УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, Ю. А. Ковальчук (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ИЗ $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$. II

Conditions of convergence and the convergence rate of random functional series from the spaces $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ are investigated in various norms. The results obtained are applied when studying a boundary-value problem for a hyperbolic equation with random initial conditions.

Досліджено умови та швидкість збіжності випадкових функціональних рядів із просторів $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ у різноманітних нормах. Одержані результати застосовуються до дослідження крайової задачі для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами.

1. О сходимости случайных рядов в нормах пространств Орлича. Пусть $\{f_k(x),\ k=\overline{1,\infty}\}$ — последовательность измеримых функций на $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$, принадлежащих классу $B_Z^2(X,S)$, где $(S, \mathcal{A}_S, \nu)$ — измеримое пространство; $q_k(s)$ — последовательность функций из $L_2(S)$; c_n — числовая последовательность, для которой выполняется неравенство (33) из определения 7 [1].

Пусть $\{\xi_k,\ k=\overline{1,\infty}\}$ — последовательность случайных величин из строго $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ семейства Δ с определяющей постоянной C_Δ (определение 5 [1]); для N-функции выполняются предположения теоремы 3 [1].

Обозначим

$$S_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \xi_k f_k(x); \qquad S_m^n(\bar a, x) = \sum_{k=m}^{n} \xi_k a_k f_r(x);$$

$$R_m^n(\bar a, s) = \sum_{k=m}^{n} \xi_k a_r q_k(s),$$

где $m \le n \le \infty$, $\bar a = \{a_k,\ k=\overline{1,\infty}\}$ — некоторая числовая последовательность.

Теорема 1. *Пусть существует монотонно неубывающая последовательность $b_k > 0$, $b_k \uparrow \infty$, $k\to\infty$, такая, что для любого $m \ge 1$ выполняется*

$$W_m = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\mathrm{E}\|S_m^k(\bar b, s)\|_2^2\right)^{1/2} c_k \left(b_k^{-1} - b_{k+1}^{-1}\right) < \infty \tag{1}$$

и при $m\to\infty$, $n\to\infty$

$$W_m \to 0, \qquad c_n b_n^{-1}\left(\mathrm{E}\|R_m^n(\bar b, s)\|_2^2\right)^{1/2} \to 0. \tag{2}$$

Тогда

$$\big\| \|S_1^n(x) - S_1^\infty(x)\|_Z \big\|_U \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|_U$ — норма в пространстве Орлича случайных величин $L_U(\Omega)$, порожденном N-функцией $U(x) = \exp\{\varphi^*(x)\} - 1$, $\varphi^*(x)$ — функция, дополнительная к $\varphi(x)$ (см. определение 3 [1]).

При этом для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\{\|S_m^\infty(x)\|_Z > \varepsilon\} \le \inf_{s>1} \frac{s^2}{s^2-1} \exp\left(-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{s\Lambda C_\Delta B_m^\infty}\right)\right), \tag{4}$$

где $B_m^\infty = \sum_{k=m}^{\infty} (b_k^{-1} - b_{k+1}^{-1})\, c_k \left(\mathrm{E}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2^2\right)^{1/2}$, *а* Λ *определена в лемме* 5 (*см. замечание* 1 [1]).

При $\varepsilon > 1$ *выполняется неравенство*

$$P\{\|S_m^\infty(x)\|_Z > \varepsilon\} \le \varepsilon^2 \exp\left(-\varphi^*\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\Lambda C_\Delta B_m^\infty}\right)\right). \tag{5}$$

Доказательство. Для любой последовательности $b_k > 0$ справедливо равенство (преобразование Абеля)

$$S_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k S_m^k(\bar b, x), \tag{6}$$

где

$$a_k = \begin{cases} (b_k^{-1} - b_{k+1}^{-1}), & k = m, \dots, n-1; \\ b_k^{-1}, & k = n. \end{cases}$$

Из равенства (6) и [1] следует

$$\|S_m^n(x)\|_Z \le \sum_{k=m}^{n} a_k \|S_m^k(\bar b, x)\|_Z \le \sum_{k=m}^{n} a_k c_k \|R_m^k(\bar b, s)\|_2. \tag{7}$$

Пусть $Z_m^n > 0$, а $\delta_k \ge 0$ — такие числа, что $\sum_{k=m}^{n} \delta_k = 1$. Тогда из (7), выпуклости функции $\varphi^*(x)$ и неравенства Гельдера следуют соотношения

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{1}{Z_m^n}\sum_{k=m}^{n} a_k c_k \|R_m^k(\bar b, s)\|_2\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\sum_{k=m}^{n} \delta_k \frac{a_k c_k \|R_m^k(\bar b, s)\|_2}{Z_m^n \delta_k}\right)\right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\exp\left\{\sum_{k=m}^{n} \delta_k \varphi^*\left(\frac{a_k c_k}{Z_m^n \delta_k}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2\right)\right\} \le$$

$$\le \prod_{k=m}^{n}\left(\mathrm{E}\left(\exp\left\{\delta_k \varphi^*\left(\frac{a_k c_k}{Z_m^n \delta_k}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2\right)\right\}\right)^{1/\delta_k}\right)^{\delta_k} =$$

$$= \prod_{k=m}^{n}\left(\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{a_k c_k}{Z_m^n \delta_k}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2\right)\right\}\right)^{\delta_k}. \tag{8}$$

Положим теперь для некоторого $s > 1$

$$Z_m^n = s\Lambda C_\Delta \sum_{k=m}^{n} a_k c_k \left(\mathrm{E}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2^2\right)^{1/2};$$

$$\delta_k = \frac{a_k c_k s \Lambda C_\Delta}{Z_m^n}\left(\mathrm{E}\|R_m^k(\bar b, s)\|_2^2\right)^{1/2}.$$

При этом выполняется соотношение

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{a_k c_k}{Z_m^n \delta_k}\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\sqrt{\frac{\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2}{s^2\Lambda^2 C_\Delta^2\,\mathrm{E}\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2}}\right)\right\}. \tag{9}$$

Поскольку

$$\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2 = \sum_{k=m}^{n}\sum_{l=m}^{n}\xi_k\xi_l b_k b_l\int_X q_k(s)\,q_l(s)\,d\nu(s)$$

— неотрицательно определенная квадратичная форма от $\{\xi_k,\ k=\overline{m,n}\}$, вследствие теоремы 3 и соотношения (9) [1] имеет место неравенство

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{a_k c_k}{Z_m^n \delta_k}\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2\right)\right\} \le \frac{s^2}{s^2-1}. \tag{10}$$

Из (8) – (10) следует, что при любом $s>1$ справедливо неравенство

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|S_m^n(x)\|_Z}{s\Lambda C_\Delta B_m^n}\right)\right\} \le \frac{s^2}{s^2-1}, \tag{11}$$

где $B_m^n = \sum_{k=m}^{n} a_k c_k\left(\mathrm{E}\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2\right)^{1/2}$.

Неравенство (11) означает, что случайная величина $\|S_m^n(x)\|_Z$ принадлежит пространству Орлича, порожденному N-функцией $U(x)=\exp\{\varphi^*(x)\}-1$ и

$$\big\|\|S_m^n(x)\|_Z\big\|_U \le \sqrt{2}\Lambda C_\Delta B_m^n. \tag{12}$$

Для того чтобы установить (12), в (11) положим $s=\sqrt{2}$.

Из условий теоремы (1) и (2) следует, что $B_m^n\to 0$ при $n,m\to\infty$. Поэтому выполняется утверждение (3).

Перейдя теперь к пределу в (11) при $n\to\infty$, получим

$$\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|S_m^\infty(x)\|_Z}{s\Lambda C_\Delta B_m^\infty}\right)\right\} \le \frac{s^2}{s^2-1}. \tag{13}$$

Отсюда и из неравенства Чебышева следует неравенство

$$P\{\|S_m^\infty(x)\|_Z>\varepsilon\} \le \frac{\mathrm{E}\exp\left\{\varphi^*\left(\|S_m^\infty(x)\|_Z/(s\Lambda C_\Delta B_m^\infty)\right)\right\}}{\exp\left\{\varphi^*\left(\varepsilon/(s\Lambda C_\Delta B_m^\infty)\right)\right\}} \le$$

$$\le \frac{s^2}{s^2-1}\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{s\Lambda C_\Delta B_m^\infty}\right)\right\}. \tag{14}$$

Из (14) следует (4). Если в (14) положить $1/s^2 = 1-1/\varepsilon^2$, то получим (5).

***Следствие* 1.** *Условия* (1), (2) *теоремы* 1 *выполняются, если существует такая монотонно неубывающая последовательность* $b_k>0$, $b_k\uparrow\infty$ *при* $k\to\to\infty$, *для которой*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right) < \infty \tag{15}$$

и выполняется условие

$$\sup_{1\le m\le k}\ \sup_{1\le k<\infty}\left(\mathrm{E}\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2\right)^{1/2} < A, \tag{16}$$

где A — некоторая постоянная.

Следствие 1 очевидно.

Приведем теперь несколько следствий из теоремы 1 для случая, когда система функций $q_k(s)$ ортогональна $\left(\int_S q_k(s)\,q_l(s)\,d\nu(s) = 0,\ k\ne l\right)$, либо когда случайные величины ξ_k центрированы и некоррелированы $(\mathrm{E}\,\xi_k = 0,$ $\mathrm{E}\,\xi_k\xi_l = 0,\ k\ne l)$. В этом случае

$$\mathrm{E}\,\|R_m^k(\bar{b},s)\|_2^2 = \sum_{l=m}^{k} b_l^2\,\mathrm{E}\xi_l^2\int_S q_l^2(s)\,d\nu(s) = T_m^k. \tag{17}$$

Следствие 2. *Если случайные величины ξ_k центрированы и некоррелированы, либо система функций $q_k(s)$ ортогональна, то условия* (1) *и* (2) *теоремы* 1 *выполняются, когда найдется такая монотонно невозрастающая последовательность b_k, $b_k\uparrow\infty$ при $k\to\infty$, что для нее сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(T_0^k)^{1/2}c_k\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right) < \infty, \tag{18}$$

где T_0^k заданы в (17), *а неравенства* (4) *и* (5) *выполняются при замене B_m^∞ на $\breve{B}_m^\infty$, где $\breve{B}_m^\infty = \sum_{k=m}^{\infty}\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right)c_k\,(T_m^k)^{1/2}$.*

Действительно, в этом случае

$$W_m = \sum_{k=m}^{\infty}\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right)c_k\,(T_m^k)^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty}\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right)c_k\,(T_0^k)^{1/2}\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Далее,

$$\frac{c_n}{b_n}\left(\mathrm{E}\|R_m^n(\bar{b},s)\|_2^2\right)^{1/2} = \frac{c_n}{b_n(T_m^n)^{1/2}} \le \frac{c_n}{b_n(T_0^n)^{1/2}} \le$$

$$\le c_n(T_0^n)^{1/2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty}(T_0^k)^{1/2}c_k\left(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}\right)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

т. е. условия (1) и (2) выполняются.

2. Обоснование метода Фурье для гиперболических уравнений со случайными начальными условиями. Рассмотрим краевую задачу для однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) - q(x)\,u(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= 0, \qquad 0\le x\le\pi, \quad t\ge 0; \tag{19}$$

$$u(0,t)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial t}u(0,t)\sin\alpha = 0; \qquad u(\pi,t)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial t}u(\pi,t)\sin\beta = 0; \tag{20}$$

$$u(x,0) = \xi(x); \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \eta(x), \tag{21}$$

где $0 \le \alpha, \beta \le 2\pi$; функции q, ρ — непрерывны на $[0,\pi]$; $p(x)$ имеет непрерывную производную $p'(x)$ на $[0,\pi]$; $\rho(x) > 0$, $q(x) \ge 0$; случайные процессы $\xi(x)$ и $\eta(x)$ центрированы и некоррелированы; $\mathrm{E}\,\xi(x)\xi(y) = B(x,y)$, $\mathrm{E}\,\eta(x)\eta(y) = R(x,y)$. Предполагаем, что функции $B(x,y)$ и $R(x,y)$ непрерывны на $0 \le x, y \le \pi$.

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля, соответствующую задаче (19) – (21):

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}X(x)\right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$
$$X(0)\cos\alpha + X'(0)\sin\alpha = 0, \qquad X(\pi)\cos\beta + X'(\pi)\sin\beta = 0. \tag{22}$$

Пусть λ_k — собственные числа, занумерованные в порядке возрастания, а $X_k(x)$ — ортонормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции задачи (22), соответствующие λ_k.

Для простоты предполагаем, что все собственные числа задачи (22) положительны. Различные условия, когда все $\lambda_k > 0$, можно найти, например, в работе [2].

Формально решение задачи (19) – (21) можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right), \tag{23}$$

где

$$A_k = \int_0^\pi \xi(x)\,X_k(x)\,\rho(x)\,dx, \qquad B_k = \int_0^\pi \eta(x)\,X_k(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Обозначим через $W_{p,2}$, $p \ge 2$, пространство Соболева на $[0,\pi]\times[0,T]$ с нормой

$$\|f(x,t)\|_{W_{p,2}} = \|f(x,t)\|_{L_p} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p}, \tag{24}$$

где

$$\|f(x,t)\|_{L_p} = \left(\int_0^\pi\int_0^T |f(x,t)|^p\,dx\,dt\right)^{1/p}.$$

Обобщенным решением задачи (19) – (21) называется предел частичных сумм ряда (23) в пространстве $W_{p,2}$.

При наших предположениях [2, с. 439] $X_k(x)$ и λ_k являются собственными функциями и собственными числами интегрального уравнения

$$X_k(x) = \lambda_k\int_0^\pi G(x,s)\,X_k(s)\,\rho(s)\,ds, \tag{25}$$

где

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} W(x)\,V(s), & x \le s; \\ \dfrac{1}{\Delta} W(s)\,V(x), & x > s, \end{cases}$$

$G(x,s)$ — функция Грина задачи (22); $V(x)$, $W(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые линейно независимые решения задачи Коши [2, с. 433]; $\Delta = p(VW' - WV') = \mathrm{const}$.

Лемма 1. *Обозначим* $\tilde{G}(z,s) = G(|z|,|s|)\,\rho(|s|)$, $-\pi \le z, s \le \pi$. *Тогда*

$$|\tilde{G}(z_1,s) - \tilde{G}(z_2,s)| \le \frac{2\rho(|s|)}{|\Delta|}\Bigg(|V(|s|)| \max_{0\le z\le\pi} W'(z) + $$

$$+ |W(|s|)| \max_{0\le s\le\pi} V'(s)\Bigg)|z_1 - z_2|.$$

Утверждение леммы легко получить, используя вид функции $G(x,s)$.

Лемма 2. *Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля* (22) $X_k(x)$ *образуют последовательность из класса* $B_Z^2[[0,\pi]\times[0,\pi]]$, *где*

$$Z = L_p([0,\pi]), \quad p \ge 2, \quad q_k(x) = X_k(x), \quad c_n = \breve{C}_G \lambda_n^{1/p-1/2}, \tag{26}$$

а $\breve{C}_G$ *задано в* (28).

Доказательство. Поскольку $X_k(x)$ являются собственными функциями интегрального уравнения (25), а функция $\sqrt{U(x)} = \sqrt{|x|^p}$ — выпукла, можно воспользоваться результатами примера 3 [1]. Так как для этого случая $R(x,s) = G(z,s)\,\rho(s)$, а $\tilde{R}(z,s) = G(|z|,|s|)\,\rho(|s|)$, согласно лемме 1 имеем

$$\tilde{\Delta}(h) \le |z_1 - z_2|\,2\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\rho^2(|s|)\Bigg(\frac{1}{|\Delta|}|V(|s|)| \max_{0\le z\le\pi}|W'(z)| + $$

$$+ \frac{1}{|\Delta|}|W(|s|)| \max_{0\le s\le\pi}|V'(s)|\Bigg)^2 ds\Bigg)^{1/2} = |z_1 - z_2|\,C_G. \tag{27}$$

Поэтому из примера 3 следует, что $c_n \le \breve{C}_G \lambda_n^{1/2-1/p}$, где

$$\breve{C}_G = \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) 2^{1/p-1/2} \frac{1}{C_G^{1/p}} \left(C_G + \frac{1}{2\pi}\max\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)\right)^{1/2}, \tag{28}$$

а C_G задано в (27).

Теорема 2. *Пусть* $X_k(x)$ *— собственные функции задачи Штурма – Лиувилля* (23), λ_k *— собственные значения этой задачи, упорядоченные по возрастанию. Тогда последовательность функций*

$$\{X_k(x)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t,\ X_k(x)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,\ k = \overline{1,\infty}\}$$

принадлежит классу B_Z^2, *где* $\Lambda = ([0,\pi]\times[0,T])$, μ *— мера Лебега,* $Z = L_p(\Lambda)$, $p \ge 2$; $S = ([0,\pi]\times[-\pi,\pi])$, ν *— мера Лебега,* $q_k(s)$ *— последовательность*

$$\left\{\mu_k X_k(x)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}},\ \mu_k X_k(x)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}},\ k = \overline{1,\infty}\right\}, \qquad \mu_k = \max(1, \lambda_k);$$

$$c_n = B\left[\lambda_n\left(\lambda_n + \frac{1}{T}\right)\right]^{1/2-1/p}, \tag{29}$$

где

$$B = 4\breve{C}_G \left(3 + B_1 + B_2 + \max_{0 \le x \le \pi} \frac{\rho(x)}{p(x)}\right) T \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\sin u/u)^2\, du}{\rho_0 \sin 1},$$

а $\breve{C}_G$ *определено в* (28), B_1 — *в* (27), B_2 — *в* (29), $\rho_0 = \inf\limits_{0 \le x \le \pi} \rho(x)$.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что для любых α_k, β_k, γ_k выполняется равенство

$$\| V_n(x,t) \|_{W_{p,2}} \le c_n \left(\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Q_n(x,t))^2\, dx\, dt \right)^{1/2}, \tag{30}$$

где $\| \cdot \|_{W_{p,2}}$ — норма, определенная в (24), $V_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k(x) U_k(t)$, а

$$U_k(t) = \beta_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \gamma_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t,$$

$$Q_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k(x) \mu_k \left(\beta_k \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + \gamma_k \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right).$$

Заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $U_k(x) \sin t\varepsilon / t\varepsilon$ является целой функцией экспоненциального типа $(\varepsilon + \lambda_k)$, ограниченной на вещественной оси. Поэтому вследствие результатов примера 2 [1] (см. (35)), леммы 2 и леммы 7 [1], положив $C_T(t) = (\sin(t/T))/(t/T)$, получим такие соотношения:

$$\left(\int_0^{\pi} \int_0^{T} |V_n(x,t)|^p\, dx\, dt \right)^{1/p} \le \frac{1}{\sin 1} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{T} |V_n(x,t)|^p (C_T(t))^p\, dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{\rho_0 \sin 1} \left(\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C_T(t) V_n(x,t)|^p \rho(x)\, dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{c_n^x c_n^t}{\rho_0 \sin 1} \left(\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C_T(t) V_n(x,t)|^2\, dx\, dt \right)^{1/2}, \tag{31}$$

где $c_n^x = \lambda_n^{1/2 - 1/p} \breve{C}_G$ (см. (28)); $c_n^t = 2(\lambda_n + 1/T)^{1/2 - 1/p}$.

Поскольку $X_k(x)$ ортонормированы с весом $\rho(x)$, из (31) следует

$$\left(\int_0^{\pi} \int_0^{T} |V_n(x,t)|^p\, dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{c_n^x c_n^t}{\rho_0 \sin 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \int_0^{\pi} \rho(x) X_k^2(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} |C_T(t)|^2 |U_k(t)|^2\, dt \right), \tag{32}$$

и так как $|U_k(t)|^2 \le 2(\beta_k^2 + \gamma_k^2)$, а $\int_{-\infty}^{\infty} |C_T(t)|^2\, dt = T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du$, из (32) получаем

$$\left(\int_0^{\pi} \int_0^{T} |V_n(x,t)|^p\, dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\leq D_1 c_n^x c_n^t \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \mu_k^2 (\beta_k^2 + \gamma_k^2) \right)^{1/2} = D_1 c_n^x c_n^t \left(\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n^2(x,t)\, dx\, dt \right)^{1/2}, \quad (33)$$

где

$$D_1 = \frac{2T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du}{\rho_0 \sin 1}.$$

Далее, так как

$$X_k(x) = \frac{\lambda_k}{\Delta} \int_0^x W(s) V(x) X_k(s) \rho(s)\, ds + \int_x^T W(x) V(s) X_k(s) \rho(s)\, ds,$$

легко видеть, что справедливо равенство

$$X_k'(x) = \lambda_k \int_0^{\pi} G^1(x,s) X_k(s) \rho(s)\, ds, \quad (34)$$

где

$$G^1(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} W'(x) V(s), & x \leq s; \\ \frac{1}{\Delta} W(s) V'(x), & x \geq s; \end{cases}$$

$$X_k''(x) = \lambda_k \left(\int_0^{\pi} G^2(x,s) X_k(s) \rho(s)\, ds + X_k(x) \frac{V'(x) W(x) - W'(x) V(x)}{\delta} \rho(x) \right) =$$

$$= \lambda_k \left(\int_0^{\pi} G^2(x,s) X_k(s) \rho(s)\, ds - X_k(x) \frac{\rho(x)}{p(x)} \right), \quad (35)$$

где

$$G^2(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} W''(x) V(s), & x \leq s; \\ \frac{1}{\Delta} W(s) V''(x), & x \geq s. \end{cases}$$

Из (34) следует, что $(1/p + 1/q = 1)$

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\partial V_n(x,t)}{\partial x} \right|^p dx = \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k \int_0^{\pi} G^1(x,s) X_k(s) \rho(s)\, ds\, U_k(t) \right|^p dx \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left[\left(\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k(s) U_k(t) \right|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^{\pi} |G^1(x,s)|^q |\rho(s)|^q\, ds \right)^{1/q} \right]^p dx =$$

$$= B_1^p \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k(s) U_k(t) \right|^p ds, \quad (36)$$

где

$$B_1 = \left[\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} |G^1(x,s)\rho(s)|^q\, ds \right)^{p/q} dx \right]^{1/p}. \tag{37}$$

Из (36), используя (33), получаем неравенство

$$\left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial V_n(x,t)}{\partial x} \right|^p dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le B_1 \left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k X_k(s) U_k(t) \right|^p ds\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le B_1 D_1 c_n^x c_n^t \left(\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x,t)|^2\, dx\, dt \right)^{1/2}. \tag{38}$$

Обозначив

$$B_2 = \left[\int_0^{\pi} \left| \int_0^{\pi} |G^2(x,s)\rho(s)|^q\, ds \right|^{p/q} dx \right]^{1/2}, \tag{39}$$

как и в предыдущем случае, из (35) получим

$$\left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial^2 V_n(x,t)}{\partial x^2} \right|^p dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k U_k(t) \int_0^{\pi} G_2(x,s) X_k(s) \rho(s)\, ds \right)^p dx\, dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k X_k(x) U_k(t) \frac{\rho(x)}{p(x)} \right|^p dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le c_n^x c_n^t \left(B_2 + \max_{0 \le x \le \pi} \frac{\rho(x)}{p(x)} \right) D_1. \tag{40}$$

Далее, так как

$$U_k'(t) = -\sqrt{\lambda_k}\, \beta_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + \gamma_k \sqrt{\lambda_k} \cos\sqrt{\lambda_k}\, t;$$

$$U_k''(t) = -\lambda_k (\beta_k \cos\sqrt{\lambda_k} + \gamma_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t),$$

точно так же, как и в (33), легко получить

$$\left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial V_n(x,t)}{\partial t} \right|^p dx\, dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial^2 V_n(x,t)}{\partial t^2} \right|^p dx\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2 D_1 c_n^x c_n^t \left(\int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Q_n(x,t))^2\, dx\, dt \right)^{1/2}. \tag{41}$$

Из неравенств (33), (38), (40) и (41) получаем доказательство теоремы.

Теорема 3. *Пусть случайные процессы* $\xi(x)$ *и* $\eta(x)$ *— совместно строго* $\mathrm{sub}_{\varphi}(\Omega)$ *с определяющей постоянной* C_{Δ}, N*-функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3 [1].

Для того чтобы существовало обобщенное решение задачи (19) – (21), *представимое в виде ряда* (23), *сходящегося в норме* $\|\cdot\|_{W_{p,2}}$, *достаточно, чтобы существовала монотонно неубывающая последовательность* $b_k > 0$, $b_k \uparrow \infty$ *при* $k \to \infty$, *для которой сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^{1-2/p} \left(\sum_{l=0}^{k} b_l^2 \lambda_l^2 \left(\mathrm{E} A_l^2 + \frac{\mathrm{E} B_l^2}{\lambda} \right) \right)^{1/2} (b_k^{-1} - b_{k+1}^{-1}) < \infty, \tag{42}$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$P\{\|V_m^{\infty}(x,t)\|_{W_{p,2}} > \varepsilon\} \le \inf_{s>1} \frac{s^2}{s^2-1} \exp\left(-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{s\Lambda C_{\Delta} K_m^{\infty}}\right)\right), \tag{43}$$

где

$$V_m^{\infty}(x,t) = \sum_{k=m}^{\infty} X_k(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \right);$$

$$K_m^{\infty} = \sum_{k=m}^{\infty} (b_k^{-1} - b_{k+1}^{-1}) \left[\lambda_k \left(\lambda_k + \frac{1}{T}\right)\right]^{1/2-1/p} \times$$

$$\times B \left(\sum_{l=m}^{n} b_l^2 \mu_l^2 \left(\mathrm{E} A_l^2 + \frac{\mathrm{E} B_l^2}{\lambda_l} \right) \right)^{1/2},$$

B — *задано в* (29).

Либо при $\varepsilon > 1$ *выполняется неравенство*

$$P\{\|V_m^{\infty}(x,t)\|_{W_{p,2}} > \varepsilon\} \le \varepsilon^2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\Lambda C_{\Delta} K_m^{\infty}}\right)\right\}. \tag{44}$$

Доказательство. Поскольку процессы $\xi(x)$ и $\eta(x)$ — совместно строго $\mathrm{sub}_{\varphi}(\Omega)$, с определяющей постоянной C_{Δ}, согласно теореме 2 [1], последовательность случайных величин $\{A_k, B_k, k = \overline{1,\infty}\}$ является строго $\mathrm{sub}_{\varphi}(\Omega)$ с определяющей постоянной C_{Δ}. Поэтому теорема 3 вытекает из следствия 2 и теоремы 2. Здесь

$$T_m^k = \sum_{l=m}^{n} b_l^2 \mu_l^2 \left(\mathrm{E} A_l^2 + \frac{\mathrm{E} B_l^2}{\lambda_l} \right); \quad c_k = \left[\lambda_k \left(\lambda_k + \frac{1}{T}\right)\right]^{1/2-1/p} B.$$

Ряд (19) в этом случае сходится, если сходится ряд (42).

Из теоремы 3 легко получить следствия, подобные следствиям из теоремы 4. Кроме того, используя метод работы [3], легко получить условия в терминах ковариационных функций процессов $\xi(x)$ и $\eta(x)$, при которых справедливы утверждения теоремы 3.

1. *Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А.* Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $\mathrm{sub}_{\varphi}(\Omega)$. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 504–515.
2. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 559 с.
3. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН Усср, 1979. – С. 4–35.

Получено 02.07.96