УДК 517.535

Р. З. Калинець, А. А. Кондратюк (Львів. ун-т)

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЗРОСТАННЯ МОДУЛЯ І АРГУМЕНТА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ В $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$-МЕТРИЦІ

Under sufficiently general assumptions, sets of entire functions f, of growing functions λ, of complex-valued functions H from $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$, and sets of numbers $p \in [1, +\infty]$ are described, for which

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log f(re^{i\theta}) - \lambda(r)H(\theta)|^p\, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} = o(\lambda(r)), \quad r \to \infty.$$

При досить загальних припущеннях описуються множини цілих функцій f, зростаючих функцій λ, комплекснозначних функцій H з $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$, чисел $p \in [1, +\infty]$, для яких

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log f(re^{i\theta}) - \lambda(r)H(\theta)|^p\, d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} = o(\lambda(r)), \quad r \to \infty.$$

1. Вступ. Формулювання основних результатів. Додатні, неспадні, необмежені, неперервні на $\mathbb{R}_+$ функції λ, $\lambda(r) = O(r)$, $r \to \infty$, будемо називати функціями зростання.

Відомі приклади цілих функцій [1–4], поведінка на нескінченності яких у певному сенсі близька до поведінки функції $\exp z^p$, $p > 0$. Загальніші приклади [5, с. 125] дають асимптотичну поведінку $f(re^{i\theta}) \sim \exp(\lambda(r)H(\theta))$, $r \to +\infty$. Інакше кажучи, $\log f(re^{i\theta}) = \lambda(r)H(\theta) + o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, в певній топології. Йдеться про цілі функції цілком регулярного зростання відносно функцій λ, близьких до степеневих. Теорія таких цілих функцій була започаткована в кінці 30-х років Б. Я. Левіним і А. Пфлюгером. Вона детально викладена в [5]. Функції, які є об'єктами вивчення в цій теорії, характеризуються регулярною поведінкою не лише свого модуля, а й аргумента. Метод Фур'є для цілих і мероморфних функцій, розроблений, головним чином, А. Рубелом, Б. Тейлором, Д. Майзлом [6, 7], дав можливість одному з авторів цієї статті розвинути теорію функцій цілком регулярного зростання відносно досить загальних функцій зростання λ і поширити основні її положення на мероморфні функції. Ця теорія викладена в [6]. Однак поведінка аргументів цілих та мероморфних функцій не була досліджена.

Тут при досить загальних припущеннях розв'язуємо задачу опису квадрик множин цілих функцій f, функцій зростання λ, функцій H з $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$, чисел $p \in [1, +\infty)$ таких, що

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log f(re^{i\theta}) - \lambda(r)H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Надалі вважаємо функцію

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(\varsigma)}{f(\varsigma)}\, d\zeta, \qquad f(0) = 1,$$

визначеною в комплексній площині з радіальними розрізами від нулів цілої функції f до ∞.

Функції зростання λ і $\tilde{\lambda}$ такі, що $\lambda(r)/\widetilde{\lambda(r)} \to 1$ при $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо їх ототожнювати.

Додатна, неперервна на $\mathbb{R}_+$ функція $L(r)$ називається повільно змінною, якщо $\lim_{r\to\infty} L(cr)/L(r) = 1$ рівномірно на кожному відрізку $0 < a \le c \le b < < +\infty$.

Позначимо

$$l_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f(re^{i\theta})\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція, $f(0) = 1$, λ — функція зростання, $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, $H \in \mathbb{L}^p[0, 2\pi]$.*

Співвідношення виконується тоді і лише тоді, коли

1) $H(\theta) \equiv l_0 \ge 0$, $\lambda(r)$ опукла відносно $\log r$ при $l_0 > 0$, f цілком регулярно зростає відносно λ [6, с. 75] *з індикатором H, $\lim_{r\to\infty} l_k(r,f)/\lambda(r) = = 0$ для кожного $k \ne 0$,*

або

2) $\lambda(r) = r^p L(r)$, $p > 0$, L — повільно змінна функція, f цілком регулярно зростає відносно λ, H — індикатор [5, с.125] *функції $\log f$.*

Якщо співвідношення (1) *виконується при деякому $p \in [1, +\infty)$, то воно справедливе при будь-якому $p \in [1, +\infty)$.*

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція, $f(0) = 1$, λ – функція зростання, $H \in \mathbb{L}^p[0, 2\pi]$, $\operatorname{Im} H$ — ненульова функція в $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$.*

Співвідношення (1) *виконується тоді і лише тоді, коли справедливе твердження* 2 *теореми* 1.

Якщо (1) *виконується при деякому $p \in [1, +\infty)$, то і при будь-якому такому p.*

Зауважимо, що теорема 2 характеризує, з одного боку, клас повільно змінних функцій, а з іншого — клас цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна – Пфлюгера.

2. Допоміжні твердження. Прямі та обернені формули для коефіцієнтів Фур'є функції $\log f$. Нехай $\{a_j\}$ — нулі функції f, $\alpha_j = \arg a_j$. Позначимо

$$n_k(r,f) = \sum_{|a_j|\le r} e^{-ik\alpha_j},$$

$$N_k(r,f) = \int_0^r \frac{n_k(t, f)}{t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n_0(r,f) = n(r,f); \quad N_0(r,f) = N(r,f).$$

Нехай також $\log f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m z^m$ — розвинення в деякому околі точки $z = 0$.

Лема 1 [6, с. 10, 11]. *Справедливі співвідношення*

$$l_k(r,f) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n_k(t, f)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$l_{-k}(r,f) = r^{-k} \int_0^r \frac{n_{-k}(t,\ f)}{t^{-k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$N_k(r,f) = l_k(r,f) - k \int_0^r \frac{l_k(t,\ f)}{t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

При доведенні леми 1 використаємо наступний результат з [8].

Лема А. *Нехай*

$$b_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(r^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta, \quad r \neq |a_j|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$b_k(r,f) = k\gamma_k r^k + \sum_{|a_j| \le r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_0(r,f) = n_0(r,f),$$

$$b_{-k}(r,f) = \sum_{|a_j| \le r} \left(\frac{a_j}{r}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

***Доведення леми* 1.** За теоремою Фубіні

$$\int_0^r \frac{b_k(t,f)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^r \frac{f'(te^{i\theta})}{f(te^{i\theta})} te^{i\theta} \frac{dt}{t} \right\} e^{-ik\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f\left(r e^{re^{i\theta}}\right) d\theta = l_k(r,f), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Зауважимо, що

$$\sum_{|a_j| \le r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k = r^k \int_0^r \frac{dn_k(t,f)}{t^k} = n_k(r,f) + k r^k \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

З (5) і леми А за допомогою інтегрування частинами одержуємо співвідношення (2) та (3), а також (4) при $k = 0$.

Інтегруючи в (2) і (3) частинами, маємо

$$l_k(r,f) = \gamma_k r^k + N_k(r,f) + k r^k \int_0^r \frac{N_k(t,f)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$l_{-k}(r,f) = N_{-k}(r,f) - k r^{-k} \int_0^r \frac{n_{-k}(t,f)}{t^{-k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Позначимо

$$\Phi_k(r) = r^k \int_0^r \frac{N_k(t,\ f)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$r\Phi_k'(r) = k\,r^k\int_0^r \frac{N_k(t,f)}{t^{k+1}}\,dt + N_k(r,f), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Звідси і з (6) випливає

$$\Phi_k'(r) = \frac{1}{r}\,l_k(r,f) - \gamma_k r^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$\Phi_k(r) = \int_0^r \frac{l_k(t,f)}{t}\,dt - \frac{1}{k}\gamma_k r^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\int_0^r \frac{N_k(t,f)}{t^{k+1}}\,dt = \frac{1}{r^k}\int_0^r \frac{l_k(t,f)}{t}\,dt - \frac{1}{k}\gamma_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Продиференціювавши цю рівність по r і домноживши на r^{k+1}, одержимо (4) для $k \in \mathbb{N}$.

При $-k \in \mathbb{N}$ згідно з (7) і (8) маємо

$$\Phi_k'(r) = \frac{1}{r}\,l_k(r,f). \tag{9}$$

Звідси

$$r^k\int_0^r \frac{N_k(t,f)}{t^{k+1}}\,dt = \int_0^r \frac{l_k(t,f)}{t}\,dt, \quad -k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

З (8) – (10) випливає (4) при $-k \in \mathbb{N}$.

Лема 2 (див. також [9]). *Нехай* $\varphi(x)$ *— неперервна на* $\mathbb{R}_+$ *функція,* $c = \mathrm{const}$. *Обмежені знизу розв'язки* $u(x)$ *рівняння Рікатті*

$$u' + u^2 - c^2 - \varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) = o(1), \qquad x \to +\infty, \tag{11}$$

мають скінченні границі c *або* $-c$ *при* $x \to \infty$.

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує x_0 таке, що при $x > x_0$ виконується $|\varphi(x)| < \varepsilon^2/2$.

Нехай $c = 0$. Якщо $|u| > \varepsilon$ при $x > x_0$, то з (11) випливає $u' = -u^2 + \varphi(x) < -\varepsilon^2/2$. Таким чином, починаючи з деякого x_1 графік функції u потрапляє в півсмугу $\{(x,u) : x_1 < x < +\infty,\ -\varepsilon < u < \varepsilon\}$, або $u \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Останнє неможливо, бо функція u обмежена знизу.

Нехай тепер $c > 0$, $\varepsilon < c/2$. Якщо $|u| < c - \varepsilon$ при $x > x_0$, то співвідношення (11) дає $u' = -u^2 + c^2 + \varphi(x) > 2c\varepsilon - 2\varepsilon^2 > 2\varepsilon^2$. Тобтос якщо графік функції потрапляє в півсмугу $\{(x,u) : x_0 < x < +\infty,\ |u| < c - \varepsilon\}$, то вона строго зростає. Якщо ж $|u| > c + \varepsilon$ при $x > x_0$, то з (6) випливає $u' = -u^2 + c^2 + \varphi(x) < -2c\varepsilon < 0$. Тобто поза півсмугою $\{(x,u) : x_0 < x < +\infty,\ |u| < c + \varepsilon\}$ при $x > x_0$ функція u спадає. Таким чином, враховуючи обмеженість функції u знизу, маємо $u \to c$ або $u \to -c$ при $x \to +\infty$.

3. Доведення теореми 1. Із співвідношення (1) випливає існування границь

$$\lim_{r\to\infty}\frac{l_k(r,f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

які позначимо через l_k, і рівність їх коефіцієнтам Фур'є функції H, а також

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \log|f(re^{i\theta})| - \lambda(r)\operatorname{Re} H(\theta) \right| d\theta = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty.$$

Отже, f цілком регулярно зростає [6, с.75; 10, 11], з індикатором $\operatorname{Re} H$.

Якщо $l_k = 0$ при $k \neq 0$, то $H(\theta) = l_0 \geq 0$ і при $l_0 > 0$ виконується $\lambda(r) \sim N(r)/l_0$ при $r \to +\infty$. Тобто $\lambda(r)$ опукла відносно $\log r$, і маємо умову 1.

Позначимо

$$\lambda_1(r) = \int_0^r \frac{\lambda(t)}{t}\,dt; \qquad \lambda_2(r) = \int_0^r \frac{\lambda_1(t)}{t}\,dt.$$

Зауважимо, що відношення $\lambda(r)/\lambda_2(r)$ та $\lambda_1(r)/\lambda_2(r)$ обмежені. Дійсно, оскільки $\lambda(2r) \leq M\lambda(r)$ для всіх $r > 0$ при деякому $M > 0$, то

$$\lambda_1(e\,r) \geq \int_r^{er} \frac{\lambda(t)}{t}\,dt \geq \lambda(r); \qquad \lambda_2(e\,r) \geq \lambda_1(r).$$

Тому $\lambda(e^2 r)/\lambda_2(e^2 r) \leq \lambda(e^2 r)/\lambda(r) \leq M^{3}$, а також

$$\lambda_1(e\,r) = \int_0^{er} \frac{\lambda(t)}{t}\,dt = \int_0^r \frac{\lambda(et)}{t}\,dt \leq M^2\lambda_1(r);$$

$$\frac{\lambda_1(er)}{\lambda_2(er)} \leq \frac{\lambda_1(er)}{\lambda_1(r)} \leq M^2.$$

Нехай тепер існує $k \neq 0$ таке, що $l_k \neq 0$. Через $c_k(r, f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є функції $|\log|f(re^{i\theta})||$, через $A_k(r, f)$ — функції $\operatorname{Arg} f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im}\log f(re^{i\theta})$. Тоді $l_k(r,f) = c_k(r,f) + iA_k(r,f)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Обернені формули для $c_k(r, f)$ мають вигляд [6, с.106]

$$N_k(r,f) = c_k(r,f) - k^2\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{c_k(\tau, f)}{\tau}\,d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Прирівнюючи праві частини в (4) і (12), маємо

$$iA_k(r,f) - k\int_0^r \frac{l_k(t,f)}{t}\,dt = -k^2\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{c_k(\tau,f)}{\tau}\,d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{12$'$}$$

Зробимо заміну $\lambda_2(e^x) = y(x)$. Тоді $\lambda_1(e^x) = y'(x)$. Границі відношень $c_k(r,f)/\lambda(r)$; $A_k(r,f)/\lambda(r)$ при $r \to +\infty$ позначимо відповідно c_k, A_k. Враховуючи обмеженість відношень $\lambda(r)/\lambda_2(r)$, $\lambda_1(r)/\lambda_2(r)$ з (12$'$) одержимо

$$iA_k y'' - k\,l_k y' + k^2 c_k y + o(y) = 0, \quad x \to +\infty. \tag{13}$$

Покажемо, що $y'(x)/y(x)$ має додатну границю при $x \to +\infty$.

Якщо $A_k = 0$, то $c_k \neq 0$ і з (13) випливає

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \to k > 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{14}$$

Якщо ж $A_k \neq 0$, то поділивши рівняння (13) на iA_k і прирівнявши дійсну ліву частину його до нуля, маємо

$$y'' - k\left(1 + \operatorname{Re}\frac{c_k}{iA_k}\right)y' + k^2 \operatorname{Re}\frac{c_k}{iA_k}\,y + o(y) = 0, \quad x \to +\infty. \tag{15}$$

Зробимо заміну

$$u = \frac{y'}{y} - k\,\frac{1+\gamma}{2}. \tag{16}$$

Тоді

$$u' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2; \quad u^2 = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - k(1+\gamma)\frac{y'}{y} + \frac{k^2}{4}(1+\gamma)^2$$

і рівність (15) набуває вигляду (11), де $c = |k(1+\gamma)|/2$, $\gamma \neq 0$. З леми 2, співвідношень (14) і (16) випливає $y'/y \to k$, або $y'/y \to \gamma \neq 0$ при $x \to +\infty$. Тобто відношення $\lambda_1(r)/\lambda_2(r)$ має при $r \to +\infty$ додатну границю, яку позначимо через ρ. Звідси, як відомо [4, с. 73; 6, с. 117], випливає $\lambda(r) = r^{\rho} L(r)$, де $L(r)$ — повільно змінна функція.

Використовуючи (4), маємо

$$\Delta_k = l_k\left(1 - \frac{k}{\rho}\right), \qquad \Delta_k = \lim_{r\to\infty}\frac{N_k(r,f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Звідси при нецілому ρ

$$H(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} l_k e^{ik\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{p\,\Delta_k}{p-k} e^{ik\theta} \tag{17}$$

та

$$H(\theta) = \sum_{k\neq p} \frac{p\,\Delta_k}{p-k} e^{ik\theta} + l_p e^{ip\theta}. \tag{18}$$

За теоремою Каратеодорі – Леві [6, с. 98] Δ_k — коефіцієнти Фур'є – Стільтьєса деякої додатної міри на одиничному колі. Отже, H співпадає з індикатором функції $\log f$ [5, с.125]. Таким чином, маємо умову 2.

Нехай тепер виконується умова 1 або 2. Зауважимо, що з умови на λ випливають нерівності [6, с. 85; 7; 10]

$$\int_r^{\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}\,dt \leq \frac{M\lambda(r)}{k r^k} \tag{19}$$

при деякому $M > 0$ і всіх k, починаючи з деякого. Окрім того, λ має [6, с. 85; 7] скінченний порядок і з (2) одержуємо

$$l_k(r,f) = -r^k \int_r^{\infty} \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}\,dt,$$

починаючи з деякого k_0. Звідси, враховуючи (19) і нерівності $|n_k(t)| \leq n(t) \leq$ $\leq N(er)$, при деякому $M_1 > 0$, починаючи з k_0, маємо

$$|l_k(r,f)| = \frac{M_1\lambda(r)}{k}. \tag{20}$$

Окрім того, з (2) і формул для $c_k(r,f)$ [6, с. 10; 7; 10] випливає, що при $k > 0$ виконується

$$|l_k(r,f)| \le 2|c_k(r,f)| + \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{|n_k(t,f)|}{t} \le$$

$$\le 2|c_k(r,f)| + N(r,f) \le M_2\lambda(r), \tag{21}$$

оскільки f цілком регулярно зростає, а також $l_0(r,f) = N(r) \le M_2\lambda(r)$.

Якщо ж $k < 0$, то з (3) знаходимо

$$l_k(r,f) = -\frac{n_k(r,f)}{k} + \frac{1}{k}\int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} dn_k(t,f),$$

звідки

$$|l_k(r,f)| \le \frac{2n(r,f)}{|k|}. \tag{22}$$

З (20) – (22) випливають нерівності

$$|l_k(r,f)| \le \frac{C\lambda(r)}{|k|+1} \tag{23}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ при деякому $C > 0$.

Зауважимо, що при виконанні умови 2 співвідношення (17) і (18) дають аналогічні нерівності для коефіцієнтів Фур'є індикатора H функції $\log f$:

$$|l_k| \le \frac{C}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

Використовуючи нерівність Хаусдорфа – Юнга, нерівності (23), (24), співвідношення $l_0(r,f) = N(r) \sim l_0\lambda(r)$, $r \to \infty$, а у випадку $\lambda(r) = r^\rho L(r)$ і співвідношення $l_k(r,f) \sim l_k\lambda(r)$, $r \to \infty$, які випливають з рівностей [6, с. 98, 119] $n_k(r,f) = p\,\Delta_k\lambda(r) + o(\lambda(r))$, $r \to \infty$, $k \in \mathbb{Z}$, одержимо (1) для $p \in \in [2, +\infty)$. Враховуючи ж монотонність p-х інтегральних середніх по p, одержимо (1) для всіх $p \in [1, +\infty)$.

4. Доведення теореми 2. Справедливість співвідношення (1) при будь-якому $p \in [1, +\infty)$ для кожної цілої функції цілком регулярного зростання відносно функції зростання $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, $L(r)$ — повільно змінна, тільки що доведена.

Припустимо тепер, що виконується (1) і $\operatorname{Im} H$ — ненульова функція з $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$. Тоді існує $k \ne 0$ таке, що $A_k \ne 0$, $l_k \ne 0$ (див. початок доведення теореми 1). Із співвідношення (4) при такому k випливає, що відношення $\lambda_1(r)/\lambda(r)$ обмежене деякою сталою K. Звідси, в свою чергу, випливає обмеженість відношення $\lambda_2(r)/\lambda(r)$. Дійсно,

$$\lambda_2(r) \le K\int_0^r \frac{\lambda(t)}{t}\,dt \le K^2\lambda(r).$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (4) та (12) і враховуючи існування границь відношень $l_k(r,f)/\lambda(r)$, маємо

$$iA_k\lambda(r) - k\,l_k\lambda_1(r) + k^2 c_k\lambda_2(r) = o(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) = o\,\lambda(r)), \quad r \to \infty.$$

Якщо $c_k = 0$, то одержуємо $\lambda(r)/\lambda_1(r) \to k$ при $r \to +\infty$. Звідси [4, с. 73; 6, с. 117] $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho = k$, L — повільно змінна функція.

Якщо ж $c_k \neq 0$, то, як і раніше, зробивши заміну $\lambda_2(e^x) = y(x)$, перепишемо (12′) у вигляді

$$[iA_k + \psi(x)]\frac{y''}{y} - k\,l_k\frac{y'}{y} + k^2 c_k = 0, \quad \psi(x) = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Беручи дійсну чи уявну при $\operatorname{Re}(c_k / iA_k) = 0$ частину, одержуємо

$$[1 + \psi_1(x)]\frac{y''}{y} - k(1+\gamma)\frac{y'}{y} + k^2\gamma = 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \psi_1(x) = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Зробимо тут заміну (16). Тоді

$$u' = -u^2 + \alpha(x)u + c^2 + \beta(x); \quad \alpha(x) = o(1), \quad \beta(x) = o(1), \quad x \to +\infty, \tag{25}$$

де $c = |k(1-\gamma)|/2$.

Покажемо, що функція u обмежена при великих x. Можна вважати $|\alpha(x)| < 1$, $|\beta(x)| < 1$. Тоді нулі квадратного тричлена $-u^2 + \alpha u + c^2 + \beta$ обмежені зверху. Отже, якщо при досить великих P виконується $u \geq P$, то з рівності (25) випливає $u' \leq -1$. Тобто u обмежена зверху при великих x, а з (16) випливає її обмеженість знизу. Таким чином, рівняння (25) набуває вигляду (11) і, щоб завершити доведення теореми 2, досить врахувати доведення теореми 1.

1. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 618 с
2. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
6. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Выща шк., 1988. – 196 с.
7. *Rubel L. A.* Entire and meromorphic functions. – New York: Springer, 1996. – 200 p.
8. *Townsend D.* Total variation of arg f and $\log|f|$ // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – **128**. – P. 347–361.
9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 320 с.
10. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. I // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 3. – С. 386–408; II – 1980. – **133**, № 1 – С. 118–132; III – 1983. – **120**, №3. – С. 331–343.
11. *Кондратюк А. А.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 315–320.

Одержано 09.04.96