УДК 517: 512

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We suggest algebraic methods for investigating the spectra and the structures of solutions of degenerate dynamical systems. These methods consist in constructing and solving new classes of matrix equations. We prove the theorems on inertia of solutions of matrix equations, which generalize the known properties of the Lyapunov equation.

Запропоновано алгебраїчні методи дослідження спектра та структури розв'язків вироджених динамічних систем, що зводяться до побудови та розв'язування нових класів матричних рівнянь. Встановлюються теореми про інерцію розв'язків матричних рівнянь, що узагальнюють відомі властивості рівняння Ляпунова.

1. Введение. В прикладных исследованиях широко используются классы дифференциальных и разностных систем, не разрешенных относительно производных и итераций [1 – 3]. Динамика и устойчивость таких систем определяются расположением собственных значений некоторого пучка матриц в комплексной плоскости. Большинство известных методов исследования вырожденных систем основаны на процедурах сведения к линейным системам в нормальной форме.

В данной работе предлагаются методы исследования спектральных свойств и структуры решений вырожденных динамических систем, основанные на построении и изучении новых классов матричных уравнений. При этом устанавливаются теоремы об инерции эрмитовых решений матричных уравнений, обобщающие известные свойства уравнения Ляпунова.

2. Теорема инерции. Пусть $F(\lambda) = A - \lambda B$ — регулярный пучок матриц порядка n, спектр которого $\sigma(F)$ состоит из l собственных значений с учетом кратностей. Если пучок $F(\lambda)$ имеет бесконечные элементарные делители, то их максимальную степень обозначаем через ν. Обозначим через $l_+(F)$, $l_-(F)$ и $l_0(F)$ количества точек спектра $\sigma(F)$, принадлежащих соответствующим множествам

$$\Lambda_+ = \{\lambda\colon f(\lambda,\overline{\lambda})>0\}, \qquad \Lambda_- = \{\lambda\colon f(\lambda,\overline{\lambda})<0\},$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda\colon f(\lambda,\overline{\lambda})=0\},$$

где $f(\lambda,\overline{\lambda}) = \gamma_{00} + \gamma_{10}\lambda + \gamma_{01}\overline{\lambda} + \gamma_{11}\lambda\overline{\lambda}$ — заданная эрмитова функция. В качестве Λ_0 служит некоторая прямая или окружность, разделяющая плоскость C^1 на открытые области $\Lambda_+\neq\varnothing$ и $\Lambda_-\neq\varnothing$.

Для любой эрмитовой матрицы $X = X^*$ обозначим индексы инерции $i_+(X)$, $i_-(X)$ и $i_0(X)$, равные соответствующим количествам ее положительных, отрицательных и нулевых собственных значений с учетом кратностей.

Рассмотрим матричные соотношения

$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{11}AXA^* = Y \geq 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rang}[F(\lambda), Y] \equiv n, \qquad \lambda\in C^1, \tag{2}$$

$$\operatorname{rang}(BXB^*) = l. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если эрмитовы матрицы X и Y удовлетворяют уравнению* (1) *при условии* (2), *то выполняются соотношения*

$$l_+(F) = i_+(BXB^*), \qquad l_-(F) = i_-(BXB^*), \tag{4}$$

$$l_0(F) = 0. \tag{5}$$

Если к тому же выполнено условие (3), *то справедливы равенства*

$$l_+(F) = i_+(BXB^*), \quad l_-(F) = i_-(BXB^*). \tag{6}$$

При условии (5) *существуют эрмитовы матрицы* X *и* Y, *удовлетворяющие соотношениям* (1) – (3).

Доказательство. При условии регулярности пучка $F(\lambda)$ существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что [2]

$$PAQ = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где J — квадратная матрица порядка l, спектр которой $\sigma(J)$ совпадает с $\sigma(F)$, N — нильпотентная матрица порядка $n - l$ $(N^\nu = 0)$, элементы первой наддиагонали которой равны 0 или 1, а остальные элементы нулевые, I_l — единичная матрица порядка l. Полагая

$$X = Q\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{bmatrix}Q^*, \quad Y = P^{-1}\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2^* & Y_3 \end{bmatrix}P^{-1^*},$$

согласно (1) и (7), получаем независимые уравнения

$$\gamma_{00}X_1 + \gamma_{10}JX_1 + \gamma_{01}X_1J^* + \gamma_{11}JX_1J^* = Y_1, \tag{8}$$

$$\gamma_{00}X_2N^* + \gamma_{10}JX_2N^* + \gamma_{01}X_2 + \gamma_{11}JX_2 = Y_2, \tag{9}$$

$$\gamma_{00}NX_3N^* + \gamma_{10}X_3N^* + \gamma_{01}NX_3 + \gamma_{11}X_3 = Y_3. \tag{10}$$

При этом с учетом (2) имеем

$$BXB^* = P^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2N^* \\ NX_2^* & NX_3N^* \end{bmatrix}P^{-1^*}, \tag{11}$$

$$\operatorname{rang}[J - \lambda I_l, Y_1] \equiv l, \quad \lambda \in C^1. \tag{12}$$

Эквивалентность тождеств (2) и (12) вытекает из (7) и неравенства $Y \geq 0$. Тождество (12) эквивалентно условию управляемости пары матриц (J, Y_1) [4]. Можно показать, что функция f удовлетворяет условиям теорем об инерции для уравнений типа (8) [5, 6]. Следовательно, выполнены соотношения (4) и (5), причем,

$$l_+(F) = i_+(X_1) \leq i_+(BXB^*), \quad l_-(F) = i_-(X_1) \leq i_-(BXB^*),$$

где X_1 — невырожденная матрица-решение порядка l уравнения (8). При этом равенства (6) достигаются в том и только в том случае, когда выполнено условие (3).

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Если выполнены соотношения* (1), (2) *и неравенство* $BXB^* \geq 0$, *то* $\sigma(F) \subset \Lambda_+$.

***Следствие* 2.** *Если* X — *решение уравнения* (1) *при условиях* $\gamma_{11} = 0$, $Y = BWB^*$, *где* $W > 0$, *то выполняются равенства* (5) *и* (6).

Доказательство данного утверждения вытекает из того, что уравнение (10) при указанных предположениях разрешимо лишь в том случае, когда $\nu = 2$ [7]. При этом в соотношениях (9) – (11) $X_2N^* = 0$ и $NX_3N^* = 0$. Можно установить, что для любой матрицы Y, определенной в утверждении следствия 2, тождество (2) всегда имеет место.

***Замечание* 1.** Ранговое ограничение (2) в теореме 1 является аналогом условия управляемости линейных систем в форме Симона – Миттера [4]. В случае $Y \geq 0$ тождество (2) эквивалентно неравенству $F(\lambda)F(\lambda)^* + Y > 0$, $\lambda \in \in C^1$. Для выполнения равенства (5) достаточно, чтобы уравнение (1) было разрешимым при условии, что тождество (2) выполняется при любом $\lambda \in \Lambda_0$.

Теорема 2. *Пусть эрмитовы матрицы вида*

$$X = E\hat{X}E^*, \quad Y = BE\hat{Y}E^*B^* \geq 0, \tag{13}$$

где $E \neq 0$ — *любая матрица, определяемая соотношением*

$$\operatorname{rang}[AE, BE] = \operatorname{rang}(BE), \tag{14}$$

удовлетворяют уравнению (1) *и условию* (2).

Тогда выполнены равенства

$$l_+(F) = i_+(X), \quad l_-(F) = i_-(X), \quad l_0(F) = 0. \tag{15}$$

При условии (5) *существуют эрмитовы матрицы* X *и* Y, *для которых выполняются соотношения* (1) – (3), (13) – (15).

Доказательство. Условие (14) означает, что для некоторой матрицы Δ выполняется равенство $AE = BE\Delta$. Поэтому матрицы E, X и Y в (13), (14) имеют следующую структуру:

$$E = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = Q\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^*, \quad Y = P^{-1}\begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1*}, \tag{16}$$

где $X_1 = R\hat{X}R^*$, $Y_1 = R\hat{Y}R^*$, R — матрица размеров $l \times k$, удовлетворяющая равенству $JR = R\Delta$. Подставляя (16) в (1) и (2), получаем соотношения (8) и (12). Из (12), в частности, следует, что $\operatorname{rang} R = \operatorname{rang} E = l \leq k$. Равенства (15) вытекают из соотношений (8), (12), (16) и известных теорем инерции. При условии (5) можно подобрать матрицы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ такие, чтобы выполнялись соотношения (1) – (3), (13) – (15). Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Если в (14) матрица E имеет полный ранг по столбцам, то она является блочным собственным вектором пучка $F(\lambda)$, отвечающим блочному собственному значению Δ [8]. В этом случае $\sigma(\Delta) \subset \sigma(F)$. Обратное включение $\sigma(F) \subset \sigma(\Delta)$ выполняется при условии

$$\operatorname{rang}[F(\lambda), BE] \equiv n, \quad \lambda \in C^1. \tag{17}$$

Если матрица Y имеет структуру (13), то условие (17) является необходимым для выполнения тождества (2). При этом в случае $\hat{Y} > 0$ условия (2) и (17) эквивалентны.

Условия существования матриц X и Y, удовлетворяющих уравнению (1) и имеющих заданную структуру (13), зависят лишь от спектра $\sigma(F)$ и не связаны со свойствами бесконечных элементарных делителей пучка $F(\lambda)$. Если $\nu \leq 2$ или $\nu = 3$, $\det(\gamma_{01}I_l + \gamma_{11}J) \neq 0$, то при определении матрицы E в теореме 2 вместо условия (14) может быть использовано линейное уравнение $AE = BS$ относительно E и S. При этом теорема 2 остается справедливой.

Для определения матрицы E в теореме 2 могут быть использованы решения линейного матричного уравнения

$$AZB = BZA. \tag{18}$$

Если Z — решение уравнения (18), то условию (14) удовлетворяет матрица

$E=(ZB)^{\vee}$. Если решение Z уравнения (18) удовлетворяет одному из ограничений

$$Z = ZBZ, \qquad \operatorname{rang} Z = \operatorname{rang}(BZ), \tag{19}$$

то в теореме 2 можно положить $E=Z$. Одно из решений уравнения (18) можно вычислить в виде $Z = F(\alpha)^{-1}$ при $\alpha \notin \sigma(F)$, а соотношениям (18) и (19) удовлетворяет, в частности, интеграл

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma} F(\lambda)^{-1}\, d\lambda, \qquad \operatorname{rang} Z = l,$$

где σ — замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(F)$.

Следствие 3. *Если матрицы* (13) *удовлетворяют уравнению*

$$-AXB^* - BXA^* = Y \geq 0 \tag{20}$$

при условиях (2) *и* (14), *то на мнимой оси нет точек спектра* $\sigma(F)$ *и из них ровно* $i_+(X)$ *и* $i_-(X)$ *собственных значений находятся соответственно в левой и правой полуплоскости.*

Следствие 4. *Если матрицы* (13) *удовлетворяют уравнению*

$$BXB^* - AXA^* = Y \geq 0 \tag{21}$$

при условиях (2) *и* (14), *то на единичной окружности нет точек спектра* $\sigma(F)$ *и из них ровно* $i_+(X)$ *и* $i_-(X)$ *собственных значений находятся соответственно внутри и вне единичного круга.*

3. Устойчивость и представление решений вырожденных систем. Рассмотрим классы дифференциальных и разностных систем вида

$$Ax(t) - B\dot{x}(t) = g(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad t \geq 0, \tag{22}$$

$$Ax_t - Bx_{t+1} = g_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{23}$$

где $F(\lambda) = A - \lambda B$ — регулярный пучок матриц. Условия устойчивости дифференциальной (разностной) системы (22) ((23)) определяются условиями устойчивости нулевого решения соответствующей однородной системы и описываются расположением спектра $\sigma(F)$ относительно мнимой оси (единичной окружности).

Из результатов п. 2 вытекают следующие утверждения.

Теорема 3. *Дифференциальная система* (22) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существуют эрмитовы матрицы* X *и* Y, *удовлетворяющие уравнению* (20) *и соотношениям*

$$BXB^* \geq 0, \qquad \operatorname{rang}[F(\lambda), Y] \equiv n, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0.$$

Если дифференциальная система (22) *асимптотически устойчива, то для любой неотрицательно определенной матрицы вида* $Y = BE\hat{Y}E^*B^* \geq 0$ *при условии* (14) *уравнение* (20) *имеет решение* $X = E\hat{X}E^* \geq 0$.

Теорема 4. *Разностная система* (23) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существуют эрмитовы матрицы* X *и* Y, *удовлетворяющие уравнению* (21) *и соотношениям*

$$BXB^* \geq 0, \qquad \operatorname{rang}[F(\lambda), Y] \equiv n, \qquad |\lambda| \geq 1.$$

Если разностная система (23) *асимптотически устойчива, то для любой неотрицательно определенной матрицы вида* $Y = BE\hat{Y}E^*B^* \geq 0$ *при условии* (14) *уравнение* (21) *имеет решение* $X = E\hat{X}E^* \geq 0$.

Рассмотрим соотношения

$$AE = BE\Delta, \quad BH = AHG, \tag{24}$$

где E, Δ, H и G — некоторые матрицы размеров соответственно $n\times p$, $p\times p$, $n\times q$ и $q\times q$. Матрицы типа E, как установлено выше, позволяют выделить неотрицательно определенные решения уравнений (20) и (21), обеспечивающие условия асимптотической устойчивости систем (22) и (23). Покажем, что соотношения (24) могут быть использованы также при построении и изучении решений задач Коши (22) и (23). При этом будем использовать ограничение

$$\det[I_q - \lambda G] \neq 0 \quad (\lambda \in \sigma(F)). \tag{25}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены соотношения* (25), (24) *и равенства*

$$x_0 = Eu_0 + Hv_0, \quad g(t) = BE\varphi(t) + AH\psi(t), \tag{26}$$

где $\varphi(t)$ *— непрерывная вектор-функция,* $\psi(t)$ *— вектор-функция, имеющая производные* $\psi^{(i)}(t)$, $i \leq \nu$. *Тогда вектор-функция*

$$x(t) = Eu(t) + Hv(t), \tag{27}$$

где

$$u(t) = e^{\Delta t}u_0 - \int_0^t e^{\Delta(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \quad u(0) = u_0,$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} G^i\psi^{(i)}(t), \quad v(0) = v_0,$$

является решением дифференциальной системы (22). *Обратно, если* $x(t)$ *— решение системы* (22), *то существуют матрицы* E, Δ, H *и* G, *удовлетворяющие соотношениям* (24) – (27).

Доказательство. Согласно (7) и (24), получаем соотношения

$$[E, H] = Q\begin{bmatrix} R & S \\ 0 & L \end{bmatrix}, \quad [BE, AH] = P^{-1}\begin{bmatrix} R & JS \\ 0 & L \end{bmatrix},$$

$$JR = R\Delta, \quad NL = LG, \quad S = JSG.$$

Поскольку $N^\nu = 0$, то $LG^\nu = 0$. Если выполнено условие (25), то $S = 0$. В частности, если матрица G нильпотентна, то данное условие выполнено при любых $\lambda \in C^1$.

Подставляя (26) и (27) в (22), находим

$$\begin{bmatrix} R & JS \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta u(t) - \dot{u}(t) - \varphi(t) \\ v(t) - G\dot{v}(t) - \psi(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} JSG^\nu \\ LG^\nu \end{bmatrix}\psi^{(\nu)}(t) \equiv 0.$$

Это означает, что выражение (27) при условиях (24) – (26) представляет решение системы (22).

Для установления обратного утверждения достаточно положить

$$E = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\sigma (A - \lambda B)^{-1}d\lambda = Q\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P,$$

$$H = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\omega (B - \lambda A)^{-1}d\lambda = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}P,$$

$$\Delta = AE = P^{-1}\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P, \quad G = BH = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}P,$$

где σ и ω — замкнутые контуры, охватывающие соответственно спектр $\sigma(F)$ и точку 0. Очевидно, $G^{\nu} = 0$ и выполнено условие (25), а матрицы EB и HA (BE и AH) являются ортогональными проекторами, причем $EB + HA = I_n$ ($BE + AH = I_n$). Поэтому векторы $g(t)$ и $x(t)$ всегда представимы в виде (26) и (27). В частности, можно положить

$$u(t) = BEBx(t), \quad v(t) = AHAx(t), \quad \varphi(t) = \psi(t) = g(t).$$

Теорема доказана.

Аналогично устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть выполнены соотношения* (24), (25) *и равенства*

$$x_0 = Eu_0 + Hv_0, \quad g_t = BE\varphi_t + AH\psi_t, \tag{28}$$

где φ_t *и* ψ_t *— некоторые векторы,* $t = 0, 1, \ldots$. *Тогда выражение*

$$x_t = Eu_t + Hv_t, \tag{29}$$

где

$$u_t = \Delta^t u_0 - \sum_{i=0}^{t-1} \Delta^{t-i-1}\varphi_i,$$

$$v_t = \sum_{i=0}^{\nu-1} G^i \psi_{t+i}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

является решением разностной системы (23). *Обратно, если* x_t *— решение системы* (23), *то существуют матрицы* E, Δ, H *и* G, *удовлетворяющие соотношениям* (24), (25), (28) *и* (29).

Замечание 3. В теоремах 5 и 6 вместо условия (25) можно использовать более слабые ограничения

$$AHG^{\nu}\psi^{(\nu)}(t) \equiv 0, \quad AHG^{\nu}\psi_{t+\nu} \equiv 0,$$

учитывающие свойства векторов $\psi^{(\nu)}(t)$ и $\psi_{t+\nu}$. При этом в качестве ν может быть выбрано наименьшее целое неотрицательное число, при котором выполняются указанные ограничения.

4. Некоторые возможные обобщения. Изложенная методика распространяется на некоторые более общие дифференциальные и разностные системы

$$F(D)x(t) = g(t), \quad F(\lambda) = A_0 - \alpha_1(\lambda)A_1 - \ldots - \alpha_s(\lambda)A_s, \tag{30}$$

где D — оператор дифференцирования или смещения по t, $A_i \in C^{n\times n}$, $\alpha_i(\lambda)$ — компоненты аналитической вектор-функции $\alpha(\lambda)$, $i = 1, \ldots, s$. Аналоги уравнения Ляпунова для таких систем строим в виде [9, 10]

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} F_i X F_j^* = Y. \tag{31}$$

Если $F_i = A_i$ ($i = 0, \ldots, s$) и уравнению (31) удовлетворяют эрмитовы матрицы X и Y такие, что [10]

$$\left\| A_i X A_j^* + F(\lambda) C_{ij} F(\lambda)^* \right\|_1^s \geq 0, \quad Y + F(\lambda) S F(\lambda)^* > 0, \quad \lambda \in \Omega,$$

где $C = \| C_{ij} \|_1^s \geq 0$, $S \geq 0$ — некоторые матрицы, $\Omega \subset C^1$ — замкнутая область вида

$$\Omega = \left\{ \lambda \colon V_\lambda \Gamma V_\lambda^* \leq 0,\ V_\lambda = [\, \alpha(\lambda), I_s \,] \right\},$$

то спектр $\sigma(F)$ расположен вне области Ω (обобщение следствия 1).

Можно сформулировать обобщения теоремы 2, полагая в (31) [9]

$$F_i = W f_i(\Delta), \qquad Y = W \hat{Y} W^*, \qquad W = \begin{bmatrix} E \\ E\Delta \\ \vdots \\ E\Delta^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$A_0 E = \sum_{i=1}^{s} A_i E \alpha_i(\Delta),$$

где $k \leq s$. При этом множества Λ_+, Λ_- и Λ_0, относительно которых изучается расположение спектра $\sigma(F)$, описывает эрмитова функция

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(\lambda) \overline{f_j(\mu)}.$$

В случае матричного полинома $F(\lambda)$ решения задачи Коши для дифференциальных и разностных систем вида (30) определяются с использованием матриц Δ, E, G и H, удовлетворяющих соотношениям

$$A_0 E + A_1 E\Delta + \ldots + A_s E\Delta^s = 0,$$

$$A_s H + A_{s-1} HG + \ldots + A_0 HG^s = 0.$$

Последние соотношения являются обобщением равенств (24).

1. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 532 с.
3. *Хасина Е. Н.* Об управлении вырожденными линейными динамическими системами // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 4. – С. 30 – 37.
4. *Crossley T. R., Porter B.* Simple proof of the Simon–Mitter controllebility theorem // Electron. Lett., – 1973. – **9,** № 3. – P. 51 – 52.
5. *Carlson D., Hill R. D.* Controllability and inertia theory for functions of a matrix // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – **59.** – P. 260 – 266.
6. *Мазко А. Г.* К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 99 – 110.
7. *Мазко А. Г.* Распределение корней матричного полинома относительно плоских кривых // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 90 – 96.
8. *Хазанов В. Б.* О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц // Зап. научн. сем. Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **139.** – С. 111 – 124.
9. *Мазко А. Г.* Построение аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома // Укр. мат. журн. – 1995. – **47,** № 3. – С. 337 – 343.
10. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость некоторых классов динамических систем // Там же. – 1996. – **48,** № 8. – С. 1074 – 1079.

Получено 12.02.97