УДК 517.95

**С. П. Лавренюк, М. Б. Пташник** (Львів. ун-т)

# ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

A pseudoparabolic variational inequality is considered in a tube domain semibounded in a variable $t$. Under certain conditions imposed on coefficients of the inequality, the theorems on the existence and uniqueness of a solution are proved for the class of functions exponentially growing as $t \to \infty$.

Розглянуто псевдопараболічну варіаційну нерівність в напівобмеженій за змінною $t$ циліндричній області. За певних умов на коефіцієнти нерівності доведено теореми існування та єдиності розв'язку у класі функцій, експоненціально зростаючих при $t \to \infty$.

**1.** Багато задач практики (фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, перенесення вологи в грунті, дифузія у тріщинуватому середовищі з поглинанням або частковим насиченням та ін.) приводять до вивчення крайових задач для псевдопараболічних рівнянь. Загальну теорію таких рівнянь викладено в [1 – 3]. Задача Коші та мішані задачі для псевдопараболічних рівнянь і систем рівнянь вивчалися в [4 – 8], а задачі без початкових умов — в [9, 10] та ін. Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов досліджувались в [12, 13].

У даній праці досліджено умови існування та єдиності розв'язку псевдопараболічної нерівності без початкових умов.

Використовуватимемо такі позначення: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область; $Q_T = \Omega \times (-\infty; T]$, $T < \infty$; $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1; t_2)$, $-\infty < t_1 < t_2 \le T$; $V$ — замкнений підпростір, компактно і неперервно вкладений в $L^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$; $V^*$ — простір, спряжений до $V$; $K$ — опукла замкнена підмножина в $V$, що містить нульовий елемент;

$$L^r_{\mathrm{loc}}((-\infty; T], B) = \{ u(x,t) \colon u(x,t) \in L^r((t_1, T], B) \}, \qquad 1 \le r \le \infty,$$

для всіх $t_1 \in (-\infty; T]$, $B$ — банахів простір;

$$W = \{ w(x,t) \colon w(x,t) \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty; T], V),\ w_t \in L^2_{\mathrm{loc}}\big((-\infty; T], V^*\big) \}.$$

В області $Q_T$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку псевдопараболічної варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1, t_2}} \Bigg( v_t(v-u) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) v_{x_i, t}(v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i}(v_{x_j} - u_{x_j}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij,t}(x,t)(v_{x_i} - u_{x_i})(v_{x_j} - u_{x_j}) + \lambda \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)(v_{x_i} - u_{x_i})(v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n c_i(x,t) u_{x_i}(v-u) + \lambda (v-u)^2 + c_0(x,t) u (v-u) - f(x,t)(v-u) \Bigg) e^{2\lambda t}\, dx\, dt \ \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Bigg( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t_2)(v_{x_i}(x,t_2) - u_{x_i}(x,t_2))\,(v_{x_j}(x,t_2) - u_{x_j}(x,t_2)) +$$

$$+ \left(v(x,t_2)-u(x,t_2)\right)^2\Bigg) e^{2\lambda t_2}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t_1)\left(v_{x_i}(x,t_1)-u_{x_i}(x,t_1)\right)\left(v_{x_j}(x,t_1)-u_{x_j}(x,t_1)\right)+$$

$$+\left(v(x,t_1)-u(x,t_1)\right)^2\Bigg) e^{2\lambda t_1}\,dx, \qquad \lambda\in\mathbb{R}^1. \tag{1}$$

**Означення.** *Під розв'язком нерівності* (1) *будемо розуміти функцію* $u(x,t)$, *яка має такі властивості:* 1) $u\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}((-\infty;T],V)$; $u, u_x\in W$; 2) $u\in K$ *для майже всіх* $t\in(-\infty;T]$; 3) $u(x,t)$ *задовольняє нерівність* (1) *для майже всіх* $t_1,t_2\in(-\infty;T]$ *і для довільної функції* $v(x,t)$ *такої, що* $v, v_x\in W$ *і* $v\in K$ *для майже всіх* $t\in(-\infty;T]$.

**2.** Розглянемо спочатку питання про єдиність розв'язку нерівності (1). Позначимо через $\gamma_1$ таке число:

$$\gamma_1 = \sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n} c_i^2(x,t).$$

Будемо говорити, що коефіцієнти нерівності (1) задовольняють відповідно наступні умови, якщо для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi\in\mathbb{R}^N$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge a_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad a_0>0; \tag{2}$$

$$b_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le b^0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \qquad b_0>0; \tag{3}$$

$$c_0(x,t)\ge\gamma_0>0. \tag{4}$$

**Теорема 1.** *Нехай коефіцієнти нерівності* (1) *задовольняють умови* (2) – (4); $a_{ij}$, $b_{ij}$, $b_{ijt}$, $c_i\in L^2(Q_T)$ *і, крім того,* $2(2a_0-b^1)\gamma_0>\gamma_1$. *Тоді нерівність* (1) *не може мати більше ніж один розв'язок, що задовольняє умову*

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{\Omega}\left(u^2(x,t)+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,t)\right)e^{\beta t}dx = 0,$$

*де*

$$\beta = \frac{1}{2b^0}\left(a_0-\frac{b^1}{2}+\gamma_0-\sqrt{\left(a_0-\frac{b^1}{2}-\gamma_0\right)^2+\gamma_1}\;\right).$$

***Доведення.*** Припустимо, що існують два розв'язки $u_1, u_2$ нерівності (1). Оскільки $u_k, u_{kx_j}\in W$, $k=1,2$, $j=1,\ldots,n$, то згідно з теоремою 1.17 [2] маємо, що $u_k, u_{kx_jt}\in C\left((-\infty;T];L^2(\Omega)\right)$ і мають зміст інтеграли

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} u_k u_{kt}\,dx\,dt; \qquad \int_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i,j=1}^{n} u_{kx_it}u_{kx_jt}\,dx\,dt, \qquad i=1,2.$$

Розглянемо оператори $A, B$, які для довільних функцій $w_1(x,t), w_2(x,t) \in W$ і для майже всіх $t \in (-\infty; T]$ визначаються відповідно рівностями

$$\langle Aw_1, w_2\rangle(t) = \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{1x_i} w_{2x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i w_{1x_i} w_2 + c_0 w_1 w_2\right)dx;$$

$$\langle Bw_1, w_2\rangle(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt} w_{1x_i} w_{2x_j}\,dx.$$

Покажемо, що $A - B$, — монотонний оператор. На підставі умов теореми та елементарної оцінки

$$ab \le \frac{a^2\delta}{2} + \frac{b^2}{2\delta}, \quad \delta > 0,$$

отримуємо таку нерівність:

$$\langle (A-B)(w_1 - w_2), w_1 - w_2\rangle(t) \ge$$

$$\ge \int\limits_{\Omega}\left(\left(a_0 - \frac{b^1}{2} - \frac{\gamma_1\delta_0}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}(w_{1,x_i} - w_{2,x_i})^2\left(\gamma_0 - \frac{1}{2\delta_0}\right)(w_1 - w_2)^2\right)dx \ge$$

$$\ge \beta\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)(w_{1,x_i} - w_{2,x_j})(w_{1,x_i} - w_{2,x_j}) + (w_1 - w_2)^2\right)dx, \qquad (5)$$

де $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ — довільні функції з $W$.

Із оцінки (5) випливає, що

$$\langle (A-B)(w_1 - w_2), w_1 - w_2\rangle(t) \ge 0$$

для довільних $w_1, w_2 \in W$, тобто що оператор $A - B$ — монотонний.

Легко показати, що для функцій $u^i$ таких, що

$$u^i, u^i_x \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty; T]; V) \cap C\big((-\infty; T]; L^2(\Omega)\big), \qquad i = 1, 2,$$

які задовольняють нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left((v_t - f)(v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, v_{x_i t}(v_{x_j} - u_{x_j})\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt \ge$$

$$\ge -\lambda\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left((v-u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(v_{x_i} - u_{x_i})(v_{x_j} - u_{x_j})\right)e^{2\lambda t} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(v_{x_i} - u_{x_i})(v_{x_j} - u_{x_j})e^{2\lambda t}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(v_{x_i}(x,t_2) - u_{x_i}(x,t_2))\,(v_{x_j}(x,t_2) - u_{x_j}(x,t_2)) + \right.$$

$$\left. + (v(x,t_2) - u(x,t_2))^2\right)e^{2\lambda t_2}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(v_{x_i}(x,t_1)-u_{x_i}(x,t_1)\right)\left(v_{x_j}(x,t_1)-u_{x_j}(x,t_1)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(v(x,t_1)-u(x,t_1)\right)^2\right)e^{2\lambda t_1}\,dx$$

при $f=f_1$, $f=f_2$ відповідно справедлива оцінка

$$\int_{Q_{t_1,t_2}}(f_1-f_2)(u^1-u^2)e^{2\lambda t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq -\lambda\int_{Q_{t_1,t_2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right)\left(u^1_{x_j}-u^2_{x_j}\right)+(u^1-u^2)^2\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u^1_{x_i}(x,t_2)-u^2_{x_i}(x,t_2)\right)\left(u^1_{x_j}(x,t_2)-u^2_{x_j}(x,t_2)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(u^1(x,t_2)-u^2(x,t_2)\right)^2\right)e^{2\lambda t_2}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u^1_{x_i}(x,t_1)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-u^2_{x_i}(x,t_1)\right)\left(u^1_{x_j}(x,t_1)-u^2_{x_j}(x,t_1)\right)+\left(u^1(x,t_1)-u^2(x,t_1)\right)^2\right)e^{2\lambda t_1}\,dx-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}\left(u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right)\left(u^1_{x_j}-u^2_{x_j}\right)\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt. \qquad (6)$$

Із (6) отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left[\left(u^1(x,t)-u^2(x,t)\right)^2+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right)\left(u^1_{x_j}-u^2_{x_j}\right)\right]e^{2\lambda t}\,dx\right)dt \leq$$
$$\leq \lambda\int_{Q_{t_1,t_2}}\left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}\left(u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right)\left(u^1_{x_j}-u^2_{x_j}\right)+(u^1-u^2))^2\right]e^{2\lambda t}\,dx\,dt+$$
$$+\int_{Q_{t_1,t_2}}(f_1-f_2)(u^1-u^2)e^{2\lambda t}\,dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}\left(u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right)\left(u^1_{x_j}-u^2_{x_j}\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt. \qquad (7)$$

Поклавши в (7) $f_1=f-Au_1$ і $f_2=f-Au_2$, матимемо

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)+(u_1-u_2)^2\right)e^{2\lambda t}\,dx\right)dt \leq$$
$$\leq \lambda\int_{Q_{t_1,t_2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)+(u_1-u_2)^2\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \langle A(u_2-u_1), u_2-u_1\rangle e^{2\lambda t}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij,t}\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)e^{2\lambda t}\,dx\,dt.$$

Виконавши диференціювання по $t$ у лівій частині останньої нерівності, отримуємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} e^{2\lambda t}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)+(u_1-u_2)^2\right)dx\right)dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\langle (A-B)(u_2-u_1), u_2-u_1\rangle e^{2\lambda t}\,dt \le 0. \tag{8}$$

Позначимо

$$y(t) = \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)+(u_1-u_2)^2\right)dx$$

і скористаємось оцінкою (5). Тоді з (8) випливає

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[y'(t)+\beta y(t)\right]e^{2\lambda t}\,dt \le 0 \tag{9}$$

для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty; T]$, $t_1 < t_2$. Із (9) випливає, що для майже всіх $t \in (-\infty; T]$ справджується нерівність $y'(t)+\beta y(t) \le 0$.

Помноживши останню нерівність на $e^{\beta t}$ і проінтегрувавши в межах від $t_1$ до $t_2$, отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{\beta t}\right)dt \le 0,$$

звідки випливає

$$y(t_2)e^{\beta t_2} \le y(t_1)e^{\beta t_1}. \tag{10}$$

Перейшовши в (10) до границі при $t_1 \to \infty$ та використавши умову теореми, отримаємо $y(t_2)e^{\beta t_2} \le 0$ для всіх $t_2 \in (-\infty; T]$. З оцінки (10) випливає

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t_2)\left(u_{1x_i}-u_{2x_i}\right)\left(u_{1x_j}-u_{2x_j}\right)+(u_1-u_2)^2\right)dx = 0$$

для всіх $t_2 \in (-\infty; T]$, тобто $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ майже скрізь в $Q_T$. Теорему доведено.

**3.** Встановимо умови існування розв'язку нерівності (1). Нехай

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{2\left(\alpha_0+\sqrt{\alpha_0^2+\gamma_1 b^0}\right)},$$

якщо $\gamma_1 > 0$, $\alpha_1 = 0$, якщо $\gamma_1 = 0$, де $\alpha_0 = a_0 - \gamma_0 b^0 - \dfrac{b^1}{2}$.

**Теорема 2.** *Нехай коефіцієнти нерівності* (1) *задовольняють умови* (2) – (4); $a_{ij}$, $b_{ij}$, $b_{ijt}$, $c_i \in L^2(Q_T)$ *і, крім того, функції* $t \to a_{ij}(x, t)$, $t \to b_{ijt}(x, t)$, $t \to c_i(x, t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $t \to c_0(x, t)$, $t \to f(x, t)$ *є неперервні на* $(-\infty; T]$ *для майже всіх* $x \in \Omega$, *існує таке число* $\lambda$, $\lambda < \gamma_0 - \alpha_1$, *що* $f(x, t)e^{\lambda t} \in L^2(Q_T)$. *Тоді існує розв'язок* $u(x, t)$ *нерівності* (1) *такий, що*

$$\lim_{t \to -\infty} \int_\Omega \left[ \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x, t) + u^2(x, t) \right] e^{2\lambda t} dx = 0. \tag{11}$$

***Доведення.*** Розглянемо в області $Q_{t_0, T}$ допоміжну задачу

$$u_t + \sum_{i, j=1}^n \left( b_{ij}(x, t) u_{x_i, t} \right)_{x_j} + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u) = f_{t_0}(x, t), \tag{12}$$

$$u(x, t_0) = 0, \tag{13}$$

де $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (-\infty; T]$; $\mathcal{B}(u) = J(u - P_K(u))$, $J$ — оператор двоїстості між просторами $V$ і $V^*$, $P_K$ — оператор проектування $V$ на $K$;

$$f_{t_0} = \begin{cases} f(x, t), & (x, t) \in Q_{t_0, T}; \\ 0, & (x, t) \in Q_{t_0}. \end{cases}$$

Відомо [13], що оператор $\mathcal{B}$ є монотонний, обмежений і ліпшіц-неперервний. На підставі умов теореми, викладеного вище та [10] існує розв'язок $u(x, t)$ задачі (12), (13) такий, що

$$u \in L^2((t_0, T), V), \quad u_t \in L^2\left((t_0, T), V^*\right), \quad u_{x_i} \in L^2((t_0, T), V),$$

$$u_{x_i, t} \in L^2\left((t_0, T), V^*\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Розглянемо послідовність функцій $\left\{u^{k, \varepsilon}(x, t)\right\}$, які є розв'язками задачі (12), (13) при $t_0 = T - k$, $k = 1, 2, \ldots$, продовжимо кожну функцію $u^{k, \varepsilon}(x, t)$ нулем на область $Q_{T-k}$. Тоді справедлива рівність

$$\int_{Q_\tau} \Bigg( u_t^{k, \varepsilon} u^{k, \varepsilon} + \sum_{i, j=1}^n b_{ij}(x, t) u_{t, x_i}^{k, \varepsilon} u_{x_j}^{k, \varepsilon} + \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i}^{k, \varepsilon} u_{x_j}^{k, \varepsilon} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x, t) u_{x_i}^{k, \varepsilon} u^{k, \varepsilon} + c_0(x, t)(u^{k, \varepsilon})^2 + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u^{k, \varepsilon}) u^{k, \varepsilon} -$$

$$- f_{T-k}(x, t) u^{k, \varepsilon} \Bigg) e^{2\lambda t} dx dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \tau \le T, \tag{14}$$

з якої випливає оцінка

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left[ b_0 \sum_{i=1}^n \left( u_{x_i}^{k, \varepsilon} \right)^2 + \left( u^{k, \varepsilon} \right)^2 \right] e^{2\lambda t} dx + \int_{Q_\tau} \Bigg( \left( a_0 - \lambda b^0 - \frac{b^1}{2} - \frac{\gamma_1 \delta_0}{2} \right) \sum_{i=1}^n \left( u_{x_i}^{k, \varepsilon} \right)^2 +$$

$$+ \left( \gamma_0 - \lambda - \frac{1}{2\delta_0} - \frac{\delta_1}{2} \right) \left( u^{k, \varepsilon} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u^{k, \varepsilon}) u^{k, \varepsilon} \Bigg) e^{2\lambda t} dx dt \le$$

$$\leq \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_T} f^2(x,t) e^{2\lambda t}\,dx\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad \delta_1 > 0, \tag{15}$$

Позначимо

$$F_\lambda = \int\limits_{Q_T} f^2(x,t) e^{2\lambda t}\,dx\,dt.$$

Легко переконатись, що при умовах теореми з (15) випливають такі оцінки:

$$\int\limits_\Omega \left[ b_0 \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{k,\varepsilon}\right)^2 + \left(u^{k,\varepsilon}\right)^2 \right] e^{2\lambda t}\,dx \;\leq\; \mu_0 F_\lambda;$$

$$\int\limits_{Q_T} \left[ \left(u^{k,\varepsilon}\right)^2 + b_0 \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{k,\varepsilon}\right)^2 \right] e^{2\lambda t}\,dx\,dt \;\leq\; \mu_0 F_\lambda;$$

$$\int\limits_{Q_T} \mathcal{B}(u^{k,\varepsilon}) u^{k,\varepsilon} e^{2\lambda t}\,dx\,dt \;\leq\; \varepsilon\mu_0 F_\lambda, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

де $\mu_0$ не залежить від $\varepsilon$ і $k$.

З оцінок (16) випливає існування підпослідовності $\left\{u^{k_m,\varepsilon}\right\}$ послідовності $\left\{u^{k,\varepsilon}\right\}$ такої, що

$$\begin{aligned} & e^{\lambda t} u^{k_m,\varepsilon} \to e^{\lambda t} u^\varepsilon \quad *\text{-слабко в } L^\infty((-\infty;T],V); \\ & e^{\lambda t} u^{k_m,\varepsilon} \to e^{\lambda t} u^\varepsilon \quad \text{слабко в } L^\infty((-\infty;T],V) \text{ при } k_m \to \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

З (17) отримаємо, що $u^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t + \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij}(x,t) u_{x_i,t}\right)_{x_j} + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u) = f(x,t), \tag{18}$$

при цьому

$$e^{\lambda t} u^\varepsilon \in L^\infty((-\infty;T],V) \cap L^2((-\infty;T],V), \quad e^{\lambda t} u_t^\varepsilon \in L^2\left((-\infty;T],V^*\right),$$

$$e^{\lambda t} u_{x_i}^\varepsilon \in L^2((-\infty;T],V), \quad e^{\lambda t} u_{t,x_i}^\varepsilon \in L^2\left((-\infty;T],V^*\right), \quad i = 1,\ldots,n,$$

і для функції $u^\varepsilon(x,t)$ справедливі оцінки (16).

Нехай функція $v(x,t)$ така, що $v, v_x \in W$ і $v \in K$ для майже всіх $t \in (-\infty; T]$. Оскільки $\mathcal{B}(v) = 0$, то на підставі (18) отримаємо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg( v_t(v - u^\varepsilon) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) v_{t,x_i}(v_{x_j} - u_{x_j}^\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i}^\varepsilon (v_{x_j} - u_{x_j}^\varepsilon) + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} b_{ij,t}(x,t) + \lambda b_{ij}(x,t) \right) \times$$

$$\times (v_{x_i} - u_{x_i}^\varepsilon)(v_{x_j} - u_{x_j}^\varepsilon) + \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i}^\varepsilon (v - u^\varepsilon) + c_0 u^\varepsilon (v - u^\varepsilon) +$$

$$+ \lambda (v - u^\varepsilon)^2 - f(x,t)(v - u^\varepsilon) \Bigg) e^{2\lambda t}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Q_{t_1, t_2}} \big(\mathcal{B}(v) - \mathcal{B}(u^\varepsilon)\big)(v - u^\varepsilon) e^{2\lambda t} dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t_2)\big(v_{x_i}(x, t_2) - u^\varepsilon_{x_i}(x, t_2)\big)\big(v_{x_j}(x, t_2) - u^\varepsilon_{x_j}(x, t_2)\big) +$$

$$+ \big(v(x, t_2) - u^\varepsilon(x, t_2)\big)^2 \Bigg) e^{2\lambda t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t_1) \times$$

$$\times \big(v_{x_i}(x, t_1) - u^\varepsilon_{x_i}(x, t_1)\big)\big(v_{x_j}(x, t_1) - u^\varepsilon_{x_j}(x, t_1)\big) + \big(v(x, t_1) - u^\varepsilon(x, t_1)\big)^2 \Bigg) e^{2\lambda t_1} dx \ \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t_2)\big(v_{x_i}(x, t_2) - u^\varepsilon_{x_i}(x, t_2)\big)\big(v_{x_j}(x, t_2) - u^\varepsilon_{x_j}(x, t_2)\big) +$$

$$+ \big(v(x, t_2) - u^\varepsilon(x, t_2)\big)^2 \Bigg) e^{2\lambda t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t_1) \times$$

$$\times \big(v_{x_i}(x, t_1) - u^\varepsilon_{x_i}(x, t_1)\big)\big(v_{x_j}(x, t_1) - u^\varepsilon_{x_j}(x, t_1)\big) + \big(v(x, t_1) - u^\varepsilon(x, t_1)\big)^2 \Bigg) e^{2\lambda t_1} dx. \tag{19}$$

Покажемо, що існує послідовність $\{e^{\lambda t} u^{\varepsilon_m}(x, t)\} \subset \{e^{\lambda t} u^\varepsilon(x, t)\}$ функцій, визначених для $t \in (-\infty; T]$ зі значеннями в $V$, одностайно неперервна на будь-якому відрізку $[T_1, T_2] \subset (-\infty; T]$. Оскільки для функцій $e^{\lambda t} u^\varepsilon(x, t)$, $\varepsilon > 0$, справедлива друга із оцінок (16), то на підставі леми Фату отримаємо

$$\int\limits_{T_1 - 1}^{T_1} e^{2\lambda t} \liminf \|u^\varepsilon(x, t)\|_V^2 dt \leq \mu_0 F_\lambda,$$

звідки випливає, що для майже всіх $t \in [T_1 - 1, T_1]$

$$e^{2\lambda t} \liminf \|u^\varepsilon(x, t)\|_V^2 < \infty.$$

Тоді існує таке $\tilde{T} \in [T_1 - 1, T]$, що

$$e^{2\lambda \tilde{T}} \liminf \|u^\varepsilon(x, \tilde{T})\|_V^2 \leq \mu_1.$$

Нехай $\tilde{T} = T_1$ і $\{u^{\varepsilon_m}(x, t)\}$ — послідовність, для якої

$$\liminf \|u^{\varepsilon_m}(x, T_1)\|_V^2 = \lim_{m \to \infty} \|u^{\varepsilon_m}(x, T_1)\|_V^2.$$

Тоді $\|u^{\varepsilon_m}(x, T_1)\|_V^2 \leq \mu_2$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Покладемо в (19) $t_1 = T_1$, $t_2 = T_2 + \delta$, $v(x, t) = u^{\varepsilon_m}(x, T_1) e^{2\lambda(T_1 - t)}$. Шляхом нескладних викладок отримаємо наступну оцінку:

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg( \sum_{i=1}^n b_{ij}(x, T_1 + \delta)\Big(u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x, T_1 + \delta) e^{\lambda(T_1 + \delta)} - u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x, T_1) e^{\lambda T_1}\Big) \times$$

$$\times \left(u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x, T_1+\delta)e^{\lambda(T_1+\delta)} - u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x, T_1)e^{\lambda T_1}\right) +$$

$$+ \left(u^{\varepsilon_m}(x, T_1+\delta)e^{\lambda(T_1+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x, T_1)e^{\lambda T_1}\right)^2 \Bigg) dx \le \delta\mu_3, \tag{20}$$

де стала $\mu_3 > 0$ не залежить від $m$.

Скориставшись оцінкою (6), поклавши в ній

$$t_1 = T_1, \quad t_2 = t, \quad f_1(x,t) = f(x,t) - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t),$$

$$f_2(x,t) = f(x,t+\delta)e^{\lambda\delta} - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta},$$

$$u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t), \qquad u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta},$$

прийдемо до нерівності

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right)^2 e^{2\lambda t} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(u^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\lambda\delta}\right)^2 e^{2\lambda T_1} dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\left(u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t) - u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right) \times$$

$$\times \left(u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,t) - u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right)e^{2\lambda t} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,T_1)\left(u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\lambda\delta}\right) \times$$

$$\times \left(u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,T_1) - u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\lambda\delta}\right)e^{2\lambda T_1} dx \le$$

$$\le \mu_4 \int\limits_{Q_{T_1,t}} \left(u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right)^2 e^{2\lambda t} dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{T_1,t}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\lambda b_{ij} + \frac{1}{2} b_{ij,t}\right)\left(u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t) - u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right) \times$$

$$\times \left(u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,t) - u_{x_j}^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)\right)e^{2\lambda t} dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{T_1,t}} \left[f(x,t) - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t) - f(x,t+\delta) + A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)\right] \times$$

$$\times \left(u^{\varepsilon_m}(x,t) - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\lambda\delta}\right)e^{2\lambda t} dx\,dt. \tag{21}$$

Зауважимо, що з неперервності $f(x,t)$ за змінною $t$ випливає рівномірна неперервність на відрізку $[T_1, T_2]$ функції

$$\int\limits_{\Omega} f(x,t)\,dx;$$

тому

$$\int\limits_{Q_{T,t}} [f(x, t+\delta) - f(x,t)]^2 e^{2\lambda t} \le \delta\mu_5, \tag{22}$$

На підставі (20) – (22) та леми Гронуолла – Беллмана отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x, t+\delta) e^{\lambda(t+\delta)} - u_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t) e^{\lambda t} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| u^{\varepsilon_m}(x, t+\delta) e^{\lambda(t+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x,t) e^{\lambda t} \right|^2 \right] dx \le \delta\mu_6. \tag{23}$$

З нерівності (23) випливає одностайна неперервність за змінною $t$ на відрізку $[T_1, T_2]$ послідовності $\left\{u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\lambda t}\right\}$. Оскільки члени послідовності $\left\{u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\lambda t}\right\}$ задовольняють оцінки (16), то з неї можна виділити підпослідовність $\left\{u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)e^{\lambda t}\right\}$ таку, що при $m_k \to \infty$

$$u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad *\text{-слабко в } L^\infty((-\infty; T], V);$$

$$u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad \text{слабко в } L^\infty((-\infty; T], V);$$

$$u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad \text{рівномірно в } C([T_1; T_2], V).$$

Розглянемо тепер відрізки $[T-k, T]$, $k \in \mathbb{N}$. Згідно з теоремою Асколі – Арцела можна побудувати діагональну підпослідовність, для якої для довільного $T_1 \in (-\infty; T]$ при $m \to \infty$

$$u^{m,m}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad *\text{-слабко в } L^\infty((-\infty; T], V);$$

$$u^{m,m}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad \text{слабко в } L^\infty((-\infty; T], V);$$

$$u^{\varepsilon_{m_k}}(x,t)e^{\lambda t} \to u(x,t)e^{\lambda t} \quad \text{рівномірно в } C\big([T_1; T_2], L^2(\Omega)\big).$$

Легко показати, що функції $\left\{u^{m,m}(x,t)\right\}$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty; T]$, $t_1 < t_2$, задовольняють нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left( v_t(v - u^{m,m}) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_{x_i,t}(v_{x_j} - u_{x_j}^{m,m}) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^{m,m}(v_{x_j} - u_{x_j}^{m,m}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij,t}(v_{x_i} - u_{x_i}^{m,m})(v_{x_j} - u_{x_j}^{m,m}) +$$

$$+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(v_{x_i} - u_{x_i}^{m,m})(v_{x_j} - u_{x_j}^{m,m}) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_{x_i}^{m,m}(v - u^{m,m}) +$$

$$\left. + \lambda(v - u^{m,m})^2 + c_0 u^{m,m}(v - u^{m,m}) - f(v - u^{m,m}) \right) e^{2\lambda t} dx\, dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t_2)\big(v_{x_i}(x,t_2) - u_{x_i}^{m,m}(x,t_2)\big)\big(v_{x_j}(x,t_2) - u_{x_j}^{m,m}(x,t_2)\big) + \right.$$

$$+\left(v(x,t_2)-u^{m,m}(x,t_2)\right)^2\Big)e^{2\lambda t_2}dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\left(v_{x_i}(x,t_1)-u_{x_i}^{m,m}(x,t_1)\right)\left(v_{x_j}(x,t_1)-u_{x_j}^{m,m}(x,t_1)\right)+\left(v(x,t_1)-u^{m,m}(x,t_1)\right)^2\right)e^{2\lambda t_1}dx, \tag{24}$$

де $v$ — довільня функція, така, що $v, v_{x_i}\in W$, $i=1,\dots,n$, $v\in K$ для майже всіх $t\in(-\infty;T]$.

Перейшовши в (24) до границі при $m\to\infty$ та використавши оцінки (16), отримаємо, що $u(x,t)$ є розв'язком нерівності (1) в розумінні означення і задовольняє умову (11). Теорему доведено.

1. *Showalter R. E.* Pseudo-parabolic partial differential equations // Diss. Abstrs B. – 1969. – **29,** № 8. – P. 29 – 94.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Ting T. W.* Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Jap. – 1969. – **21**, № 3. – P. 440 – 453.
4. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3 – 50.
5. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1958. – **119,** № 4. – С. 640 – 643.
6. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – **76**, № 2. – P. 253 – 257.
7. *Сувейка И. В.* Об асимптотическом поведении решения смешанной задачи с третьим краевым условием в полупространстве для псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22,** № 8. – С. 1416 – 1424.
8. *Ford W. H.* Galerkin approximations to non-linear pseudo-parabolic partial differential equations // Aequet. amth. – 1976. – **14**, № 3. – P. 271 – 291.
9. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболева – Гальперна // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 1. – С. 124 – 128.
10. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Задача Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи. – Київ, 1985. – 46 с. – Деп. в ДНТБ України, № 2017-Ук 95.
11. *Лавренюк С. П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32,** № 10. – С. 1 – 5.
12. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.

Одержано 20.06.97