + M_j\frac{dP_j}{d\lambda}e^{\lambda t} + M_jP_jte^{\lambda t}$$

і

$$\frac{dM_j}{d\lambda}P_j = \frac{dM_j}{dM_0}NP_j = \left(\frac{dM}{dM_0}, \frac{d^2M}{dM_0^2}, \ldots, \frac{d^{k_j(D)-1}M}{dM_0^{k_j(D)-1}}, 0\right)NP_j.$$

Формула (7) справедлива і для вищих похідних за змінною λ, що дає можливість за допомогою (5), (6) отримати рівність

$$lu(t,x) = M\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p(D)}\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\alpha-1}\left(M(\lambda, D)P(\lambda, D)e^{\lambda t}\right)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}C_{j\alpha}(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p(D)}\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} M_j\left(\lambda_j(D), D\right)\left((F_j + tI)^{\alpha-1}P_j(\lambda, D)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}e^{\lambda_j(D)t}C_{j\alpha}(x).$$

При $t = 0$ маємо

$$lu(t,x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p(D)} M_j\left(\lambda_j(D), D\right)\sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} F_j^{\alpha-1}P_j(\lambda, D)|_{\lambda=\lambda_j(D)}C_{j\alpha}(x),$$

або

$$lu(t,x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p(D)} M_j\left(\lambda_j(D), D\right)R^{-1}(k_j(D))\,R(k_j(D))V_jC_j(x), \tag{8}$$

де

$$R(j) = \operatorname{diag}(0!, 1!, \ldots, (j-1)!), \quad j = \overline{1, n}; \tag{9}$$

$$V_j = \left(P_j(\lambda, D), F_jP_j(\lambda, D), \ldots, F_j^{k_j(D)-1}P_j(\lambda, D)\right)_{\lambda=\lambda_j(D)}, \quad j = \overline{1, p(D)}; \tag{10}$$

$$C_j(x) = \operatorname{col}\left(C_{j1}(x), \ldots, C_{j,k_j(D)}(x)\right), \quad j = \overline{1, p(D)}. \tag{11}$$

Матриця $V_j = V_j(D)$ є верхньою трикутною розміру $k_j(D)$ матрицею і має наступний визначник:

$$\det V_j = \left(P(\lambda_j(D), D)\right)^{k_j(D)}\left(N(\lambda_j(D), D)\right)^{k_j(D)(k_j(D)-1)}. \tag{12}$$

Якщо $k_j(k) = 1$, то в (12) $V_j(k) = P\left(\lambda_j(k), k\right)$.

Перепишемо формулу (8) у матричному вигляді

$$lu(t,x)|_{t=0} = W(D)V(D)C(x), \tag{13}$$

де $W(D)$ — узагальнена матриця Вандермонда розміру n з твірними елементами $M_0(\lambda_j(D), D)$ $\left(j = \overline{1, p(D)}\right)$ кратностей $k_j(D)$,

$$W(D) = \left(M_1(\lambda_1(D), D)\,R^{-1}(k_1(D)), \ldots, M_{p(D)}(\lambda_{p(D)}(D), D)\,R^{-1}(k_{p(D)}(D))\right); \tag{14}$$

матриця $V(D)$ — блочно-діагональна матриця розміру n,

$$V(D) = \operatorname{diag}\left(R(k_1(D))\,V_1, \ldots, R(k_{p(D)}(D))\,V_{p(D)}\right); \tag{15}$$

вектор довільних функцій $C(x)$ має розмір n:

$$C(x) = \operatorname{col}\left(C_1(x), \ldots, C_{p(D)}(x)\right). \tag{16}$$

Зауважимо, що коли всі корені $\lambda_j(D)$ полінома $L(\lambda, D)$ — прості, то права частина формули (13) має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} I & \ldots & I \\ M_0(\lambda_1(D), D) & \ldots & M_0(\lambda_{p(D)}(D), D) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_0^{n-1}(\lambda_1(D), D) & \ldots & M_0^{n-1}(\lambda_{p(D)}(D), D) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} P(\lambda_1(D), D) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & P_0(\lambda_{p(D)}(D), D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_{p(D)}(x) \end{pmatrix}.$$

Підставляючи загальний розв'язок (4) в умови (2), отримаємо (враховуючи (3)) наступне співвідношення для знаходження невідомих функцій:

$$W(D)\,V(D)\,C(x) = \varphi(x), \tag{17}$$

де $\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — вектор-функція правих частин умов (2).

Теорема 1. *Для існування і єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *при довільних правих частинах* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *необхідно і достатньо, щоб існував обернений оператор до оператора* $W(D)\,V(D)$, *тобто щоб*

$$\det\left(W(D)\,V(D)\right) \neq 0. \tag{18}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай умова (18) не виконується, тобто для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ оператор $\det(W(D)\,V(D))\,\Pi = 0$. Однорідна задача (1), (2) (поряд з тривіальним) має розв'язок

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{p(D)} \sum_{\alpha=1}^{k_j(D)} t^{\alpha-1} e^{\lambda_j(D)t}\,\Pi C_{*j\alpha}(x) \not\equiv 0,$$

де $C_*(x) = \left\{C_{*j\alpha}(x)\right\}$ — довільний розв'язок системи $W(D)\,V(D)\,C_*(x) = 0$, для якого $\Pi C_*(x) \neq 0$. Тобто розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не єдиний.

Достатність. Якщо виконується умова (18), то для довільного вектора $\varphi(x)$ розв'язок рівняння (17) існує, єдиний і має наступний вигляд:

$$C(x) = (W(D)\,V(D))^{-1}\varphi(x) = V^{-1}(D)\,W^{-1}(D)\,\varphi(x).$$

Підставивши останній вираз в (4), отримаємо зображення розв'язку задачі (1), (2). Теорему доведено.

Переформулюємо умови теореми 1 в термінах вихідних операторів L, M_0 і P.

Теорема 2. *Для існування і єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *при довільних правих частинах* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(D)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

1) $|L(\lambda(D), D)| + |P(\lambda(D), D)| \neq 0$ *для всіх* $\lambda(D) \in \mathcal{F}$;

2) $|L(\lambda(D), D)| + \left| L'_\lambda(\lambda, D)\big|_{\lambda = \lambda(D)} \right| + |N(\lambda(D), D)| \neq 0$ *для всіх* $\lambda(D) \in \mathcal{F}$;

3) $|L(\lambda(D), D)| + |L(\mu(D), D)| + |M_0(\lambda(D), D) - M_0(\mu(D), D)| \neq 0$ *для всіх* $\lambda(D), \mu(D) \in \mathcal{F}$, *таких, що* $\lambda(D) \neq \mu(D)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай умови теореми 2 не виконуються, тобто для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ та оператора $\lambda(D) \in \mathcal{F}$ $L(\lambda(D), D)\Pi = 0$ і $P(\lambda(D), D)\Pi = 0$. Тоді $\lambda(D) = \lambda_1(D)$ і $P(\lambda_1(D), D)\Pi = 0$. Визначник матриці $W(D)V(D)$ обчислюється за формулою

$$\det(W(D)V(D)) = \det W(D) \det V(D) = \det W(D) \prod_{j=1}^{p(D)} \prod_{l=1}^{k_j(D)-1} l! \det V_j,$$

тому з формули (12) випливає, що $\det V_1 \Pi = 0$ і $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. Аналогічно, коли для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ і оператора

$$\lambda(D) \in \mathcal{F}\ L(\lambda(D), D)\Pi = 0, \qquad L'_\lambda(\lambda, D)\big|_{\lambda = \lambda(D)} \Pi = 0$$

і $N(\lambda(D), D)\Pi = 0$, то $N(\lambda_1(D), D)\Pi = 0$. Знову отримуємо $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. Третя можливість, коли не виконуються умови теореми 2, полягає в тому, що для деякого проектора $\Pi \in \mathcal{F}$ і операторів $\lambda(D), \mu(D) \in \mathcal{F}$ $(\lambda(D) \neq \mu(D))$, справедливі рівності

$$L(\lambda(D), D)\Pi = 0, \quad L(\mu(D), D)\Pi = 0, \quad M_0(\lambda(D), D)\Pi = M_0(\mu(D), D)\Pi.$$

Тепер можна вважати, що

$$\lambda(D) = \lambda_1(D), \quad \mu(D) = \lambda_2(D) \quad \text{і} \quad M_0(\lambda_1(D), D)\Pi = M_0(\lambda_2(D), D)\Pi.$$

Оскільки твірні елементи матриці Вандермонда $W(D)\Pi$ співпадають, то $\det W(D)\Pi = 0$, а отже, $\det(W(D)V(D))\Pi = 0$. В усіх трьох випадках не виконується умова теореми 1. Необхідність доведено.

Достатність. Якщо $\det(W(D)V(D)) \neq 0$, то

$$P(\lambda_j(D), D) \neq 0 \quad \left(j = \overline{1, p(D)}\right), \qquad N(\lambda_j(D), D) \neq 0 \quad \left(j = \overline{1, p(D)},\ k_j(D) \geq 2\right)$$

та

$$M_0(\lambda_j(D), D) - M_0(\lambda_l(D), D) \neq 0 \quad \left(j = \overline{1, p(D)},\ j \neq l,\ p(D) \geq 2\right).$$

Останнє означає виконання умов теореми 2, що і треба було довести.

Теореми 1 і 2 проілюструємо для рівняння першого і другого порядку та для вказаних вище випадків умов (2).

Для $n = 1$ (рівняння (1) першого порядку) умова (2) має такий вигляд:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u \bigg|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Тоді умова $W(D)V(D) \equiv P(-A_1(D), D) \neq 0$ є умовою однозначної розв'язності задачі (1), (2). Для рівняння другого порядку $(n = 2)$ умови (2) будуть наступними:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad M_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)P\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u\Big|_{t=0} = \varphi_2(x).$$

Введемо позначення: $\lambda = -A_1/2$, $\lambda_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - A_2}$, де

$$A_1 = A_1(D), \quad A_2 = A_2(D); \quad P = P(\lambda, D),$$

$$N = N(\lambda, D), \quad P' = P'_\lambda(\lambda, D), \quad M_0 = M_0(\lambda, D);$$

$$P_i = P(\lambda_i, D), \quad M_0 = M_0(\lambda_i, D) \quad (i = 1, 2).$$

Тоді матриця $W(D)V(D)$ має вигляд

$$W(D)V(D) = \begin{pmatrix} I & I \\ M_{01} & M_{02} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\Pi +$$

$$+ \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & P' \\ 0 & PN \end{pmatrix}(I - \Pi),$$

де Π — проектор, для якого $\Pi(k) = 1$ при $4A_2(k) \neq A_1^2(k)$ і $\Pi(k) = 0$, коли $4A_2(k) = A_1^2(k)$. Визначник матриці

$$\det(W(D)V(D)) = (M_{02} - M_{01})P_1P_2\Pi + P^2N(I - \Pi).$$

Отже, для існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) для рівняння другого порядку необхідно і достатньо, щоб $P_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, $M_{01}\Pi \neq M_{02}\Pi$, $N(I - \Pi) \neq$ $\neq 0$.

У першому випадку задача Коші завжди має єдиний розв'язок у просторі $\mathbb{C}^n([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbb{H})$, оскільки

$$P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau} \neq 0, \quad N(\lambda, D) = 1 \neq 0, \quad M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0$$

для довільних $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$, $\lambda \neq \mu$. У другому випадку для періодичної задачі $P(\lambda, D) = 1 - e^{\lambda T} = 0$ при

$$\lambda = \frac{i2\pi p}{T} \ (p \in \mathbb{Z}), \quad N(\lambda, D) = 1 \neq 0, \quad M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0,$$

тому умова існування та єдиності розв'язку буде $L(i2\pi p/T, D) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$. У третьому випадку нелокальних умов $P(\lambda, D) = 1 - \mu e^{\lambda T} = 0$ при

$$\lambda = \frac{i2\pi p}{T} - \frac{1}{T}\ln\mu \ (p \in \mathbb{Z}), \quad N(\lambda, D) = 1 \neq 0,$$

$$M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = \lambda - \mu \neq 0,$$

тому умова буде $L(i2\pi p/T - \ln\mu/T, D) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$. І у четвертому випадку багатоточкових умов

$$P(\lambda, D) = e^{\lambda\tau} \neq 0, \quad N(\lambda, D) = \Delta t e^{\lambda\Delta t} \neq 0,$$

$$M_0(\lambda, D) - M_0(\mu, D) = e^{\lambda\Delta t} - e^{\mu\Delta t} = 0$$

при $\lambda = \mu + i2\pi p/\Delta t$, тому умова буде $\operatorname{Res}_\lambda(L(\lambda, D), L(\lambda + i2\pi p/\Delta t, D)) \neq 0$ для всіх $p \in \mathbb{Z}$, де $\operatorname{Res}_\lambda(f(\lambda), g(\lambda))$ — результант [4, 5] поліномів f і g змінної λ.

4. Розв'язність задачі у випадку неєдиності. Дослідимо розв'язність задачі (1), (2) у випадку невиконання умов теореми 1. Тоді матриця $W(D)V(D)$ — вироджена і для розв'язання системи (17) необхідно встановити ранг і розміщення рангових мінорів цієї матриці. Спочатку дослідимо матрицю V_j (10).

Теорема 3. *Нехай для похідних*

$$P^{(\alpha)}(\lambda, D) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\alpha} P(\lambda, D), \qquad N^{(\alpha)}(\lambda, D) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\alpha} N(\lambda, D),$$

що входять в матрицю V_j виконуються наступні умови:

$$P^{(s)}(\lambda_j(D), D) = 0, \quad s = \overline{0, s_j(D)-1}, \quad P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D) \neq 0, \tag{19}$$

$$N^{(l)}(\lambda_j(D), D) = 0, \quad l = \overline{0, l_j(D)-1}, \quad P^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D) \neq 0, \tag{20}$$

причому $0 \le s_j(D) \le k_j(D)$, $0 \le l_j(D) \le k_j(D) - 1$. Тоді матриця

$$V_j = \begin{pmatrix} V_{j,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і $\operatorname{rank} V_j = \operatorname{rank} V_{j,1} = r_j(D)$, *де матриця $V_{j,1}$ має $r_j(D)$ рядків,*

$$r_j(D) = \left[\frac{k_j(D) - s_j(D) + l_j(D)}{l_j(D)+1}\right] \tag{21}$$

(тут квадратні дужки позначають цілу частину дійсного числа); при цьому $k_j(D) - r_j(D)$ останніх рядків і $s_j(D)$ перших стовпців матриці V_j є нульовими, а перший ненульовий елемент β-го рядка $\left(\beta = \overline{1, r_j(D)}\right)$ міститься в стовпці з номером $\beta(l_j(D)+1) - l_j(D) + s_j(D)$ і дорівнює (з точністю до натурального множника)

$$P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)\left(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\right)^{\beta-1}.$$

Доведення. Позначимо елементи матриці, що стоїть в правій частині (10), через $\omega_{d,m}(\lambda, D)$, тобто

$$\left(P_j(\lambda, D), F_j P_j(\lambda, D), \ldots, F_j^{k_j(D)-1} P_j(\lambda, D)\right) = \left(\omega_{d,m}(\lambda, D)\right)_{d,\, m = \overline{1,\, k_j(D)}}, \tag{22}$$

матриця $\left(\omega_{d,m}(\lambda, D)\right)$ — трикутна, а саме: $\omega_{d,m} = 0$, $d > m$; перший її рядок має вигляд $\omega_{1,m}(\lambda, D) = P^{(m-1)}(\lambda D)$, а головна діагональ $\omega_{d,d}(\lambda, D) = P(\lambda, D)(N(\lambda, D))^{d-1}$.

Доведемо тепер, що

$$\omega_{d,m} = \sum_{|\gamma(d)| = m-d} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)} N^{(\gamma_1)} \ldots N^{(\gamma_{d-1})}, \tag{23}$$

де $\Omega_{\gamma(d)}(d, m)$ — деякі натуральні числа,

$$\gamma(d) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d), \quad |\gamma(d)| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d, \quad \gamma_d \ge 0, \quad \gamma_1 \ge \ldots \ge \gamma_{d-1} \ge 0.$$

Справді, при $d = 1$

$$\omega_{1,m} = \sum_{\gamma_1 = m-1} \Omega_{\gamma_1}(1, m) P^{(\gamma_1)} = \Omega_{m-1}(1, m) P^{(m-1)},$$

при $d = m$

$$\omega_{d,\,d} = \sum_{|\gamma(d)|=0} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)} N^{(\gamma_1)} \ldots N^{(\gamma_{d-1})} = \Omega_{0\ldots0}(d, d) P N^{d-1}.$$

Ці вирази співпадають з наведеними вище для першого рядка і головної діагоналі при $\Omega_{m-1}(1, m) = \Omega_{0\ldots0}(d, d) = 1$. Нехай $d \neq 1$, $d \neq m$, тоді із (22) маємо, що $\omega_{d\,m} = d\omega_{d\,m-1}/d\lambda + N\omega_{d-1,\,m-1}$. Очевидно, що $\omega_{d\,m}$ із (23) задовольняють останню рівність, тобто формула (23) — доведена.

За умов (19), (20) ненульовими в сумі (23) можуть бути лише доданки, для яких $\gamma_{d-1} \geq l_j(D)$, $\gamma_d \geq s_j(D)$, а отже, $\omega_{d\,m}(\lambda_j(D), D) = 0$ при $m - d < s_j(D) + l_j(D)(d-1)$ або при $m < d(l_j(D)+1) + s_j(D) - l_j(D)$, а при $m = d(l_j(D)+1) + s_j(D) - l_j(D)$ елемент $\omega_{d\,m}$ дорівнює

$$\sum_{|\gamma(d)|=m-d} \Omega_{\gamma(d)}(d, m) P^{(\gamma_d)}(\lambda_j(D), D) N^{(\gamma_1)}(\lambda_j(D), D) \ldots N^{(\gamma_{d-1})}(\lambda_j(D), D) =$$

$$= \Omega_{l_j(D),\ldots,l_j(D),s_j(D)}(d, m) P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)\left(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\right)^{d-1} \neq 0.$$

Це означає, що в рядку з номером d перший ненульовий елемент стоїть у стовпці з номером $d(l_j(D)+1) + s_j(D) - l_j(D)$. Оскільки кількість стовпців дорівнює $k_j(D)$, то для ненульового рядка з номером d справедлива нерівність $d(l_j(D)+1) + s_j(D) - l_j(D) \leq k_j(D)$, з якої одержуємо $d \leq (k_j(D) - s_j(D) + l_j(D))/(l_j(D)+1)$. Тому ранг матриці V_j має вигляд (21). Вона має наступну будову: в першому рядку — $s_j(D)$ нулів, далі ненульовий елемент $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)$; в другому $-l_j(D) + 1 + s_j(D)$ нулів, далі ненульовий елемент (з точністю до натурального множника) $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D) N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)$; в третьому — $2(l_j(D) + 1) + s_j(D)$ нулів, далі ненульовий елемент $P^{(s_j(D))}(\lambda_j(D), D)\left(N^{(l_j(D))}(\lambda_j(D), D)\right)^2$ і т. д. до рядка з номером $r_j(D)$ включно. Останні $k_j(D) - r_j(D)$ рядків є нульовими. На закінчення доведення теореми наведемо, для прикладу, матрицю V_j п'ятого порядку:

$$\begin{pmatrix} P & P' & P'' & P''' & P^{\mathrm{IV}} \\ 0 & NP & N'P + 2NP' & N''P + 3N'P' + 3NP'' & \xi_1 \\ 0 & 0 & N^2P & 3NN'P + 3N^2P' & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & N^3P & 6N^2N'P + 4N^2P' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^4P \end{pmatrix},$$

де

$$\xi_1 = N'''P + 4N''P' + 6N'P'' + 4NP''',$$

$$\xi_2 = 3(N')^2P + 4NN''P + 12NN'P' + 6N^2P''.$$

Для подальшого дослідження матриці $W(D)V(D)$ введемо проектори Π_1, Π_2, Π_3 так, що $\Pi_1 = 1$, коли $\det(W(k)V(k)) \neq 0$ (тобто $\sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) = n$) $\Pi_3 =$

$= 1$, коли $V(k) = 0$ (тобто $\sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) = 0$), $\Pi_2 = 1$, коли $0 < \operatorname{rank}(W(k)V(k)) < n$ (тобто $0 < \sum_{j=1}^{p(k)} r_j(k) < n$). Очевидно $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = I$. Тоді існує оператор

$$(W(D)V(D))^{-1}\Pi_1 = V^{-1}(D)W^{-1}(D)\Pi_1 \quad \text{і} \quad W(D)V(D)\Pi_3 = 0.$$

Виключимо з матриці $W(D)\Pi_2$ лінійно залежні стовпці і стовпці, що домножуються на нульові елементи матриць $V_j\Pi_2$. Для цього перенумеруємо корені наступним чином: згрупуємо корені $\lambda_j(D)$, для яких $r_j(D) = 0$, в групу з номером $p_1(D) + 1$, решту коренів згрупуємо в $p_1(D)$ $(1 \le p_1(D) \le p(D))$ груп так, що для довільних коренів $\lambda_i(D)$ і $\lambda_j(D)$ з групи $M_0(\lambda_i(D), D)\Pi_2 = M_0(\lambda_j(D), D)\Pi_2$. Вважаємо, що в першу групу входять корені $\lambda_1(D), \ldots, \lambda_{q_1(D)}(D)$, в другу — корені $\lambda_{q_1(D)+1}(D), \ldots, \lambda_{q_2(D)}(D)$, в третю — корені $\lambda_{q_2(D)+1}(D), \ldots, \lambda_{q_3(D)}(D)$ і т. д. Всередині групи нумеруємо корені $\lambda_j(D)$ так, щоб ранги відповідних матриць V_j не зростали. Тоді матриця $W(D)V(D)\Pi_2$ має такий скелетний [6] розклад:

$$W(D)V(D)\Pi_2 = \tilde{W}\tilde{V}\Pi_2, \tag{24}$$

де

$$\tilde{W} = \left(\tilde{M}_1(D)R^{-1}(r_1(D)), \ldots, \tilde{M}_{p_1(D)}(D)R^{-1}(r_{q_{p_1-1}+1}(D))\right), \tag{25}$$

$\tilde{M}_1(D)$ — матриця розміру $n \times r_1(D)$, що утворена першими $r_1(D)$ стовпцями матриці $M_1(\lambda_1(D), D)$; $\tilde{M}_2(D)$ — матриця розміру $n \times r_{q_1+1}(D)$, що утворена першими $r_{q_1+1}(D)$ стовпцями матриці $M_{q_1+1}(\lambda_{q_1+1}(D), D)$ і т. д.;

$$\tilde{V} = \left(\operatorname{diag}(R(r_1(D))\tilde{V}_1(D), \ldots, R(r_{q_{p_1-1}+1}(D))\tilde{V}_{p_1}(D)), 0\right), \tag{26}$$

$$\tilde{V}_{j+1}(D) = \left(V_{q_j+1,1}, \begin{pmatrix} V_{q_j+2,1} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_{q_{j+1},1} \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad j = \overline{0, p_1 - 1}, \tag{27}$$

причому $\tilde{V}_j(D)$ — матриця розміру

$$r_{q_{j-1}+1}(D) \times \sum_{l=q_{j-1}+1}^{q_j} k_l(D)$$

і рангу $r_{q_{j-1}+1}(D)$ (вважаємо в (25) і далі, що $q_0(D) = 0$).

З формул (25) – (27) випливає, що матриці $\tilde{W}\Pi_2$ і $\tilde{V}\Pi_2$ мають однакові ранги, які дорівнюють

$$\sum_{j=1}^{p_1(D)} r_{q_{j-1}+1}(D),$$

існують також матриці $\left(\tilde{W}^H\tilde{W}\right)^{-1}\Pi_2$ та $\left(\tilde{V}\tilde{V}^H\right)^{-1}\Pi_2$.

Розглянемо три рівняння, які еквівалентні рівнянню (17), а саме:

$$W(D)V(D)\Pi_1 C(x) = \Pi_1\varphi(x); \tag{28}$$

$$W(D)V(D)\Pi_2 C(x) \equiv \tilde{W}\tilde{V}\Pi_2 C(x) = \Pi_2\varphi(x); \tag{29}$$

$$W(D)V(D)\Pi_3 C(x) \equiv 0 = \Pi_3\varphi(x). \tag{30}$$

Введемо ще один проектор $\Pi_W = \tilde{W}\left(\tilde{W}^H\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^H\Pi_2$. Очевидно, що $(\Pi_2 - \Pi_W)$ — також проектор і $(\Pi_2 - \Pi_W)\tilde{W} = 0$, $(\Pi_2 - \Pi_W)\Pi_W = 0$. Зобразимо функцію $\Pi_2\varphi(x)$ у вигляді суми $\Pi_2\varphi(x) = \Pi_W\varphi(x) + (\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x)$ і до отриманого з (29) рівняння $\tilde{W}\tilde{V}\Pi_2 C(x) - \Pi_W\varphi(x) = (\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x)$ застосуємо оператор $\Pi_2 - \Pi_W$. Отримаємо, що функція $\varphi(x)$ повинна задовольняти умову

$$(\Pi_2 - \Pi_W)\varphi(x) = 0. \tag{31}$$

Враховуючи (31), запишемо (29) у такому вигляді:

$$\tilde{W}\tilde{V}\left(\Pi_2 C(x) - \tilde{V}^H(\tilde{V}\tilde{V}^H)^{-1}(\tilde{W}^H\tilde{W})^{-1}\tilde{W}^H\Pi_2\varphi(x)\right) = 0. \tag{32}$$

Оскільки матриця $\tilde{W}$ має повний стовпцевий ранг, то загальний розв'язок рівняння (32) буде мати вигляд

$$\Pi_2 C(x) = \tilde{V}^H(\tilde{V}\tilde{V}^H)^{-1}(\tilde{W}^H\tilde{W})^{-1}\tilde{W}^H\Pi_2\varphi(x) + \Pi_2 v(x), \tag{33}$$

де $\Pi_2 v(x)$ — загальний розв'язок рівняння $\tilde{V}\Pi_2 v(x) = 0$. Останнє рівняння, згідно з (26), (27), розщеплюється на рівняння

$$\tilde{V}_j(D)\Pi_2 v_j(x) = 0 \qquad \left(j = \overline{1, p_1(D)}\right),$$

причому $v(x) = \operatorname{col}\left(v_1(x), \ldots, v_{p_1+1}(x)\right)$ і розміри векторів $v_j(x)$ співпадають з відповідними розмірами матриць $\tilde{V}_j(D)$.

Нехай матриця $\tilde{V}_{j,1}(D)$ $\left(j = \overline{1, p_1(D)}\right)$ утворена зі стовпців матриці $\tilde{V}_j(D)$ з номерами

$$s_{q_{j-1}+1}(D) - l_{q_{j-1}+1}(D) + d\left(l_{q_{j-1}+1}(D) + 1\right) \qquad \left(d = \overline{1, r_{q_{j-1}+1}(D)}\right),$$

матриця $\tilde{V}_{j,2}(D)$ утворена з матриці $\tilde{V}_j(D)$ викреслюванням цих стовпців; аналогічно, вектор $v_{j,1}(x)$ утворений з елементів вектора $v_j(x)$ із вказаними номерами, а вектор $v_{j,2}(x)$ утворений їх викресленням (позначення s_j, l_j і r_j введені в теоремі 3). Тоді розглядувані рівняння задовольняються при довільних $\Pi_2 v_{j,2}(x) \in \mathbb{H}$:

$$\Pi_2 v_{j,1}(x) = \left(\tilde{V}_{j,1}(D)\right)^{-1}\tilde{V}_{j,2}(D)v_{j,2}(x), \qquad j = \overline{1, p_1(D)}. \tag{34}$$

Підсумуємо зроблене в цьому пункті у вигляді теореми.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* (19), (20). *Для існування розв'язку в просторі* $\mathbb{C}^n([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbb{H})$ *задачі* (1), (2) *необхідно і достатньо, щоб вектор правих частин умов* (2) *задовольняв умови* (30) *і* (31). *Розв'язок зображається формулою* (4), *причому вектор* $C(x)$, *що складений за формулами* (11) *і* (16), *визначається рівністю* $C(x) = \Pi_1 C(x) + \Pi_2 C(x) + \Pi_3 C(x)$, *де* $\Pi_1 C(x) = V^{-1}(D)W^{-1}(D)\Pi_1\varphi(x)$, $\Pi_2 C(x)$ *визначається формулою* (33), *в якій компоненти* $\Pi_2 v_{j,2}(x)$ *— довільні функції з* $\mathbb{H}$, *а компоненти* $\Pi_2 v_{j,1}(x)$ *визначаються формулою* (34), $\Pi_3 C(x)$ *— довільні функції з* $\mathbb{H}$.

5. Рівняння першого і другого порядку. При $n = 1$ визначимо проектор Π_1 умовою $P(-A_1(D), D) \neq 0$, тобто $\Pi_1(k) = 1$ для тих k, при яких $P(-A_1(k), k) \neq 0$ і $\Pi_1(k) = 0$ для інших $k \in \mathbb{Z}^m$. Тоді для рівняння першого порядку розв'язок задачі (1), (2) існує при умові $(I - \Pi_1)\varphi_1(x) = 0$ і дається формулою

$$u(t, x) = e^{-A_1(D)t}\Big(P^{-1}(-A_1(D), D)\Pi_1\varphi_1(x) + (I - \Pi_1)v(x)\Big),$$

де $v(x)$ — довільна функція з простору $\mathbb{H}$.

При $n = 2$ проектори Π_{11}, $\Pi_{211} - \Pi_{214}$, Π_{31} визначимо умовою $A_2 \neq \lambda^2$, а проектори Π_{12}, Π_{221}, Π_{222}, Π_{32} — умовою $A_2 = \lambda^2$. Крім того, $M_{01} \neq M_{02}$ для Π_{11}, Π_{211}, Π_{212}, Π_{31}, $M_{01} = M_{02}$ для Π_{213}, Π_{214}; для проектора Π_{11} виконуються умови $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{12} — $P \neq 0$, $N \neq 0$, для Π_{211} — $P_1 \neq 0$, $P_2 = 0$, для Π_{212} — $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{213} — $P_1 \neq 0$, для Π_{214} — $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, для Π_{221} — $P \neq 0$, $N = 0$, для Π_{222} — $P = 0$, $P' \neq 0$, для Π_{31} — $P_1 = P_2 = 0$, для Π_{32} — $P = P' = 0$,

Тоді для рівняння другого порядку розв'язок задачі (1), (2) існує, якщо праві частини (2) задовольняють умови

$$(\Pi_{211} + \Pi_{212} + \Pi_{213} + \Pi_{214} + \Pi_{221} + \Pi_{222})\varphi_2 =$$
$$= (\Pi_{211}M_{01} + \Pi_{212}M_{02} + \Pi_{213}M_{01} + \Pi_{214}M_{02} + \Pi_{221}M_0 + \Pi_{222}M_0)\varphi_1,$$
$$\Pi_{31}\varphi_1 = \Pi_{31}\varphi_2 = \Pi_{32}\varphi_1 = \Pi_{32}\varphi_2 = 0$$

і має вигляд

$$u(t, x) = \frac{\Pi_{11}}{M_{02} - M_{01}}\left(\frac{e^{\lambda_1 t}}{P_1}(M_{02}\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{P_2}(\varphi_2 - M_{01}\varphi_1)\right) +$$
$$+ e^{\lambda_1 t}\left(\left(\frac{\Pi_{211}}{P_1} + \frac{\Pi_{213}P_1}{|P_1|^2 + |P_2|^2}\right)\varphi_1 + \left(\Pi_{212} - \frac{\Pi_{213}P_2}{P_1} + \Pi_{214} + \Pi_{31}\right)v_1\right) +$$
$$+ e^{\lambda_2 t}\left(\left(\frac{\Pi_{212}}{P_2} + \frac{\Pi_{213}P_2}{|P_1|^2 + |P_2|^2}\right)\varphi_1 + \Pi_{213}v_1 + (\Pi_{211} + \Pi_{31})v_2\right) +$$
$$+ te^{\lambda t}\left(\frac{\Pi_{12}}{PN}(\varphi_2 - M_0\varphi_1) + \left(\frac{\Pi_{221}P'}{|P|^2 + |P'|^2} + \frac{\Pi_{222}}{P'}\right)\varphi_1 + \Pi_{221}v_1 + \Pi_{32}v_2\right) +$$
$$+ e^{\lambda t}\left(\frac{\Pi_{12}}{P}\varphi_1 + \frac{\Pi_{12}P'}{P^2N}(\varphi_2 - M_0\varphi_1) + \frac{\Pi_{221}P}{|P|^2 + |P'|^2}\varphi_1 + \left(\Pi_{222} + \Pi_{32} - \frac{\Pi_{221}P'}{P}\right)v_1\right),$$

де v_1, v_2 — довільні функції з $\mathbb{H}$.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962 – 1971.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
5. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами // Укр. мат. журн. – 1976. – **38**, № 5. – С. 582 – 587.
6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

Одержано 30.07.93