УДК 519. 22

Р. Е. Майборода (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ И ЭФЕКТИВНОСТЬ ВЗВЕШЕННОЙ КОРРЕЛОГРАММЫ

For a process $X(t) = \sum_{j=1}^{M} g_j(t)\,\xi_j(t)$, where $g_j(t)$ are nonrandom given functions, $(\xi_j(t), j = 1 \div M)$ is a stationary vector-valued Gaussian process, $\mathbf{E}\xi_j(t) = 0$, $\mathbf{E}\xi_k(0)\mathbf{E}\xi_l(\tau) = r_{kl}(\tau)$, we construct an estimate $\hat{r}_{kl}(\tau, T)$ of functions $r_{kl}(\tau)$ on the basis of observations $X(t)$, $t \in [0, T]$. We prove conditions of the asymptotic normality of $\sqrt{T}\left(\hat{r}_{kl}(\tau, T) - r_{kl}(\tau)\right)$ in the case where $T \to \infty$. We consider the problem of the optimal choice of parameters of the estimate $\hat{r}_{kl}$ depending on observations.

Для процесу $X(t) = \sum_{j=1}^{M} g_j(t)\,\xi_j(t)$, де $g_j(t)$ — невипадкові відомі функції, $(\xi_j(t), j = 1 \div M)$ — стаціонарний векторнозначний гаусів процес, $\mathbf{E}\xi_j(t) = 0$, $\mathbf{E}\xi_k(0)\mathbf{E}\xi_l(\tau) = r_{kl}(\tau)$, побудовано оцінку $\hat{r}_{kl}(\tau, T)$ функцій $r_{kl}(\tau)$ за спостереженнями $X(t)$, $t \in [0, T]$. Доведено умови асимптотичної нормальності $\sqrt{T}\left(\hat{r}_{kl}(\tau, T) - r_{kl}(\tau)\right)$ при $T \to \infty$. Розглянуто задачу оптимального підбору параметрів оцінки $\hat{r}_{kl}$ в залежності від спостережень.

1. Введение. Пусть наблюдения $X(t)$, $t \in [0, T_0]$, представляют собой случайный процесс вида

$$X(t) = \sum_{j=1}^{M} g_j(t)\,\xi_j(t), \tag{1}$$

где $g_j(t) = g_j^T(t)$ — известные неслучайные измеримые функции; $\xi_j(t)$ — ненаблюдаемые совместно гауссовские стационарные случайные процессы с нулевым средним и неизвестной матричной корреляционной функцией $R(\tau) = \left(r_{kl}(\tau)\right)_{k,l=1}^{M}$, $r_{kl}(\tau) = \mathbf{E}\,\xi_k(0)\,\xi_l(\tau)$. Наша задача заключается в том, чтобы по $X(t)$ оценить $r_{kl}(\tau)$. Модели данных вида (1) часто возникают в метеорологии и экономике, когда предполагается, что на изучаемый процесс воздействуют M факторов, не наблюдаемых явно, причем интенсивности воздействия изменяются со временем. В этом случае $g_j(t)$ представляет собой интенсивность влияния j-го фактора в момент t. Оценки корреляционной функции позволяют прогнозировать поведение $X(s)$ при $s > T_0$ по наблюдениям $X(t)$, $t \in [0, T_0]$.

В качестве оценки для $r_{kl}(\tau)$ рассмотрим взвешенную коррелограмму:

$$\hat{r}^T(\tau, a_{kl}) = \hat{r}_{kl}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T a_{kl}(t,\tau)\,X(t+\tau)\,dt, \quad 0 < T \le T_0 - \tau, \tag{2}$$

где $a_{kl}(t,\tau) = a_{kl}^T(t,\tau)$ — некоторая измеримая весовая функция. Свойства однородных $(a_{kl}(t,\tau) = 1)$ коррелограмм стационарных процессов хорошо изучены $[1-3]$.

Легко видеть, что $\mathbf{E}\,\hat{r}_{ij}(\tau) = r_{ij}(\tau)$, если выполнены следующие условия несмещенности:

при $\tau \ne 0$ или $\tau = 0$ $(i = j)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}(t,\tau)\,g_l(t)_{g_m}(t+\tau)\,dt = I\{l = i, m = j\} \quad \forall\, l, m = 1 \div M; \tag{3}$$

при $\tau = 0$ $(i \ne j)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}(t,\tau)\,g_l(t)\,g_m(t+\tau)\,dt \;=\; \frac{1}{2}I\{\{l,m\}=\{i,j\}\} \quad \forall\, l,m=1\div M\,.$$

Эти условия не определяют a_{ij} однозначно. Поэтому естественно стремиться выбрать такой вес a_{ij}, который минимизировал бы дисперсию оценки $\hat{r}_{ij}$. Рассмотрим случай, когда веса выбираются из некоторого конечномерного линейного пространства функций, т. е.

$$a_{ij}^T(t,\tau) \;=\; \sum_{l=1}^{L}\theta_l\,\alpha_l(t), \tag{4}$$

где $\alpha_l = \alpha_l^T$ — некоторые фиксированные измеримые функции; $\theta_l = \theta_l(\tau,i,j,T)$ — коэффициенты, выбираемые так, чтобы выполнялись условия несмещенности (3).

Легко видеть, что в этом случае дисперсия оценки имеет вид $\mathbf{E}\big(\hat{r}(\tau,a_{ij}) - r_{ij}(\tau)\big)^2 = \upsilon_{\vec\theta}^T/T$, где

$$\upsilon_{\vec\theta}^T \;=\; \sum_{m,n=1}^{L}\sigma_T(m,n)\,\theta_m\,\theta_n \;=\; \vec\theta'\,\Xi_T\,\vec\theta, \tag{5}$$

$$\sigma_T(m,n) \;=\; \sum_{ijkl=1}^{M}\int_{-T}^{T}\big(r_{lj}(u)r_{ik}(u)+r_{lk}(u+\tau)r_{ij}(u-\tau)\big)G_T(u,m,n,i,j,k,l)\,du;$$

$$G_T(u,m,n,i,j,k,l) \;=\; \frac{1}{T}\int_{\max(u,0)}^{\min(T,\,T+u)}\alpha_m(s-u)\,g_i(s-u+\tau)\,g_j(s)\,\times$$
$$\times\,\alpha_n(s)\,g_k(s+\tau)\,g_l(s-u)\,ds, \tag{6}$$

$\Xi_T = (\sigma_T(m,n))_{m,n=1}^{L}$, $\vec\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_L)'$ (штрих означает транспонирование).

Пусть $h=(M-1)k+l$. Для $k,l=1\div M$ обозначим

$$\varphi_{i,h}^T \;=\; \varphi_{i,(k,l)} \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T\alpha_i(t)\,g_k(t)\,g_l(t+\tau)\,dt,$$

$\Phi_T = \big(\varphi_{i,h}^T\big)_{i=1\div L,\,h=1\div M^2}$, e_h — M^2-мерный вектор, h-я координата которого равна 1, а остальные — нулю. В этих обозначениях условие несмещенности (3) имеет вид $\theta'\Phi_T = e'_{(M-1)i+j}$. Тогда минимум $\upsilon_{\vec\theta}^T$ при ограничении (3) будет

$$\upsilon_T^* \;=\; e'_{(M-1)i+j}\big(\Phi'_T\,\Xi_T^{-1}\,\Phi_T\big)^{-1}e_{(M-1)i+j}. \tag{7}$$

Минимум достигается при

$$\vec\theta^* \;=\; \Xi_T^{-1}\Phi_T\big(\Phi'_T\,\Xi_T^{-1}\,\Phi_T\big)^{-1}e_{(M-1)i+j}. \tag{8}$$

Считаем матрицы Ξ_T и $\Phi'_T\Xi_T^{-1}\Phi_T$ обратимыми.

Поскольку Ξ_T зависит от неизвестных r_{kl}, непосредственно воспользоваться формулами (7), (8) для определения θ_l невозможно. Поэтому предлагается сперва оценить $r_{kl}(u)$ на интервале $u\in[-T-\tau,\ T+\tau]$ „неточно" с помощью $\hat{r}(u,a)$, где a выбрано лишь из условий несмещенности, подставить получившиеся оценки в формулу для σ_T, получить оценку $\hat\Xi_T$ для Ξ_T и, заменив в (8) Ξ_T на $\hat\Xi_T$, найти оценку „оптимальных" коэффициентов $\hat\theta_T$.

В качестве оценки для r_{ij} можно взять $\check{r}_{ij}(\tau) = \hat{r}\left(\tau, \sum_{l=1}^{L} \hat{\theta}_l \alpha_l\right)$. Понятно, что эта оценка уже не будет взвешенной коррелограммой вида (2) и к ней неприменимы формулы для вычисления дисперсии (5), (6). Тем не менее, покажем, что при некоторых дополнительных условиях $\sqrt{T}\left(\check{r}_{ij}(\tau) - r_{ij}(\tau)\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{N}(0, v^*)$, где $v^* = \lim_{T\to\infty} v_T^*$. Иначе говоря, асимптотическая дисперсия нормированной оценки $\check{r}_{ij}(\tau)$ равна минимальной возможной для взвешенных коррелограмм с весами вида (4).

При таком подходе существенно требование невырожденности матрицы $\Xi = \lim_{T\to\infty} \Xi_T$. Вряд ли можно ожидать, что оценка $\check{r}_{ij}(\tau)$ будет иметь хорошие свойства в случае, когда Ξ_T стремится к вырожденной матрице. Однако задача минимизации $v_{\vec{\theta}}$ заданного (5) может быть решена и в этом случае. Соответствующую оценку $\vec{\theta}^*$ можно искать, применяя стандартные методы решения некорректных задач [4, 5]. Рассмотрим оценку, полученую одним из этих методов (регуляризация с помощью штрафного функционала) и покажем, что для нее так же достигается асимптотическая нормальность с „минимальной" предельной дисперсией v^*.

2. Основные теоремы. Для произвольной функции $a^T(t)$ обозначим $\boldsymbol{M}_t a^T(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a^T(t)\,dt$; $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_L(t))$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_L \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$\sigma_T(m,n) = \sum_{ijkl=1}^{M} \int_{-T}^{T} \left(r_{lj}(u) r_{ik}(u + \tau_n - \tau_m) + \right.$$
$$\left. + \, r_{lk}(u+\tau_n) r_{ij}(u - \tau_m)\right) G_T(u,m,n,i,j,k,l)\,du.$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_L = \tau$ это определение совпадает с (6). Далее, $\sigma(m,n) = \lim_{T\to\infty} \sigma_T(m,n)$, $\hat{r}^T = \left(\hat{r}^T(\tau,\alpha_1), \ldots, \hat{r}^T(\tau,\alpha_L)\right)'$.

Теорема 1. Если:

1) *существует* $C < \infty$, *такое, что для всех* $i = 1 \div M$, $l = 1 \div L$, $0 < t \le T < \infty$, $\left|g_i^T(t)\right| < C$, $\left|\alpha_i^T(t)\right| < C$;

2) *для всех* $n, m = 1 \div L$, $i,j,k,l = 1 \div M$, *существуют пределы* $G(u,m,n,i,j,k,l) = \lim G_T(u,m,n,i,j,k,l)$ *при* $T \to \infty$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|r_{kl}(u)\right| du < \infty$ *для всех* $k,l = 1 \div M$, *то* $\sqrt{T}\left(\hat{r}^T - \mathbf{E}\,\hat{r}^T\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{N}(0,\Xi)$, *где* $\Xi = \left(\sigma_{mn}\right)_{m,n=1}^{L}$,

$$\sigma_{mn} = \sum_{i,j,k,l=1}^{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r_{lj}(u)\, r_{ik}(u+\tau_n-\tau_m) + \right.$$
$$\left. + \, r_{lk}(u+\tau_n)\, r_{ij}(u-\tau_m)\right) G(u,m,n,i,j,k,l)\,du.$$

Доказательство см. в п. 4.

Пусть $\tilde{a}_{mn}^T$ — некоторая измеримая весовая функция. Обозначим

$$\tilde{r}_{mn}(u,T) = \frac{1}{T-u} \int_0^{T-u} \tilde{a}_{mn}^T(t,u)\, X(t)\, X(t+u)\,dt,$$

$$\tilde{\sigma}_{mn}(S) = \sum_{ijkl} \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{lj}(u)\,\tilde{r}_{ik}(u) + \tilde{r}_{lk}(u+\tau)\,\tilde{r}_{ij}(u-\tau)\right) G(u,m,n,i,j,k,l)\,du,$$

$$\overline{\sigma}_{mn}(S) = \sum_{ijkl} \int_{-S}^{S} \left(r_{lj}(u)\, r_{ik}(u) + r_{lk}(u+\tau)\, r_{ij}(u-\tau) \right) G(u, m, n, i, j, k, l)\, du,$$

$$\tilde{\Xi}(S) = \left(\tilde{\sigma}_{mn}(S) \right)_{m,\, n=1}^{L}.$$

Лемма 1. *Если выполнены условия* $1-3$ *теоремы* 1,

$$\sup_{0<t<T-u<\infty} \left| \tilde{a}_{mn}^{T}(t, u) \right| < \infty,$$

для $\tilde{a}_{mn}^{T}$ *выполнены условия несмещенности* (3), $S = S_T \to \infty$, $S_T = o(T)$, $\varepsilon_T \to 0$, $\frac{1}{\varepsilon_T}\left(\frac{S_T}{T}\right)^{1/2} \to 0$ *при* $T \to \infty$, *то*

$$\Pr\left\{ \left| \overline{\sigma}_{mn}(S_T) - \tilde{\sigma}_{mn}(S_T) \right| \geq \varepsilon_T \right\} \to 0, \quad T \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть*

1) *существует* $C < \infty$, *такое, что для всех* $j = 1 \div M$, $0 < t$, $u < T < \infty$, $|\alpha_j^T(t)| < C$, $\left| g_j^T(t) \right| < C$, $\left| \tilde{a}_{mn}^{T}(t, u) \right| < C$;

2) *для всех* $i, j = 1 \div M$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| r_{ij}(u) \right| du < \infty$;

3) *существуют пределы*

$$\mathbf{M}_t\, \alpha_i(t)\, g_k(t)\, g_l(t+\tau) < \infty,$$

$$\mathbf{M}_t\, \alpha_i(t+u)\, \alpha_j(t)\, g_k(t+u)\, g_l(t+u+\tau)\, g_n(t)\, g_m(t-\tau+u) < \infty;$$

4) $\det \Xi \neq 0$;

5) *для* $\tilde{a}_{mn}^{T}$ *выполнено условие несмещенности:*

$$\frac{1}{T-u} \int_{0}^{T-u} \tilde{a}_{mn}^{T}(t, u)\, g_i(t)\, g_j(t+u)\, du = I\{ i = m,\ j = n \};$$

6) $S_T = o(T)$, $S_T \to \infty$, $T \to \infty$.

Тогда $\sqrt{T}\left(\check{r}_{ij}(\tau) - \mathbf{E}\check{r}_{ij}(\tau) \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, v^{*})$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{\Xi}_T = \tilde{\Xi}(S_T)$,

$$\vec{r} = \left(r_{11}(\tau), r_{12}(\tau), \ldots, r_{1M}(\tau), r_{21}(\tau), \ldots, r_{MM}(\tau) \right)'.$$

Тогда $\mathbf{E}\hat{r}(\tau, \alpha) = \Phi_T \vec{r}$. По определению $\hat{\theta}_l(S_T) = \tilde{\Xi}_T^{-1} \Phi_T \left(\Phi_T' \tilde{\Xi}_T^{-1} \Phi_T \right)^{-1} \times$ $\times\, e_{(M-1)i+j}$. Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{L} \hat{\theta}_l(S_T)\, \mathbf{E}\hat{r}(\tau, \alpha_l) = e_{(M-1)i+j}' \left(\Phi_T' \tilde{\Xi}_T^{-1} \Phi_T \right)^{-1} \left(\Phi_T' \tilde{\Xi}_T^{-1} \Phi_T \right) \vec{r} = r_{ij}(\tau).$$

Имеем

$$J_T = \sqrt{T}\left(\check{r}_{ij}(\tau) - r_{ij}(\tau) \right) =$$

$$= \sqrt{T} \left(\sum_{l=1}^{L} \hat{\theta}_l(S_T)\, \hat{r}(\tau, \alpha_l) - \sum_{l=1}^{L} \hat{\theta}_l(S_T)\, \mathbf{E}\hat{r}(\tau, \alpha_l) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \hat{\theta}_l(S_T) \left(\sqrt{T} \left(\hat{r}(\tau, \alpha_l) - \mathbf{E}\hat{r}(\tau, \alpha_l) \right) \right).$$

Учитывая лемму 1 и условие 4 теоремы, имеем $\hat{\theta}_l(S_T) \to \theta_l^{*}$ по вероятности $(T \to \infty)$, а согласно теореме 1 — $\sqrt{T}\left(\hat{r}(\tau, \alpha_l) - \mathbf{E}\hat{r}(\tau, \alpha_l) \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Xi)$. Поэтому $J_T \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, (\theta^{*})' \,\Xi\, \theta^{*} \right) = \mathcal{N}(0, v^{*})$. Теорема доказана.

Если условие 4 теоремы 2 не выполняется, то для выбора оптимального веса воспользуемся методом штрафных функций. А именно, пусть γ_T — некоторая числовая последовательность, $\gamma_T \to 0$, $T \to \infty$. Предположим, что $\Phi_T \to \Phi$, где Φ — некоторая матрица, причем

$$\Theta = \left\{ x : x'\Phi = e'_{(M-1)i+j} \right\} \neq \varnothing. \tag{9}$$

Выберем произвольное $\theta_0 \in \Theta$ и обозначим

$$\tilde{y}(T) = \underset{y \in R^L : y'\Phi = 0}{\arg\min} \left\{ \left\| \tilde{\Xi} y + \tilde{\Xi}\theta_0 \right\|^2 + \gamma_T \| y \|^2 \right\},$$

$$\tilde{\theta}(T) = y(T) + \theta_0, \quad \check{r}_{ij}(\tau) = \sum_l \tilde{\theta}_l(T)\, \hat{r}(\tau, \alpha_l).$$

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1 – 3 *и* 5, 6 *теоремы* 1 *и*

1) $\gamma_T \to 0$, $S_T / T \to 0$, $\dfrac{1}{\gamma_T}\left(\int_{|u|>S_T} (r_{lm}(u))^2 du \right)^2 \to 0$, $(S_T / T)^{1/2} / \gamma_T \to 0$,

при $T \to \infty$ *для всех* $l, m = 1 \div M$;

2) $|\Phi_T - \Phi| = o\left(T^{-1/2}\right)$, $T \to \infty$;

3) $\theta_0 \in \Theta$, *где* Θ *определено* (9), *то* $\sqrt{T}\left(\check{r}_{ij}(\tau) - r_{ij}(\tau) \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, v^*)$.

3. Примеры и замечания. 1. Пусть $g_i(t)$ — ограниченные периодические функции от t с периодом P (не зависящие от T). Выберем $\alpha_i(t)$ тоже периодическими с периодом P. Тогда, если T кратно P, то $\phi^T_{i(k,l)} = \phi^P_{i(k,l)}$, а для других T, $\left| \phi^T_{i(k,l)} - \phi^P_{i(k,l)} \right| \le C / T$ (так что условие 3 теоремы 3 в этом случае выполнено для $\Phi = \Phi_P$). Кроме того,

$$G(u, m, n, i, j, k, l) =$$

$$= \frac{1}{P} \int_0^P \alpha_m(s-u)\, g_i(s-u+\tau) g_j(s)\, \alpha_n(s)\, g_k(s+\tau) g_l(s-u)\, ds. \tag{10}$$

Если $X(t) = \xi_1(t) + \cos(2\pi t)\, \xi_2(t)$, т. е. $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = \cos(2\pi t)$, то для оценки r_{22} можно положить $a_{22}(t, \tau) = 4\cos(4\pi t + 2\pi\tau)$. Легко проверить, что условия (2) для a_{22} выполнены. Функции $G(u, i, j, k, l)$, получающиеся из (10) подстановкой a_{22} вместо α_n и α_m, вычисляются в явном виде:

$$G(u, 1, 1, 1, 1) = 8\cos(4\pi u), \qquad G(u, 1, 1, 2, 2) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi(\tau + u)),$$

$$G(u, 1, 2, 1, 2) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi u), \quad G(u, 1, 2, 2, 1) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi\tau),$$

$$G(u, 2, 1, 1, 2) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi\tau), \quad G(u, 2, 1, 2, 1) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi u),$$

$$G(u, 2, 2, 1, 1) = 2\cos(4\pi u)\cos(2\pi(\tau - u)),$$

$$G(u, 2, 2, 2, 2) = 2\cos(4\pi u)\cos^2(2\pi\tau) + \cos^2(2\pi u) + 1/2,$$

Все прочие $G(u, i, j, k, l) = 0$.

Для оценки $r_{11}(\tau)$, если τ не является целым числом, можно положить $a_{11}(t, \tau) = 1 - 2\cos(4\pi t + 2\pi\tau)/\cos(2\pi\tau)$, а для оценки $r_{12}(\tau)$ при $\tau \neq k/2$, где k целое, $a_{12}(t, \tau) = 2\sin(2\pi(t + \tau))/\sin(2\pi\tau)$.

Заметим, что вообще, для периодических функций с периодом P, при $\tau = kP$ оценить $r_{ij}(\tau)$, $i = j$, с помощью взвешенной коррелограммы невозможно, поскольку в этом случае

$$\int a(t, \tau)\, g_i(t + \tau)\, g_j(t)\, dt = \int a(t, \tau)\, g_i(t)\, g_j(t)\, dt = \int a(t, \tau)\, g_i(t)\, g_j(t + \tau)\, dt,$$

и поэтому не существует весовой функции a, удовлетворяющей условиям несмещенности. Это не означает невозможности оценки $r_{ij}(kP)$ вообще. Например, если $r_{ij}(\tau)$ гладкие, то $r_{ij}(kP)$ можно оценивать, интерполируя соседние значения.

2. Пусть $g_j^T(t) = \bar{g}_j(t/T)$, где $\bar{g}_j(s)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке [0, 1]. Тогда $\phi_{i(k,l)}^T \to \phi_{i(k,l)} = \int_0^1 \bar{\alpha}_i(t)\,\bar{g}_k(t)\,\bar{g}_l(t)\,dt$,

$$G(u,m,n,i,j,k,l) = G(m,n,i,j,k,l) = \int_0^1 \bar{\alpha}_m(s)\,\bar{\alpha}_n(s)\,\bar{g}_i(s)\,\bar{g}_j(s)\,\bar{g}_k(s)\,\bar{g}_l(s)\,ds$$

не зависит от u,

$$v_{\bar{\theta}} = \sum_{ijkl} \gamma_{ijkl}\,\rho_{ijkl}, \tag{11}$$

где $\gamma_{ijkl} = \sum_{mn} \theta_m\, G(m,n,i,j,k,l)\,\theta_n$;

$$\rho_{ijkl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bigl(r_{lj}(u)\, r_{ik}(u) + r_{lk}(u+\tau)\, r_{ij}(u-\tau) \bigr) du. \tag{12}$$

Коэффициенты γ_{ijkl} не меняются при любой перестановке своих индексов.

Заметим, что поскольку $\phi_{i,(k,l)} = \phi_{i,(l,k)}$, условия несмещенности (3) для $k \neq l$ удовлетворить не удается. Поэтому при оценке дисперсий в теоремах 2, 3 можно использовать усредненные корреляции $\bar{r}_{ij} = 1/2\bigl(r_{ij}(\tau) + r_{ji}(\tau)\bigr)$. Легко видеть, что $\hat{r}(\tau, \bar{a}_{ij})$ с весом $\bar{a}_{ij}$, удовлетворяющим условию

$$\frac{1}{T}\int_0^T \bar{a}_{ij}(t)\, g_k(t)\, g_l(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2} I\{\{i,j\} = \{k,l\}\}$$

будет несмещенной оценкой $\bar{r}_{ij}$, причем $\sigma(m,n) = \sum_{ijkl} \gamma_{ijkl}\,\bar{\rho}_{ijkl}$, где $\bar{\rho}_{ijkl}$ получается из (12) заменой r_{ij} на $\bar{r}_{ij}$.

Пусть $\bar{g}_1(s) = 1$, $\bar{g}_2(s) = s$. Положим $\alpha_l(s) = s^l$, $l = 0, 1, 2$. Тогда оценки $\hat{r}(\tau, a_{ij})$ с весами $a_{11}^T = 9 - 36t/T + 30t^2/T^2$, $a_{12}^T = 6 - 42t/T + 45t^2/T^2$, $a_{22}^T = 30 - 180t/T + 180t^2/T^2$, будут несмещенными и асимптотически нормальными для $\bar{r}_{ij}(\tau)$, а их асимптотические дисперсии можно определить по (11), где для a_{11} значения $\gamma_{1111} = 9$, $\gamma_{1112} = 3/2$, $\gamma_{1122} = 27/35$, $\gamma_{1222} = 81/140$, $\gamma_{2222} = 17/35$.

4. Доказательства. Доказательство теоремы 1 проведем методом моментов с помощью диаграммной техники [1–3]. Обозначим $Y_T = \sqrt{T}\bigl(\hat{r}^T - \mathbf{E}\,\hat{r}^T\bigr)$ и для любых мультииндексов $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y^\gamma = \prod_{j=1}^n y_j^{\gamma_j}$. Пусть $Y = (y_1, \ldots, y_L)$ — гауссовский случайный вектор с нулевым средним и корреляционной матрицей Ξ. Покажем, что $\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, Y_T^\gamma = \mathbf{E}\, Y^\gamma$ для любого γ, $\gamma_j > 0$. Из этого следует слабая сходимость Y_T к Y. Вследствие произвольности α_j и L в формулировке теоремы, достаточно ограничиться случаем $\gamma_j = 1$, $j = 1 \div L$.

Обозначим $\zeta_j(t) = \alpha_j^T(t)\, X(t+\tau_j)$, $\eta_j(t) = X(t)$. Тогда $\hat{r}(\tau_k, \alpha_k) = 1/T \int_0^T \zeta_k(t)\,\eta_k(t)\,dt$. Пусть

$$P_T = \mathbf{E}\prod_{k=1}^{L}\left(\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \zeta_k(t_k)\,\eta_k(t_k) - \mathbf{E}\,\zeta_k(t_k)\,\eta_k(t_k)\,dt_k \right).$$

Требуется доказать, что $\lim_{T\to\infty} P_T = \mathbf{E}\prod_{k=1}^{L} y_k$. Действительно, при нечетных L $\mathbf{E}\prod_{k=1}^{L} y_k = 0$, а при четных согласно формуле Иесерлиса [1]

$$\mathbf{E}\prod_{k=1}^{L} y_k = \sum_{\{D_1,\ldots,D_{L/2}\}} \prod_{j=1}^{L/2} \sigma\big(D_j(1), D_j(2)\big),$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $\{1, \ldots, L\}$ на непересекающиеся двухэлементные множества $D = \{D(1), D(2)\}$. Заметим, что $\sigma(D(1), D(2)) = \sigma(D(2), D(1))$, так что порядок элементов D в этой формуле несуществен.

С другой стороны, согласно формуле Леонова–Ширяева [1]

$$P_T = T^{-L/2}\int_0^T \xleftrightarrow{\;L\;} \int_0^T \mathbf{E}\prod_{k=1}^{L} \left(\zeta_k(t_k)\eta_k(t_k) - \mathbf{E}\,\zeta_k(t_k)\eta_k(t_k)\right) dt_1\ldots dt_L =$$

$$= \sum_{D=\{D_1,\ldots,D_L\}\in\mathcal{D}} T^{-L/2}\int_0^T \xleftrightarrow{\;L\;} \int_0^T \mathbf{E}\prod_{k=1}^{L} \operatorname{cov}(D_k)\,dt_1\ldots dt_L, \tag{13}$$

где для $D = (\zeta, \eta)$, $\operatorname{cov}(D) = \mathbf{E}\,\zeta\eta$, а $\mathcal{D}$ — набор всех возможных разбиений таблицы

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \zeta_1(t_1) & \eta_1(t_1) \\ \zeta_2(t_2) & \eta_2(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \zeta_L(t_L) & \eta_L(t_L) \end{pmatrix}$$

на непересекающиеся двуэлементные множества D_k, не содержащие строк таблицы $\mathbb{D}$.

Будем говорить, что разбиение $D = \{D_1, \ldots, D_L\}$ — простое, если для каждого $D_i \in D$ найдется $D_{i'}$ такое, что $D_i \cup D_{i'}$ является объединением двух строк таблицы $\mathbb{D}$. Пару $D_i, D_{i'}$ назовем простым блоком. Возможны два варианта простых блоков. Либо $D_i = \{\zeta_k(t_k), \zeta_l(t_l)\}$, $D_{i'} = \{\eta_k(t_k), \eta_l(t_l)\}$, $k < l$, т. е. $D_i, D_{i'}$ располагаются в $\mathbb{D}$ „вертикально". Такой блок обозначим $d = (d(1), d(2), d(3)) = (k, l, \|)$. Либо $D_i = \{\zeta_k(t_k), \eta_l(t_l)\}$, $D_{i'} = \{\eta_k(t_k), \zeta_l(t_l)\}$, т. е. D_i, $D_{i'}$ располагаются в $\mathbb{D}$ „накрест". Такой блок обозначим $d = (d(1), d(2), d(3)) = (k, l, \times)$.

Сумму в (13) разобьем на две: по $D \in \mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}'$ — набор простых блоков и $D \in \mathcal{D}'' = \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}'$. Если L нечетно, то $\mathcal{D}' = \varnothing$. Пусть L четно. Любое разбиение $D \in \mathcal{D}'$ можно представить в виде $\{d_1, \ldots, d_{L/2}\}$, где d_i — простые блоки. Соответствующие слагаемые в сумме (13) будут иметь вид

$$T^{-L/2}\int_0^T \xleftrightarrow{\;L\;} \int_0^T \prod_{k=1}^{L} \operatorname{cov}(D_k)\,dt_1\ldots dt_L = \prod_{k=1}^{L/2} S(d_k),$$

где при $d(3) = \times$,

$$S(d) = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \mathbf{E}\left(\zeta_{d(1)}(t_{d(1)})\,\eta_{d(2)}(t_{d(2)})\right)\mathbf{E}\left(\zeta_{d(2)}(t_{d(2)})\,\eta_{d(1)}(t_{d(1)})\right) d\,t_{d(1)}\,t_{d(2)} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \sum_{i,j,k,l=1}^{M} a_{d(1)}(t)\, g_i(t+\tau_{d(1)})\, g_j(s)\, r_{ij}(s-t-\tau_{d(1)}) \times$$

$$\times\, a_{d(2)}(s)\, g_l(t+\tau_{d(2)})\, g_k(s)\, r_{lk}(s-t-\tau_{d(2)})\, dt\, ds =$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{M} \int_{-T}^{T} r_{ij}(u-\tau_{d(1)})\, r_{lk}(u+\tau_{d(2)})\, G_T(u, d(1), d(2), i, j, k, l)\, du \qquad (14)$$

и при $T \to \infty$

$$S(d) \to \sum_{i,j,k,l=1}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} r_{ij}(u-\tau_{d(1)})\, r_{lk}(u+\tau_{d(2)})\, G(u, d(1), d(2), i, j, k, l)\, du.$$

Если $d = \|$, получаем

$$S(d) = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \mathbf{E}\left(\zeta_{d(1)}(t_{d(1)})\,\zeta_{d(2)}(t_{d(2)})\right)\mathbf{E}\left(\eta_{d(2)}(t_{d(2)})\,\eta_{d(1)}(t_{d(1)})\right) dt_{d(1)}\, dt_{d(2)} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \sum_{i,x,y,z=1}^{M} a_{d(1)}(t)\, g_i(t+\tau_{d(1)})\, g_x(s+\tau_{d(2)})\, r_{ix}(s-t+\tau_{d(2)}-\tau_{d(1)}) \times$$

$$\times\, a_{d(2)}(s)\, g_y(t)\, g_z(s)\, r_{yz}(s-t)\, dt\, ds.$$

Сделав замену $x \to k$, $y \to k$, $z \to j$, как в случае $d(3) = \times$, получим

$$S(d) \to \sum_{i,j,k,l=1}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} r_{ik}\left(u+\tau_{d(2)}-\tau_{d(1)}\right) r_{lj}(u)\, G(u, d(1), d(2), i, j, k, l)\, du.$$

Итак, $\lim_{T\to\infty} S(m,n,\times) + S(m,n,\|) = \sigma(m,n)$. Суммируя по всем простым разбиениям, получаем $\sum_{D\in\mathcal{D}'} \prod_{k=1}^{L/2} S(d_k) \to \mathbf{E}\prod_{k=1}^{L/2} y_k$.

Осталось доказать, что $\sum_{D\in\mathcal{D}''} \prod_{k=1}^{L/2} S(d_k) \to 0$. Элементы D_i и D_j разбиения D назовем сцепленными, если каждый из них включает в себя компоненту из некоторой общей для них строки таблицы $\mathbb{D}$. Группу $D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}$ элементов разбиения D назовем композиционным блоком порядка n, если D_{i_j} сцеплено с $D_{i_{j+1}}$ при $j = 1 \div n-1$, D_{i_n} сцеплено с D_{i_1}. Если $n = 2$, то композиционный блок будет простым. Таким образом, любое слагаемое в сумме $\sum_{D\in\mathcal{D}''}$ можно представить в виде $\prod_{j=1}^{d} I^{l_j} \times \prod_{p=0}^{q} S(d_p)$, где $S(d_p)$ — интегралы по простым блокам; I^n — интеграл по композиционному блоку порядка $n \geq 3$ вида

$$I^n = T^{-n/2}\int_0^T \overset{n}{\longleftrightarrow} \int_0^T \operatorname{cov}\left(D_{i_1}\right)\ldots\operatorname{cov}\left(D_{i_n}\right) dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \sum_{i_m, j_m} T^{-n/2}\int_0^T \overset{n}{\longleftrightarrow} \int_0^T \tilde g_{i_m}\left(t_m + \tilde\tau_{i_m}\right) \tilde g_{j_m}\left(t_m + \tilde\tau_{j_m}\right) \tilde\alpha_{i_m}(t_m) \times$$

$$\times\, r_{i_m j_m}\left(t_{[m+1]} - t_m + \tilde\tau_{[m+1]} - \tilde\tau_m\right) dt_1 \ldots dt_n,$$

где $[m] = m$ при $m \leq n$, $[m] = 1$ при $m > n$. Сумма берется по всем возможным наборам индексов i_m, j_m. Функции $\tilde\alpha_i$, $\tilde g_i$ и $\tilde\tau_i$ принимают значения из наборов $\tilde\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_L\}$, $\tilde g \in \{g_1, \ldots, g_M\}$, $\tilde\tau \in \{0, \tau_1, \ldots, \tau_L\}$. Сделав в этом интеграле замену переменных $x_1 = t_2 - t_1$, $x_2 = t_3 - t_2$, … , $x_n = t_n$ и оценив $|\tilde\alpha_i(t)| < C$, $|\tilde g_i(t)| < C$, $|\tilde\tau_i| < V$, получим

$$I^n \leq T^{n/2} 2^{2n} C^{2n} \int_{-T-V}^{T+V} \overset{n}{\longleftrightarrow} \int_{-T-V}^{T+V} \prod_{m=1}^{n-1} \left| r_{i_m j_m}(x_m) \right| \times$$

$$\times \left| r_{i_n j_n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) \right| dx_1 \ldots dx_n \leq C' T^{-n/2} T \to 0$$

при $n \geq 3$. Теорема доказана.

***Доказательство леммы* 1.** Достаточно показать, что в условиях леммы для любого τ

$$\Pr \left\{ \left| \int_{-S_T}^{S_T} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) \tilde{r}_{lk}(u+\tau) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - r_{ij}(u-\tau) r_{lk}(u+\tau) \right) G(u, n, m, i, j, k, l)\, du \right| \geq C \frac{S_T}{T} \right\} \to 0$$

при $T \to \infty$.

Обозначив $S = S_T$, $G(u) = G(u, n, m, i, j, k, l)$, $\sup_u |G(u)| = \overline{G} < \infty$, согласно условию леммы имеем

$$\left| \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) \tilde{r}_{lk}(u+\tau) - r_{ij}(u-\tau) r_{lk}(u+\tau) \right) G(u, n, m, i, j, k, l)\, du \right| \leq J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \left| \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right) r_{lk}(u+\tau) G(u)\, du \right|;$$

$$J_2 = \left| \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{lk}(u-\tau) - r_{lk}(u-\tau) \right) \tilde{r}_{ij}(u+\tau) G(u)\, du \right|.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского запишем

$$J_1^2 \leq G \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right)^2 \left| r_{lk}(u+\tau) \right| du \int_{-S}^{S} \left| r_{lk}(u+\tau) \right| du,$$

так что

$$\mathbf{E}\, J_1^2 \leq C \int_{-S}^{S} \mathbf{E} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right)^2 \left| r_{lk}(u+\tau) \right| du \leq \frac{C}{T - |\tau| - S_T},$$

и в силу неравенства Чебышева —

$$\Pr \{ J_1 > C \varepsilon_T \} \leq \frac{C}{T \varepsilon_T^2} \to 0, \quad T \to \infty.$$

Для J_2 имеем $J_2 \leq J_{21} + J_{22}$, где

$$J_{21} = \left| \int_{-S}^{S} \left(\tilde{r}_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right) \left(\tilde{r}_{lk}(u+\tau) - r_{lk}(u+\tau) \right) G(u)\, du \right|,$$

$$J_{22} = \left| \int_{-S}^{S} r_{ij}(u-\tau) \left(\tilde{r}_{lk}(u+\tau) - r_{lk}(u+\tau) \right) G(u)\, du \right|.$$

Оценивая J_{22} аналогично J_1, получаем $\Pr \{ J_{22} > \varepsilon_T \} \to 0$, $T \to \infty$. Оценим теперь $J_{21} \leq \sqrt{I_{ij} I'_{lk}}$:

$$I_{ij} = \int\limits_{-S}^{S} \left(\tilde r_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right)^2 du; \quad I'_{ij} = \int\limits_{-S}^{S} \left(\tilde r_{ij}(u+\tau) - r_{ij}(u+\tau) \right)^2 du.$$

Однако

$$\mathbf{E}\, I_{ij} = \int\limits_{-S}^{S} \mathbf{E} \left(\tilde r_{ij}(u-\tau) - r_{ij}(u-\tau) \right)^2 du \le$$

$$\le \int\limits_{-S}^{S} \frac{C}{T - |\tau| - u} du = C \ln \frac{1 - |\tau|/T - S/T}{1 - |\tau|/T + S/T} \sim C S_T / T.$$

В силу неравенства Чебышева

$$\Pr\left\{ \sqrt{I_{ij}} \ge \varepsilon_T \right\} \le \Pr\left\{ I_{ij} \ge \varepsilon^2 \right\} \le \frac{C}{T \varepsilon_T^4} \to 0, \quad T \to \infty,$$

поэтому

$$\Pr\{ J_{21} \ge \varepsilon_T \} \le \Pr\left\{ I_{ij} I'_{lk} > \varepsilon_T^2 \right\} \le \Pr\left\{ I_{ij} \ge \varepsilon_T \right\} + \Pr\left\{ I'_{lk} \ge \varepsilon_T \right\} \to 0$$

при $T \to \infty$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 опирается на классическую теорему о сходимости регуляризованных приближений в сепарабельных гильбертовых пространствах. Пусть Z и U — сепарабельные гильбертовы пространства, D — замкнутое выпуклое подмножество Z, $0 \in D$; A, A_h — линейные ограниченные операторы из Z в U, $\| A_h - A \| \le h$, $u, u_\delta \in U$, $\| u - u_\delta \| \le \delta$, $\eta = (\delta, h)$, $M^\gamma[z] = \| A_h z - u_\delta \|_U^2 + \gamma \| z \|_Z^2$, где γ — некоторое положительное число (параметр регуляризации), $z_\eta^\gamma = \arg\min\limits_{z \in D} M^\gamma[z]$, z — нормальное решение задачи $Az = u$, т. е. $\bar z = \arg\min \left\{ \| z \|^2 : z \in D, Az = u \right\}$.

Утверждение. *Если* $\gamma = \gamma(\eta) \to 0$ *и* $(h^2 + \delta^2)/\gamma(\eta) \to 0$ *при* $\eta \to 0$, *то* $z_\eta^{\gamma(\eta)} \xrightarrow{Z} \bar z$.

Доказательство см. в [5].

Пусть теперь A, u — неслучайны, A_n, u_n — случайны и для некоторых h_n $\delta_n \to 0$. Выполнено

$$\Pr\left\{ \| A_n - A \| \ge \varepsilon h_n \right\} \to 0, \quad \Pr\left\{ \| u_n - u \| \ge \varepsilon \delta_n \right\} \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \qquad (15)$$

Лемма 2. *Если выполнено* (15), $\gamma = \gamma_n$ *удовлетворяет условию* $(h_n^2 + \delta_n^2)/\gamma_n \to 0$, $n \to \infty$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ $\Pr\left\{ \| z_n^\gamma - \bar z \|_z \ge \varepsilon \right\} \to 0$.

Доказательство. Обозначим $z_n = z_n^\gamma$, $d_n = \Pr\left\{ \| z_n - \bar z \|_z \ge \varepsilon \right\}$. Пусть n_k — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Выделим из нее подпоследовательность n_{k_j}, такую, что $\| A_{n_{k_j}} - A \| / h_{n_{k_j}} \to 0$ п. н. и $\| u_{n_{k_j}} - u \| / \delta_{n_{k_j}} \to 0$ п.н., $j \to \infty$ (это можно сделать в силу (15)). Для такой последовательности, согласно утверждению, $\| z_{n_{k_j}} - \bar z_{n_{k_j}} \|_Z \to 0$ п. н., так что $d_{n_{k_j}} \to 0$, $j \to \infty$. Следовательно, из любой подпоследовательности d_{n_k} можно выделить подподпоследовательность, стремящуюся к 0. Поэтому $d_n \to \to 0$, что и требовалось доказать.

***Доказательство теоремы* 3.** В силу первого условия теоремы, можно выбрать числовую последовательность h_T таким образом, что $h_T \to \infty$, $h_T^2 = o(\gamma_T)$:

$$\frac{1}{h_T}\left(\frac{S_T}{T}\right)^{1/4} \to 0. \tag{16}$$

$$\int\limits_{|u|>S_T} \left(r_{lm}(u)\right)^2 du = o(h_T). \tag{17}$$

Согласно лемме 1, из (16) следует

$$\Pr\left\{|\tilde{\sigma}_{mn}(S_T) - \overline{\sigma}_{mn}(S_T)| > h_T\right\} \to 0,$$

а поскольку

$$|\tilde{\sigma}_{mn}(S_T) - \overline{\sigma}_{mn}(S_T)| \le C \sum_{i,j} \int\limits_{|u|>S_T} \left(r_{ij}(u)\right)^2 du,$$

то на основании (17) $\Pr\left\{|\tilde{\sigma}_T(m,n) - \sigma(m,n)| > h_T\right\} \to 0$. Таким образом,

$$\Pr\left\{\left\|\tilde{\Xi}(S_T) - \Xi\right\| > h_T\right\} \to 0. \tag{18}$$

Обозначим через y^* нормальное решение задачи

$$\arg\min_{y'\Phi=0}\left\{\Xi y + \Xi\theta_0\right\}.$$

Тогда $\theta^* = \theta_0 + y^*$ доставляет минимум функционалу $\theta'\Xi\theta$ на множестве $\theta\Phi = e_{(M-1)i+j}$ и этот минимум равен v^*. Пусть $\bar{r}_T(\tau,\alpha) = \mathbf{E}\,\hat{r}_T(\tau,\alpha)$. Имеем

$$\sqrt{T}\left(\check{r}_{ij}(\tau) - r_{ij}(\tau)\right) = \sqrt{T}\left(\sum_{l=1}^{L}\tilde{\theta}_l(S_T)\,\hat{r}(\tau,\alpha_l) - \sum_{l=1}^{L}\tilde{\theta}_l(S_T)\,\bar{r}(\tau,\alpha_l)\right) +$$

$$+ \sqrt{T}\left(\sum_{l=1}^{L}\tilde{\theta}_l(S_T)\,\bar{r}(\tau,\alpha_l) - r_{ij}(\tau)\right).$$

Первое слагаемое стремится к $\mathcal{N}(0, v^*)$ в силу (18) и лемы 2. Заметим, что

$$r_{ij}(\tau) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m,n=1}^{M}\tilde{\theta}_l(S_T)\,\varphi_{l(m,n)}\,r_{mn}(\tau),$$

а

$$\bar{r}(\tau,\alpha_l) = \sum_{m,n=1}^{M}\varphi_{l(m,n)}^T\,r_{mn}(\tau).$$

Учитывая второе условие теоремы и ограниченость $r_{mn}(\tau)$ и $\tilde{\theta}_l(S_T)$, получаем, что второе слагаемое есть $o(1)$.

Теорема доказана.

1. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Выща шк., 1986. – 216 с.
2. *Булдыгин В. В.* Об асимптотических свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса // Допов. НАН України. – 1994. – № 11. – С.33–38.
3. *Булдыгин В. В., Демьяненко О. О.* Точечные свойства оценок совместной корреляционной функции гауссовых полей // Стохастические уравнения и граничные теоремы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С.23 – 35.
4. *Вапник В. Н.* Индуктивные принципы поиска эмпирических закономерностей // Распознавание – классификация – прогноз. – 1989. – Вып. 1. – С.17 – 81.
5. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.

Получено 25.04.96