УДК 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПЕРЕСТАНОВКИ И КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ*

We consider the problem of approximation of a continuous function f, which is given on n-dimensional cube, by step functions in the metrics of C and \$. We obtain exact estimates of an error in terms of the modulus of continuity of the function f or of its special rearrangement.

Розглянуто задачу про наближення в метриках C і L_p заданої на n-вимірному кубі неперервної функції f ступінчастими функціями. Отримано точні оцінки похибки через модуль неперервності функції f або її спеціальної перестановки.

1. Уже неоднократно отмечалось, что исследование задач, связанных с приближением функций n $(n \geq 2)$ переменных, продвинуто не так далеко, как в одномерном случае. В первую очередь этот факт имеет место для задач экстремального характера: точные оценки приближения на классах функций, отыскание поперечников. Для классов функций одной переменной, задаваемых ограничениями как на норму, так и на модуль непрерывности r-й $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ производной, такие задачи удалось решить, существенно используя аппарат перестановок, для которых установлен ряд фундаментальных утверждений типа теорем сравнения [1]. Хотя понятие введенной Харди и Литтльвудом [2, гл. X] убывающей перестановки функции одной переменной естественным образом переносится на n-мерный случай [3, с. 320], нам неизвестны работы, в которых аппарат перестановок используется для решения экстремальных задач на классах функций n переменных.

Ограничимся рассмотрением вопросов приближения непрерывных функций двух и большего числа переменных. Если о функции n переменных известно только, что она непрерывна, и нет информации о гладкостных ее свойствах, то одной из важнейших аппроксимативных характеристик такой функции является минимально возможная величина погрешности (в равномерной или интегральной метрике) приближения ее подпространствами сплайнов нулевого порядка фиксированной размерности. При этом речь может идти как о наилучшем приближении, так и о приближении линейными методами интерполяционного характера.

В данной статье рассмотрим задачу об оценке приближения кусочно-постоянными функциями на задаваемых модулем непрерывности классах функций n переменных.

2. Получить точную оценку кусочно-постоянного приближения можно надеяться, лишь точно оценив погрешность приближения функции тождественной константой на некотором элементарном множестве, например, на некотором кубе. Пусть I_a^n — n-мерный куб: $0 \leq x_i \leq a$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $C\left(I_a^n\right)$ — линейное пространство непрерывных на I_a^n функций $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Величину колебания конкретной функции $f \in C\left(I_a^n\right)$ характеризует ее модуль непрерывности

$$\omega_\rho(f, \delta) = \sup\left\{|f(x) - f(y)|:\, x, y \in I_a^n,\ \rho(x, y) \leq \delta\right\},$$

зависящий от того, как задается в n-мерном векторном пространстве расстояние между точками $x = \{x_i\}_1^n$ и $y = \{y_i\}_1^n$. Наиболее важными при определении

* Частично поддержана Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP), грант № EPU051030.

характера колебаний непрерывной функции являются, по-видимому, такие расстояния:

$$\rho_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \tag{1}$$

$$\rho_3(x, y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i|.$$

Наряду с задачами оценки погрешности приближения в той или иной метрике конкретной функции $f \in C\left(I_a^n\right)$ через ее собственный модуль непрерывности $\omega_\rho(f, \delta)$ рассматриваются также задачи о верхней грани приближений на классе

$$H_{a,\rho}^{n,\omega} = \left\{f\colon f \in C\left(I_a^n\right),\ \omega_\rho(f, \delta) \le \omega(\delta)\right\},$$

где $\omega(\delta), \delta \ge 0,$ — заданный модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю.

Что касается наилучшего приближения константой, то при оценке погрешности в равномерной метрике точный результат тривиален (под константой $c \in R^1$ ниже понимается функция, тождественно равная c на I_a^n):

$$E_0(f)_C := \inf_{c\in R^1}\max_{x\in I_a^n}|f(x) - c| = \frac{1}{2}\left(\max_{x\in I_a^n} f(x) - \min_{x\in I_a^n} f(x)\right) = \frac{1}{2}\,\omega_\rho(f, d),$$

где

$$d = d_\rho\left(I_a^n\right) = \sup\left\{\rho(x, y)\colon x, y \in I_a^n\right\}$$

— диаметр куба I_a^n относительно расстояния ρ.

Константой наилучшего равномерного приближения для f является

$$c = c(f) = \frac{1}{2}\left(\max_{x\in I_a^n} f(x) + \min_{x\in I_a^n} f(x)\right).$$

Поскольку

$$d_{\rho_1}\left(I_a^n\right) = \sqrt{an}; \quad d_{\rho_2}\left(I_a^n\right) = an; \quad d_{\rho_3}\left(I_a^n\right) = a, \tag{2}$$

то, полагая для $\mathfrak{M} \in C\left(I_a^n\right)$

$$E_0(\mathfrak{M})_C = \sup\left\{E_0(f)_C\colon f \in \mathfrak{M}\right\},$$

имеем

$$E_0\left(H_{a,\rho_1}^{n,\omega}\right)_C = \frac{1}{2}\,\omega(\sqrt{an}\,), \qquad E_0\left(H_{a,\rho_2}^{n,\omega}\right)_C = \frac{1}{2}\omega(an), \qquad E_0\left(H_{a,\rho_3}^{n,\omega}\right)_C = \frac{1}{2}\omega(a).$$

Соображения элементарного характера позволяют точно оценить равномерную погрешность приближения функции $f \in C\left(I_a^n\right)$ также линейно зависящей от f константой, совпадающей со значением $f(x)$ в некоторой точке куба I_a^n или со средним значением функции $f(x)$ на I_a^n. Ясно, что достаточно рассмотреть ситуации, когда эти константы равны нулю.

При фиксированном $y \in I_a^n$ из того, что $f \in H_{a,\rho}^{n,\omega}$ и $f(y) = 0$, следует, что для любых $x \in I_a^n$ будет $|f(x)| \le \omega(\rho(x, y))$, и если y_* — центр куба I_a^n, то

$$\inf_{y\in I_a^n} \sup_{x\in I_a^n} \{ |f(x)| : f\in H_{a,\rho}^{n,\omega}, f(y)=0 \} =$$

$$= \sup_{x\in I_a^n} \{ |f(x)| : f\in H_{a,\rho}^{n,\omega}, f(y_*)=0 \} \le \omega\left(\frac{d_\rho}{2}\right), \tag{3}$$

где, как и выше, $d_\rho = d_\rho\left(I_a^n\right)$ — диаметр I_a^n, значения которого при $\rho = \rho_i$, $i = 1, 2, 3$, указаны в (2). Знак равенства в (3) реализует функция $f_* \in H_{a,\rho}^{n,\omega}$, определяемая равенствами $f_*(y_*)=0$ и $f_*(x)=\omega(\rho(x, y_*))$, $x\in I_a^n$.

В задаче оценки равномерного приближения функции $f\in H_{a,\rho}^{n,\omega}$ ее средним значением

$$\eta(f) = \frac{1}{\left|I_a^n\right|}\int\limits_{I_a^n} f(x)\,dx, \qquad \left|I_a^n\right| = \mathrm{mes}\, I_a^n, \tag{4}$$

на кубе I_a^n дело сводится к оценке нормы $\|f\|_C$ при условии $f\perp 1$, т. е. $\int_{I_a^n} f(x)\,dx = 0$. Если $f\in H_{a,\rho}^{n,\omega}, f\perp 1$ и $\|f\|_C = |f(x_0)|$, то

$$\|f\|_C = \left|\frac{1}{\left|I_a^n\right|}\int\limits_{I_a^n}[f(x_0)-f(x)]\,dx\right| \le \frac{1}{\left|I_a^n\right|}\int\limits_{I_a^n}\omega(\rho(x, x_0))\,dx$$

и имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $f\in H_{a,\rho}^{n,\omega}$ *и константа* $\eta(f)$ *определена в* (4). *Тогда*

$$\|f-\eta(f)\|_C \le \sup_{y\in I_a^n}\frac{1}{\left|I_a^n\right|}\int\limits_{I_a^n}\omega(\rho(x, y))\,dx. \tag{5}$$

Если верхняя грань в (5) достигается при $y=y_0$, то для функции $f_0(x) = \omega(\rho(x, y_0))$, $x\in I_a^n$, неравенство в (5) обращается в равенство.

При $\rho = \rho_i$, $i = 1, 2, 3$, учитывая конкретный вид задания расстояний (1), можно получить точные оценки погрешности $\|f-\eta(f)\|_C$ непосредственно через модуль непрерывности $\omega(\delta)$, которым задается класс $H_{a,\rho}^{n,\omega}$. Сделаем это при $n=2$, причем начнем с самого простого случая $\rho=\rho_3$.

В двумерной ситуации $\rho_3 = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$, и легко убедиться, что максимум по $y\in I_a^2$ интеграла $\int_{I_a^n}\omega(\rho_3(x, y))\,dx$ достигается в каждой из вершин квадрата I_a^2. Положив $y=0$, рассмотрим функцию

$$\varphi_3(x_1, x_2) = \omega(\rho_3(x, 0)) = \omega(\max\{x_1, x_2\}), \qquad 0\le x_1,\ x_2\le a,$$

линии уровня которой в I_a^2 состоят из двух параллельных сторонам квадрата отрезков, соединяющих точку диагонали $x_2=x_1$ с точками x_1 и x_2 на осях координат. Несложный подсчет приводит к равенству

$$\int\limits_{I_a^n}\omega(\rho_3(x, 0))\,dx = 2\int\limits_0^a t\,\omega(t)\,dt. \tag{6}$$

Пусть теперь $\rho=\rho_2$, $\rho_2(x, y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$. И здесь интеграл по I_a^2 от $\omega(\rho_2(x, y))\,dx$ имеет наибольшее значение, когда точка y совпадает с одной из вершин квадрата I_a^2, и можно положить $y=0$. Линиями уровня функции

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \omega(\rho_2(x, 0)) = \omega(x_1 + x_2), \quad 0 \le x_1,\ x_2 \le a,$$

являются пересечения прямых $x_2 = c - x_1$, $0 \le c \le 2a$, с квадратом I_a^2, причем на каждой из них $\varphi_2(x_1, x_2) = c$. Подсчитывая соответствующий интеграл, получаем

$$\int\limits_{I_a^n} \omega(\rho_2(x, 0))\, dx = \int\limits_0^a t\,\omega(t)\, dt + \int\limits_a^{2a} (2a - t)\,\omega(t)\, dt. \tag{7}$$

В случае расстояния $\rho_1(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}$ наибольшее значение интеграла от $\omega(\rho_1(x, y))\, dx$ также обеспечивается при $y = 0$, и рассматривается функция

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \omega(\rho_1(x, 0)) = \omega\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \quad 0 \le x_1,\ x_2 \le a.$$

Здесь линии уровня — дуги окружностей $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, $0 \le r \le a\sqrt{2}$, попадающие внутрь квадрата I_a^2, на этих линиях $\varphi_1(x_1, x_2) = r$. Элементарные выкладки дают:

$$\int\limits_{I_a^n} \omega(\rho_1(x, 0))\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{a\sqrt{2}} t\,\omega(t)\, dt - 2 \int\limits_a^{a\sqrt{2}} t \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - a^2}\, \omega(t)\, dt. \tag{8}$$

Соотношения (6)–(8) вместе с утверждением 1 приводят к следующему результату.

Утверждение 2. *Для равномерного приближения функций из классов* $H_{a,\rho_i}^{2,\omega}$, $i = 1, 2, 3$, *константой* $\eta(f)$ *их среднего значения на* I_a^2 *справедливы соотношения:*

$$\sup_{f \in H_{a,\rho_1}^{2,\omega}} \|f - \eta(f)\|_C = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\pi}{2} \int\limits_0^{a\sqrt{2}} t\,\omega(t)\, dt - 2 \int\limits_a^{a\sqrt{2}} t \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - a^2}\, \omega(t)\, dt\right],$$

$$\sup_{f \in H_{a,\rho_2}^{2,\omega}} \|f - \eta(f)\|_C = \frac{1}{a^2}\left[\int\limits_0^a t\,\omega(t)\, dt + \int\limits_a^{2a} (2a - t)\,\omega(t)\, dt\right],$$

$$\sup_{f \in H_{a,\rho_3}^{2,\omega}} \|f - \eta(f)\|_C = \frac{1}{a^2} \int\limits_0^a t\,\omega(t)\, dt.$$

Верхние грани реализуют функции $f_i(x) = \omega(\rho_i(x, 0))$, $i = 1, 2, 3$.

Наряду с наилучшим равномерным приближением функции $f \in H_{a,\rho}^{n,\omega}$ мы рассмотрели также приближение в метрике C двумя видами констант, линейно зависящих от f. Естественно возникает задача о наилучшей константе линейного приближения в метрике C на классе $H_{a,\rho}^{n,\omega}$. Эта задача в случае, когда $\omega(\delta) \ne K\delta$ (например, когда $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$) не решена даже в одномерном случае [4].

3. Перейдем теперь к задаче о точной оценке приближения константой на кубе I_a^n в метрике L_p. Из трех рассмотренных в п. 2 методов приближения не вызывает затруднений случай интерполяции функции константой в некоторой точке куба. Действительно, при фиксированном $y \in I_a^n$ среди функций $f \in$

$\in H_{a,\rho}^{n,\omega}$ таких, что $f(x)=0$, максимум интегралу $\int_{I_a^n} |f(x)|^p\,dx$, $p>0$, доставляет функция $f(x)=\omega(\rho(x,y))$. Легко далее заключить, что функция

$$J(y) = \int\limits_{I_a^n} \omega^p(\rho(x,y))\,dx, \quad y\in I_a^n,$$

имеет наименьшее значение, если y — центр куба I_a^n.

Что же касается наилучшего приближения константой или приближения средним значением, то здесь получение точного результата в метрике L_p — задача далеко не тривиальная и в одномерном случае [1, 5]. При переходе к функциям двух и большего числа переменных возникают принципиальные трудности, преодолеть которые можно попытаться, используя аппарат перестановок.

Понятие перестановки функции f имеет смысл для любой измеримой области ее задания. Будем говорить о перестановках измеримых функций, заданных на кубе I_a^n. Считая сначала, что $f(x)\ge 0$ для всех $x\in I_a^n$, каждому $\alpha\ge 0$ поставим в соответствие множество точек $x\in I_a^n$, в которых $f(x)>\alpha$. Функцию

$$\lambda(\alpha) = \operatorname{mes}\{x:\ x\in I_a^n,\ f(x)>\alpha\}, \qquad \alpha\ge 0, \tag{9}$$

называют функцией распределения функции $f(x)$. Обратная к $\lambda(\alpha)$ функция

$$r(f,t) = \inf\{\alpha:\ \lambda(\alpha)\le t\}, \qquad 0\le t<\infty,$$

есть убывающая (точнее — невозрастающая) перестановка функции $f(x)$ на кубе I_a^n. Функция $r(f,t)$ имеет ту же функцию распределения, что и $f(x)$, поэтому при всех $p>0$

$$\int\limits_{I_a^n} |f(x)|^p\,dx = \int\limits_0^\infty |r(f,t)|^p\,dt. \tag{10}$$

Это следует из того, что

$$\operatorname{mes}\left\{t:\ r\left(|f|^p,\ t\right)>\alpha\right\} = \operatorname{mes}\left\{x:\ x\in I_a^n,\ |f(x)|^p>\alpha\right\} =$$
$$= \operatorname{mes}\left\{x:\ x\in I_a^n,\ |f(x)|>\alpha^{1/p}\right\} = \operatorname{mes}\left\{t:\ r(f,t)>\alpha^{1/p}\right\} =$$
$$= \operatorname{mes}\left\{t:\ |r(f,t)|^p>\alpha\right\}.$$

В силу определения (9) $0\le\lambda(\alpha)\le\operatorname{mes} I_a^n$, поэтому можно считать, что перестановка $r(f,t)$ определена на отрезке $[0,A_n]$, где $A_n=\operatorname{mes} I_a^n$, и верхний предел интегрирования в правой части (10) заменить на A_n. Для функций $f(x)$, принимающих на I_a^n как положительные, так и отрицательные значения, наряду с перестановкой $r(|f|,t)$ введем также знакопеременную перестановку следующим образом.

Пусть $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, где

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\}, \qquad f_-(x) = \max\{-f(x),0\}, \quad x\in I_a^n.$$

Положим

$$\pi(f,t) = r(f_+,t) - r(f_-,A_n-t), \qquad 0\le t\le A_n. \tag{11}$$

Ясно, что перестановка $\pi(f,t)$ не возрастает на $[0,A_n]$ и меняет знак на этом промежутке один раз, — если, конечно, ни одна из функций f_+ и f_- не есть тождественный нуль. Поскольку, очевидно,

$$\int_0^{A_n} \pi^p(f,t)\,dt = \int_0^{A_n} r^p(f_+,t)\,dt + \int_0^{A_n} r^p(f_-, A_n - t)\,dt,$$

то

$$\int_{I_a^n} |f(x)|^p\,dx = \int_0^{A_n} \pi^p(f,t)\,dt, \qquad p > 0. \tag{12}$$

При оценке погрешности приближения функции $f \in C\left(I_a^n\right)$ ее средним значением (4) можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\pi(f) = 0$. Тогда среднее значение перестановки $\pi(f,t)$ на $[0, A_n]$ также равно нулю, и мы находимся в условиях одномерного случая, рассмотренного в [6] (см. также [5, с. 224]). Это позволяет точно оценить погрешность приближения в L_p, $0 < p \leq 3$, функции $f \in C\left(I_a^n\right)$ через модуль непрерывности ее перестановки $\pi(f,t)$.

Лемма 1. *Для функции* $f \in C\left(I_a^n\right)$ *с нулевым средним значением на кубе* I_a^n *при* $0 < p \leq 3$ *справедлива точная оценка*

$$\int_{I_a^n} |f(x)|^p\,dx \leq 2^{-p} \int_0^{A_n} \omega^p(\pi(f),t)\,dt. \tag{13}$$

Приведем схему доказательства. Интеграл

$$F(t) = \int_0^t \pi(f,u)\,du, \qquad 0 \leq t \leq A_n, \quad F(A_n) = 0,$$

— простая функция [1, с. 294] на отрезке $[0, A_n]$, и равенством (считая, что $\pi(f,t) = 0$ для $t_1 \leq t \leq t_2$)

$$F(t) = F(\beta(t)), \qquad 0 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta(t) \leq A_n,$$

определена абсолютно непрерывная функция $\beta(t)$, так что почти всюду на $(0, t_1)$ $\pi(f,t) = \pi(f,\beta(t))\beta'(t)$. Замена переменной $t = \rho(u)$ на $[t_2, A_n]$ приводит к равенству

$$\int_0^{A_n} |\pi(f,t)|^p\,dt = \int_0^{t_1} |\pi(f,\beta(t))|^p \left[|\beta'(t)|^p + |\beta'(t)|\right] dt.$$

Используя неравенство [5, с. 225]

$$2^p(b^p + b) \leq (1+b)^{p+1}, \qquad b \geq 0, \quad 0 < p \leq 3,$$

имеем

$$\int_0^{A_n} |\pi(f,t)|^p\,dt \leq 2^{-p} \int_0^{t_1} |\pi(f,\beta(t)) - \pi(f,t)|^p\,|1 - \beta'(t)|\,dt \leq$$

$$\leq 2^{-p} \int_0^{t_1} \omega^p(\pi(f), \beta(t) - t)(1 - \beta'(t))\,dt \leq 2^{-p} \int_0^{A_n} \omega^p(\pi(f),t)\,dt.$$

Остается учесть (12). Равенство в (13) имеет место, в частности, для функций $f \in C\left(I_a^n\right)$, перестановка $\pi(f,t)$ которых выпукла вверх на $[0, A_n/2]$ и удовлетворяет условию

$$\pi(f, t) = -\pi(f, A_n - t), \quad 0 \le t \le A_n/2.$$

Ниже такие функции будут предъявлены в случае $n = 2$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $f \in C\left(I_a^n\right)$ *и константа* $\eta(f)$ *определена в* (4), *то при* $0 < p \le 3$

$$\int\limits_{I_a^n} |f(x) - \eta(f)|^p \, dx \le 2^{-p} \int\limits_0^{A_n} \omega^p(\pi(f), t) \, dt. \tag{14}$$

Оценка на множестве $C\left(I_a^n\right)$ *точная.*

Переходя к оценке наилучшего приближения константой в L_p, заметим, что доказательство теоремы 1.4.5 в [1, с. 28] о критерии функции наилучшего приближения подпространством в L_p, $1 \le p < \infty$, без изменений переносится на n-мерный случай, поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $f \in L_p\left(I_a^n\right)$, $p \ge 1$, $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$. *Чтобы тождественная константа* $\lambda = \lambda_p(f)$ *удовлетворяла соотношению*

$$E_0(f)_p := \inf_{\lambda} \int\limits_{I_a^n} |f(x) - \lambda|^p \, dx = \int\limits_{I_a^n} \left| f(x) - \lambda_p(f) \right|^p dx,$$

достаточно, а в случае $p = 1$ *при условии*

$$\operatorname{mes}\left\{x : x \in I_a^n, \ f(x) = \lambda_p(f)\right\} = 0$$

и необходимо выполнение условия

$$\int\limits_{I_a^n} \left| f(x) - \lambda_p(f) \right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(f(x) - \lambda_p(f)\right) dx = 0.$$

Без потери общности можно ограничиться рассмотрением лишь тех функций $f \in C\left(I_a^n\right)$, у которых $\lambda_p(f) = 0$ и

$$\operatorname{mes}\left\{t : t \in (0, A_n), \ \pi(f, t) = 0\right\} = 0. \tag{15}$$

Лемма 2. *Если для функции* $f \in C\left(I_a^n\right)$ *выполнены условие* (15) *и равенство*

$$\int\limits_{I_a^n} |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x) \, dx = 0, \tag{16}$$

то справедливо точное неравенство

$$\int\limits_{I_a^n} |f(x)|^p \, dx \le 2^{-p} \int\limits_0^{A_n} \omega^p(\pi(f), t) \, dt, \quad 1 \le p < \infty. \tag{17}$$

Доказательство проводится по схеме из работы [7] (см. также [1, с. 320]). Из равенства (16) следует

$$\int\limits_0^{t_1} |\pi_+(f, t)|^{p-1} \, dt = \int\limits_{t_1}^{A_n} |\pi_-(f, t)|^{p-1} \, dt,$$

где t_1 — единственный нуль $\pi(f, t)$ на отрезке $(0, A_n)$.

Положив

$$F(t) = \int\limits_0^t |\pi(f, u)|^{p-1} \operatorname{sgn} \pi(f, u) \, du,$$

равенством

$$F(t) = F(\beta(t)), \quad 0 \le t \le t_1 \le \beta(t) \le A_n, \tag{18}$$

определим монотонную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$ и обратную к ней $\beta^{-1}(t)$, причем

$$F(\beta^{-1}(t)) = F(t), \quad 0 \le \beta^{-1}(t) \le t_1 \le t \le A_n. \tag{19}$$

Дифференцируя равенства (18) и (19), находим

$$\begin{aligned} |\pi(f,t)|^{p-1} &= -|\pi(f,\beta(t))|^{p-1}\beta'(t), \quad 0 < t < t_1, \\ |\pi(f,t)|^{p-1} &= -\left|\pi\left(f,\beta^{-1}(t)\right)\right|^{p-1}\left(\beta^{-1}(t)\right)', \quad t_1 < t < A_n, \end{aligned} \tag{20}$$

а замена переменной позволяет написать

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{A_n} |\pi(f,t)|^p\,dt &= -\int_0^{t_1} |\pi(f,\beta(t))|^p\,\beta'(t)\,dt, \\ \int_0^{t_1} |\pi(f,t)|^p\,dt &= -\int_{t_1}^{A_n} \left|\pi\left(f,\beta^{-1}(t)\right)\right|^p \left(\beta^{-1}(t)\right)' dt. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (20) и (21) находим, что

$$\int_0^{A_n} |\pi(f,t)|^p\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{A_n} |\pi(f,t)|^{p-1}\,\psi(t)\,dt, \tag{22}$$

где $\psi(t) = |\pi(f,t)| + |\pi(f,\beta(t))|$ на $(0, t_1)$ и $\psi(t) = |\pi(f,t)| + |\pi(f,\beta^{-1}(t))|$ на (t_1, A_n).

Применив к правой части (22) неравенство Гельдера, приходим к неравенству

$$2^p \int_0^{A_n} |\pi(f,t)|^p\,dt \le \int_0^{A_n} |\psi(t)|^p\,dt = \int_0^{t_1} |\psi(t)|^p\,(1-\beta'(t))\,dt,$$

правая часть которого равна

$$\int_0^{t_1} |\pi(f,t) - \pi(f,\beta(t))|^p\,(1-\beta'(t))\,dt \le \int_0^{A_n} \omega^p(\pi(f),t)\,dt,$$

и, чтобы получить (17), надо учесть (12).

Сформулируем полученный результат в общей ситуации.

Теорема 2. *Если $f \in C\left(I_a^n\right)$, то при всех $p \ge 1$ справедлива точная на $C\left(I_a^n\right)$ оценка*

$$E_0(f)_p := \inf_{\lambda \in R^1} \|f-\lambda\|_p \le \frac{1}{2}\left(\int_0^{A_n} \omega^p(\pi(f),t)\,dt\right)^{1/p}, \tag{23}$$

где $\pi(f,t)$ — перестановка, определенная равенством (11).

4. Рассмотрим задачу об оценке погрешности приближения константой в L_p на классах, задаваемых модулем непрерывности $\omega(\delta)$. Начнем с построения регулярных функций, которые реализуют равенства в оценках (14) и (23) и являются экстремальными в указанных классах. Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся случаем $n = 2$, причем удобно будет считать в этом пункте, что квадрат I_a^2 задан условиями $0 \le |x_1|, |x_2| \le a/2$.

Пусть класс $H^{2,\omega}_{a,\rho}$ задан выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и расстоянием $\rho = \rho_2$, $\rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Определим функцию $f_2(x)$ на I_a^2 следующим образом:

$$f_2(x) = f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2(x_1 + x_2)), & x_1 + x_2 \ge 0, \\ -\frac{1}{2}\,\omega(2|x_1 + x_2|), & x_1 + x_2 < 0, \ (x_1, x_2) \in I_a^2. \end{cases}$$

Ясно, что $f_2 \perp 1$, $f_2(x) = 0$, если $x_1 + x_2 = 0$. Докажем, что $f_2 \in H^{2,\omega}_{a,\rho_2}$. Если точки x и y лежат на диагонали $l = \{x : x \in I_a^2, x_2 = x_1\}$, то доказательство проводится по схеме одномерного случая (см., например, [1, с. 289]). В общем случае пусть l_x и l_y — линии уровня, на которых лежат соответственно точки x и y, и $x' \in l \cap l_x$, $y' \in l \cap l_y$. Тогда $\rho_2(x, y) = \rho_2(x', y')$ и

$$|f_2(x) - f_2(y)| = |f_2(x') - f_2(y')| \le \omega(\rho_2(x', y')) = \omega(\rho_2(x, y)).$$

Если $x_1 + x_2 = -(y_1 + y_2)$, т. е. точки x и y симметричны относительно диагонали $x_2 = -x_1$, то $|f_2(x) - f_2(y)| = \omega(\rho_2(x, y))$ и, следовательно, $\omega_{\rho_2}(f_2, \delta) = \omega(\delta)$.

Используя задание функции $f_2(x)$, найдем, что при $p > 0$

$$\int\limits_{I_a^2} |f_2(x)|^p\, dx = 2^{1-p} \int\limits_0^a (a - t)\,\omega^p(2t)\, dt.$$

Убывающую перестановку $\pi(f_2, s)$ будем рассматривать на отрезке $[-a^2/2, a^2/2]$. Тогда $\pi(f_2, s) = -\pi(f_2, -s)$, $0 \le s \le a^2/2$, причем из выпуклости вверх функции $f_2(x)$ на каждой прямой $x_2 = x_1 + c$ следует выпуклость вверх перестановки $\pi(f_2, s)$ на $(-a^2/2, 0)$. Линиям уровня $x_1 + x_2 = \pm c$ функции $f_2(x)$ соответствуют точки $\pm s$, $s = ac - c^2/2$, в которых $\pi(f_2, \pm s) = \pm\omega(2c)/2$, поэтому

$$\omega(\delta) = \omega_{\rho_2}(f_2, \delta) = \omega\Big(\pi(f_2),\ a\delta - \delta^2/4\Big), \qquad 0 \le \delta \le 2a,$$

а также

$$\omega(\pi(f_2),\ s) = \omega_{\rho_2}\Big(f_2,\ 2a - 2\sqrt{a^2 - s}\Big) = \omega\Big(2a - 2\sqrt{a^2 - s}\Big), \qquad 0 \le s \le a^2.$$

Экстремаль в классе $H^{2,\omega}_{a,\rho_3}$, где $\rho_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, строится проще. Положим

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2x_1), & x_1 \ge 0, \\ -\frac{1}{2}\,\omega(-2x_1), & x_1 < 0, \ (x_1, x_2) \in I_a^2. \end{cases}$$

Линии уровня функции $f_3(x)$ — вертикальные отрезки с концами на противоположных сторонах квадрата I_a^2. Легко доказать, что $\omega_{\rho_3}(f_3, \delta) = \omega(\delta)$, а несложный подсчет приводит к равенству

$$\int\limits_{I_a^2} |f_3(x)|^p\, dx = 2^{1-p} a \int\limits_0^{a/2} \omega^p(2t)\, dt, \qquad p > 0.$$

Линиям уровня $x_1 = \pm c$ функции f_3 соответствуют точки $\pm s$ на отрезке $[-a^2/2, a^2/2]$, причем $s = ca$, поэтому

$$\omega(\delta) = \omega_{\rho_3}(f_2, \delta) = \omega(\pi(f_3), a\delta), \quad 0 \le \delta \le a,$$

$$\omega(\pi(f_3), s) = \omega_{\rho_3}\left(f_3, \frac{s}{a}\right) = \omega\left(\frac{s}{a}\right), \quad 0 \le s \le a^2.$$

В случае евклидова расстояния $\rho_1(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$ экстремаль $f_1(x)$ в классе $H^{2,\omega}_{a,\rho_1}$ строится по аналогии с экстремалью $f_2(x)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\omega\left(2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), & x_1 + x_2 \ge 0, \\ -\dfrac{1}{2}\,\omega\left(2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), & x_1 + x_2 < 0, \ (x_1, x_2) \in I_a^2. \end{cases}$$

Линии уровня, как и для $f_2(x)$, параллельны нулевой диагонали $x_1 + x_2 = 0$. Нетрудно установить справедливость соотношений

$$\int_{I_a^2} |f_1(x)|^p\, dx = \int_0^{a\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - t)\,\omega^p(t)\, dt, \quad p > 0,$$

$$\omega(\delta) = \omega_{\rho_1}(f_1, \delta) = \omega\left(\pi(f_1), a\delta\sqrt{2} - \delta^2/2\right), \quad 0 \le \delta \le a\sqrt{2},$$

$$\omega(\pi(f_1), s) = \omega\left(\sqrt{2}\left(a - \sqrt{a^2 - s}\right)\right) = \omega_{\rho_1}\left(f_1, \sqrt{2}\left(a - \sqrt{a^2 - s}\right)\right), \quad 0 \le s \le a^2.$$

Теперь в случае $n = 2$ сможем точно оценить погрешность приближения константой в L_p на классах $H^{2,\omega}_{a,\rho_i}$, $i = 1, 2, 3$, через задающий эти классы выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(\delta)$.

Более подробно рассмотрим случай расстояния ρ_2 с экстремалью $f_2(x)$. Пусть $f \in H^{2,\omega}_{a,\rho_2}$. Каждому $s, 0 < s \le a^2$, такому, что

$$s = s' - s'', \quad -a^2/2 \le s' < s_0 < s'' \le a^2/2, \quad \pi(f, s_0) = 0,$$

поставим в соответствие τ, $0 < \tau \le a^2$, такое, что

$$\tau = \tau' - \tau'', \quad -a^2/2 \le \tau' < 0 < \tau'' \le a^2/2,$$

причем выполняются условия

$$\pi(f, s') = \pi(f_2, \tau'), \quad \pi(f, s'') = \pi(f_2, \tau''), \tag{24}$$

$$\int_{s'}^{s''} \pi(f, t)\, dt = \int_{\tau'}^{\tau''} \pi(f_2, t)\, dt = 0. \tag{25}$$

Функции

$$F(t) = \int_{-a^2/2}^{t} \pi(f, u)\, du, \quad F_2(t) = \int_{-a^2/2}^{t} \pi(f_2, u)\, du, \quad -a^2/2 \le t \le a^2/2,$$

являются простыми. Равенствами $F(t) = F(\beta(t))$ и $F_2(t) = F_2(\beta_2(t))$ определены монотонные функции $\beta(t)$ и $\beta_2(t)$ (см. доказательство теорем 1 и 2). Из условия (25) следует, что $\beta(s') = s''$, $\beta_2(\tau') = \beta_2(\tau'')$. В силу леммы 6.2.1 из [8, с. 134] о производной простой функции и условия (24), если $s' = t$, $s'' = \beta(t)$, то

$$\left|(\beta(t)-t)'_{t=s'}\right| \le \frac{1}{4}|F'(s'')-F'(s')| = \frac{1}{4}(\pi(f,s')-\pi(f,s'')) =$$

$$= \frac{1}{4}(\pi(f_2,\tau')-\pi(f_2,\tau'')) = \left|(\beta_2(t)-t)'_{t=\tau'}\right|$$

и, следовательно, $|1-\beta'(t)_{t=s'}| \le \left|1-\beta_2'(t)_{t=\tau'}\right|$.

Теперь в случае $n=2$ можем продолжить доказательство теоремы 1 при $0 < p \le 3$ следующим образом:

$$\int_0^{A_2}|\pi(f,t)|dt \le 2^{-p}\int_{-a^2/2}^{s_0}|\pi(f,\beta(t))-\pi(f,t)|^p|1-\beta'(t)|dt \le$$

$$\le 2^{-p}\int_{-a^2/2}^{0}|\pi(f_2,\beta_2(t))-\pi(f_2,t)|^p\left|1-\beta_2'(t)\right|dt =$$

$$= 2^{-p}\int_0^{a^2}\omega^p(\pi(f_2,t))dt = \int_{I_a^2}|f_2(x)|^p dx = 2^{1-p}\int_0^a(a-t)\omega^p(2t)dt.$$

Тот же прием, связанный с использованием неравенства для производной простой функции, позволяет, продолжив доказательство теоремы 2, точно оценить через модуль непрерывности (в случае его выпуклости вверх) и наилучшее приближение константой на классе $H^{2,\omega}_{a,\rho_2}$ в метрике L_p, $1 \le p < \infty$, причем экстремалью является та же функция $f_2(x)$.

Аналогичным образом доказывается, что стандартные функции $f_1(x)$ и $f_3(x)$, построенные выше для ρ_1 и ρ_3, являются экстремалями в соответствующих классах $H^{2,\omega}_{a,\rho_i}$, $i=1, 3$, как в задаче приближения в L_p средним значением при $0 < p \le 3$, так и в задаче наилучшего приближения константой при $1 \le p < \infty$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если классы* $H^{2,\omega}_{a,\rho_i}$, $i = 1, 2, 3$, *заданы на квадрате* I_a^2 *выпуклым вверх модулем непрерывности* $\omega(\delta)$ *и расстояниями* (1), *то при* $0 < p \le 3$ *верхняя грань*

$$\sup\left\{\int_{I_a^2}|f(x)-\eta(f)|^p dx\colon\ f\in H^{2,\omega}_{a,\rho_i}\right\},$$

где $\eta(x)$ *определена в* (4), *а также при* $1 \le p < \infty$ *верхняя грань*

$$\sup\left\{\inf_{\lambda\in R^1}\int_{I_a^2}|f(x)-\lambda|^p dx\colon\ f\in H^{2,\omega}_{a,\rho_i}\right\}$$

равны соответственно

$$\gamma_p^1(a,\omega) := 2^{-p}\int_0^{a\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-t\right)\omega^p(t)dt, \qquad i=1,$$

$$\gamma_p^2(a,\omega) := 2^{-p}\int_0^{2a}\left(a-\frac{t}{2}\right)\omega^p(t)dt, \qquad i=2, \tag{26}$$

$$\gamma_p^3(a,\omega) := 2^{-p}a\int_0^{a}\omega^p(t)dt, \qquad i=3,$$

и реализуются соответственно на функциях $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

5. Теорема 3 дает возможность точно оценить в тех же ситуациях и погрешность приближения на квадрате I_a^2 функции $f \in H_{a,\rho_i}^{2,\omega}$ сплайнами нулевого порядка по равномерному разбиению. Разделив стороны квадрата I_a^2: $\{x = (x_1, x_2), 0 \le x_1, x_2 \le a\}$ точками $x_1^k = ak/N$, $x_2^j = aj/N$, $k, j = 0, 1, \ldots, N$, разобьем квадрат I_a^2 на N^2 равных квадратов $\Delta_{k,j}$ со сторонами длины a/N. Зададим на I_a^2 подпространство $S_{N^2}^0$ кусочно-постоянных функций $\psi_N(x)$, совпадающих с некоторой константой c_{kj} внутри $\Delta_{k,j}$. Каждой функции $f \in C(I_a^2)$ сопоставим функцию $\psi_N(f, x) \in S_{N^2}^0$, у которой c_{kj} есть среднее значение $f(x)$ на $\Delta_{k,j}$.

Здесь важно, что экстремали $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, можем построить на квадрате I_a^2 не единственным образом, выбирая нулевую линию уровня и знак функции. За счет этого экстремали на каждом квадрате $\Delta_{k,j}$ можно построить такими, что полученная функция будет непрерывна на всем квадрате I_a^2 и не выйдет из класса $H_{a,\rho_i}^{2,\omega}$. Учитывая это обстоятельство и применяя на каждом из квадратов теорему 3, получаем такое утверждение.

Теорема 4. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *для функции* $f \in H_{a,\rho_i}^{2,\omega}$, $i = 1, 2, 3$, *справедливы точные оценки*

$$\int_{I_a^2} |f(x) - \psi_N(f, x)|^p \, dx \le N^2 \gamma_p^i\left(\frac{a}{N}, \omega\right), \qquad 0 < p \le 3,$$

$$\inf_{\psi_N \in S_{N^2}^0} \int_{I_a^2} |f(x) - \psi_N(x)|^p \, dx \le N^2 \gamma_p^i\left(\frac{a}{N}, \omega\right), \qquad 1 \le p < \infty,$$

где величины $\gamma_p^i(a, \omega)$ *определены в* (26).

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
3. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
4. *Корнейчук Н. П.* О линейных поперечниках классов H^ω // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1255–1264.
5. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 266–290.
7. *Корнейчук Н. П.* О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p // Мат. заметки. – 1971. – **10**, № 5. – С. 493–500.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 26.02.98