УДК 515.12; 517.51

В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко (Черніів. ун-т)

ПОБУДОВА НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ З ДАНИМ КОЛИВАННЯМ

We investigate the problem of construction of a separately continuous function f whose oscillation is equal to a given nonnegative function g. We show that, in the case of metrizable Baire product, the problem under consideration is solvable if and only if g is upper semicontinuous and its support can be covered by countably many sets that are locally contained in products of sets of the first category.

Досліджується задача побудови нарізно неперервної функції f, коливання якої дорівнює наперед заданій невід'ємній функції g. Показано, що коли добуток берівський і метризовний, то ця задача розв'язна тоді і тільки тоді, коли g напівнеперервна зверху і її носій покривається зліченним числом множин, що локально містяться в добутках множин першої категорії.

1. У працях багатьох авторів [1 – 8] вивчалась задача побудови нарізно неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$, визначеної на добутку $X = X_1 \times X_2$ топологічних просторів X_1 і X_2, з даною множиною точок розриву $D(f) = S \subseteq X$. Як добре відомо, $D(f) = \{x \in X\colon \omega_f(x) > 0\}$, де $\omega_f\colon X \to [0; +\infty]$ — коливання функції f, яке характеризує величину розривів. У розглядуваних раніше конструкціях слідкували лише за наявністю розривів, а не за їхньою величиною. Тому природно постає питання: для яких функцій $g\colon X \to [0; +\infty]$ існує нарізно неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, що для неї $\omega_f = g$? На відміну від попередньої чисто топологічної задачі ця уточнена проблема використовує метрику числової прямої і тому має метричний характер. Зрозуміло, що її можна поставити і для функцій зі значеннями в довільному метричному просторі.

Тут ми більш-менш детально розглянемо той випадок, коли простори X_1 і X_2 метризовні, а функція f набуває дійсних значень. Ми введемо певну геометричну умову на підмножини добутку $X = X_1 \times X_2$, що названа нами навскісною апроксимовністю, і якій задовольняють, наприклад, для метризовних X_1 і X_2 множини, що лежать у добутку ніде не щільних множин, але не тільки такі множини. Виконання цієї умови для всіх прообразів $g^{-1}([\varepsilon; +\infty])$, $\varepsilon > 0$, напівнеперервної зверху функції $g\colon X \to [0; +\infty]$, якщо, крім цього, один із них має тип G_δ, гарантує існування такої нарізно неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$, для довільних цілком регулярних просторів X_1 і X_2. Ця умова не є необхідною навіть для метризовних просторів, але коли один із них берівський, то вона буде і необхідною, а у випадку беровості добутку рівносильною такій властивості носія S функції g: існує зліченне покриття носія S множинами $E_n \subseteq X$ такими, що для довільної точки $x \in X$ існує її окіл U в X, що для нього $E_n \cap U$ міститься в добутку двох множин першої категорії відповідно в X_1 і X_2. Вказана властивість носія є простим (по модулю теореми Стоуна про паракомпактність метризовних просторів) переформулюванням недавно знайденої у [8] необхідної і достатньої умови, що їй повинна задовольняти підмножина добутку двох метризовних просторів, щоб бути множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Доведення базується на оригінальній техніці, яка, крім вже звичних локально скінченних систем і згаданої теореми Стоуна, використовує міркування, що здійснюються розбиттям необхідних розривів на поверхи $S_n = g^{-1}(I_n)$, де $I_0 = [1; +\infty]$, $I_n = [4^{-n}; 4^{1-n}]$, їхньою наступною апроксимацією точковими множинами P_n і побудовою нескінченної функціональної матриці $f_{nk} =$

$= \sum_{p \in P_n} \varphi_{pk}^{(n)}$ так, що шукана функція f одержується як сума ряду з функцій $f_n = \lim\limits_{k \to \infty} f_{nk}$.

Відмітимо, нарешті, що попередній результат на цю тему міститься в [12], а про результати пп. 7 і 8 даної роботи повідомлялось в [13], тільки спадкова берівість там повинна була бути віднесена до всього добутку, а не до окремих співмножників.

2. Нехай X — топологічний простір і $x \in X$. Через $\mathcal{U}_x$ позначимо систему всіх околів точки x. Для функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ покладемо $f^*(x) = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}_x} \sup f(U)$ і $f_*(x) = \sup\limits_{U \in \mathcal{U}_x} \inf f(U)$. Зрозуміло, що $f_*(x) \le f(x) \le f^*(x)$. Функції $f^*\colon X \to (-\infty; +\infty]$ і $f_*\colon X \to [-\infty; +\infty)$ — відповідно верхня і нижня функції Бера функції f, які напівнеперервні відповідно зверху і знизу. Коливання $\omega_f = f^* - f_*$ функції f є напівнеперервною зверху невід'ємною функцією на X. Якщо $g\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна в точці x, то $(f+g)^*(x) = f^*(x) + g(x)$ і $(f+g)_*(x) = f_*(x) + g(x)$, отже, $\omega_{f+g}(x) = \omega_f(x)$. Для функцій $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ запис $f \le g$ означає, що $f(x) \le g(x)$ для кожного $x \in X$. Очевидно, з умови $f \le g$ випливає, що $f^* \le g^*$ і $f_* \le g_*$. Тому, коли послідовність $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ рівномірно на X збігається до функції $f\colon X \to \mathbb{R}$, то і послідовності функцій f_n^* і $(f_n)_*$ рівномірно збігаються відповідно до функцій f^* і f_*. Для функції $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ покладемо $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in X\colon \varphi(x) \ne 0\}$.

Лема 1. *Нехай X — цілком регулярний простір, $\varphi\colon X \to [0; +\infty)$ — неперервна функція, число $\eta > 0$, $\psi\colon X \to [0; \eta]$ — довільна функція, U_0 — окіл деякої точки $p \in X$ і $\varepsilon > 0$, причому $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta + \varepsilon$ на U_0, $(\varphi + \psi)^*(p) \ge \eta - \varepsilon$ і $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U_0$. Тоді існує неперервна функція $\tilde\varphi\colon X \to [0; +\infty)$ така, що $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U_0$, $\tilde\varphi(x) + \psi(x) \le \eta$ на U_0, $(\tilde\varphi + \psi)^*(p) = \eta$ і $|\tilde\varphi(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ на X.*

Доведення. Покладемо $\eta_0 = (\varphi + \psi)^*(p)$ і $\delta = \eta + \varepsilon - \eta_0$. Оскільки $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta + \varepsilon$ на U_0, то $\eta_0 \le \eta + \varepsilon$, отже, $\delta \ge 0$. Візьмемо спадну послідовність околів $U_n \subseteq U_0$ точки p таку, що $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta_0 + 2^{-n}\delta$ на U_n, і відповідну послідовність неперервних функцій $\varphi_n\colon X \to [0; 2^{-n}\delta]$, для яких $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq U_n$ і $\varphi_n(p) = 2^{-n}\delta$. Функція $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ визначена і неперервна на X як сума рівномірно збіжного на X ряду, причому $0 \le \sigma(x) \le \sigma(p) = \delta$ для всіх $x \in X$. Доведемо, що $\theta(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \sigma(x) \le \eta + \varepsilon$ на X. Якщо $x \in X \setminus U_0$, то $\varphi(x) = \sigma(x) = 0$, отже, $\theta(x) = \psi(x) \le \eta \le \eta + \varepsilon$. Якщо $x \in U_n \setminus U_{n+1}$ для деякого $n = 0, 1, \ldots$, то $\varphi_k(x) = 0$ при $k > n$. Значить, $\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \le \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\delta = (1 - 2^{-n})\delta$, але, крім цього, $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta_0 + 2^{-n}\delta$. Тому знову $\theta(x) \le \eta_0 + 2^{-n}\delta + (1 - 2^{-n})\delta = \eta_0 + \delta = \eta + \varepsilon$. Якщо ж $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, то нерівність $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta_0 + 2^{-n}\delta$ виконується для кожного n, отже, переходячи до границі, одержуємо $\varphi(x) + \psi(x) \le \eta_0$. Але $\sigma(x) \le \delta$, таким чином, $\theta(x) \le \eta_0 + \delta = \eta + \varepsilon$.

Покажемо, що неперервна функція $\tilde\varphi(x) = \max\{0, \varphi(x) + \sigma(x) - \varepsilon\}$ є шуканою. Справді, якщо $x \in X \setminus U_0$, то $\varphi(x) + \sigma(x) - \varepsilon = -\varepsilon < 0$, отже, $\tilde\varphi(x) = 0$. Якщо $x \in U_0$, то $\tilde\varphi(x) + \psi(x) = \max\{\psi(x), \theta(x) - \varepsilon\} \le \eta$. Далі, $\varphi(p) + \sigma(p) - \varepsilon = \varphi(p) + \delta - \varepsilon = \varphi(p) + \eta - \eta_0 = \varphi(p) + \eta - (\varphi +$

$+ \psi)^*(p) = \varphi(p) + \eta - \varphi(p) - \psi^*(p) = \eta - \psi^*(p) \geq 0$, оскільки $\psi(x) \leq \eta$ на X, отже, $\tilde{\varphi}(p) = \eta - \psi^*(p)$, тобто $(\tilde{\varphi} + \psi)^*(p) = \tilde{\varphi}(p) + \psi^*(p) = \eta$. Зауважимо, що за умовою $\eta - \eta_0 \leq \varepsilon$, тому $\delta \leq 2\varepsilon$ і $0 \leq \sigma(x) \leq 2\varepsilon$ на X. Отже, $|\sigma(x) - \varepsilon| \leq \varepsilon$, а значить, $|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| = |\max\{-\varphi(x), \sigma(x) - \varepsilon\}| \leq \varepsilon$, бо $\varphi(x) \geq 0$.

3. Наступна лема є основним технічним знаряддям у нашому підході до розв'язання поставленої проблеми.

Лемма 2. *Нехай X — цілком регулярний простір з топологією $\mathcal{T}$ і для кожного $n = 0, 1, \ldots$ задано множину $P_n \subseteq X$, диз'юнктивну сім'ю τ_n: $P_n \to \mathcal{T}$ відкритих множин таку, що $p \in \tau_n(p)$ для кожного $p \in P_n$, і функцію h_n: $P_n \to I_n$, де $I_0 = [1; +\infty]$ і $I_n = [4^{-n}; 4^{1-n}]$, якщо $n = 1, 2, \ldots$. Тоді існує послідовність сімей $(\varphi_p^{(n)}: p \in P_n)$ неперервних функцій $\varphi_p^{(n)}: X \to [0; +\infty)$, для яких $\operatorname{supp}\varphi_p^{(n)} \subseteq \tau_n(p)$ для всіх номерів n і точок $p \in P_n$, така, що функції $f_n = \sum_{p \in P_n} \varphi_p^{(n)}$ і $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} f_j$ задовольняють умови $r_n(x) \leq$ $\leq h_n(x)$ при $x \in \tau_n(p)$ і $r_n^*(p) = h_n(p)$ для довільних $n = 0, 1, \ldots$ і $p \in P_n$, причому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ збігається рівномірно на X.*

Доведення. Спочатку побудуємо таку послідовність функціональних матриць $(\varphi_{pk}^{(n)}: p \in P_n,\ k = 0, 1, \ldots)$ неперервних функцій $\varphi_{pk}^{(n)}: X \to [0; +\infty)$, у яких $\operatorname{supp}\varphi_{pk}^{(n)} \subseteq \tau_n(p)$ для всіх $n, k = 0, 1, \ldots$ і $p \in P_n$, що функції $f_{nk} =$ $= \sum_{p \in P_n} \varphi_{pk}^{(n)}$ і $r_{nk} = \sum_{j=n}^{k} f_{jk}$ задовольняють умови: $|f_{n,k+1} - f_{nk}| \leq 2^{-k}$ для всіх номерів n і k, $r_{nk}(x) \leq h_n(p)$ при $x \in \tau_n(p)$ і $r_{nk}^*(p) = h_n(p)$ для довільних $n \leq k$ і $p \in P_n$.

Розглянемо для довільних n і $p \in P_n$ таку неперервну функцію $\varphi_{p,0}^{(n)}: X \to$ $\to [0; h_n(p)]$, що $\operatorname{supp}\varphi_{p,0}^{(n)} \subseteq \tau_n(p)$ і $\varphi_{p,0}^{(n)}(p) = h_n(p)$. Нехай для деякого номера $k > 0$ вже побудовані функції $\varphi_{p,0}^{(n)}, \ldots, \varphi_{p,k-1}^{(n)}$ для довільних n і $p \in P_n$. Побудуємо функції $\varphi_{pk}^{(n)}$. Якщо $n \geq k$ і $p \in P_n$, то покладемо $\varphi_{pk}^{(n)} = \varphi_{p,k-1}^{(n)}$. Нехай $0 \leq m < k$ і функції $\varphi_{pk}^{(n)}$ вже побудовані для $n > m$, причому так, що додатково виконується нерівність $|f_{nk} - f_{n,k-1}| \leq 2^{1-k-n}$. Щоб визначити $\varphi_{pk}^{(m)}$, встановимо деякі оцінки. Оскільки $0 \leq f_{kk} = f_{k,0} \leq 4^{1-k}$, то $|f_{m,k-1} +$ $+ r_{m+1,k} - r_{m,k-1}| = \left|\sum_{j=m+1}^{k-1} (f_{jk} - f_{j,k-1}) + f_{kk}\right| \leq \sum_{j=m+1}^{k-1} |f_{jk} - f_{j,k-1}| +$ $+ f_{kk} \leq \sum_{j=m+1}^{k-1} 2^{1-k-j} + 4^{1-k} = 2^{1-k-m}$.

Нехай $p \in P_m$ і $x \in \tau_m(p)$. Зрозуміло, що $f_{m,k-1}(x) = \varphi_{p,k-1}^{(m)}(x)$. За індуктивним припущенням $r_{m,k-1}(x) \leq h_m(p)$. Отже, $\varphi_{p,k-1}^{(m)}(x) + r_{m+1,k}(x) =$ $= f_{m,k-1}(x) + r_{m+1,k}(x) \leq r_{m,k-1}(x) + 2^{1-k-m} \leq h_m(p) + 2^{1-k-m}$. Крім цього, $(\varphi_{p,k-1}^{(m)} + r_{m+1,k})^*(p) = (f_{m,k-1} + r_{m+1,k})^*(p) \geq r_{m,k+1}^*(p) - 2^{1-k-m} = h_m(p) -$ $- 2^{1-k-m}$. Покажемо, що $r_{m+1,k} \leq h_m(p)$. Справді, $4^{-m} \leq h_m(p)$, оскільки $p \in$ $\in P_m$, а також для кожного $n > m$ і $q \in P_n$ виконується нерівність $h_n(q) \leq$ $\leq 4^{1-n} \leq 4^{-m} \leq h_m(p)$. Значить, якщо $\xi \in \tau_n(q) \setminus \bigcup_{j=m+1}^{n-1} \bigcup \tau(P_j)$ для якихоч n з $m < n \le k$ і $q \in P_n$, то $r_{m+1,k}(\xi) = r_{nk}(\xi) \le h_n(q) \le h_m(p)$, в іншому випадку $r_{m+1,k}(\xi) = 0$.

Таким чином, бачимо, що функції $\varphi = \varphi^{(m)}_{p,k-1}$, $\psi = r_{m+1,k}$ і числа $\eta = h_m(p)$, $\varepsilon = 2^{1-k-m}$ задовольняють умови леми 1 з $U_0 = \tau_m(p)$. Візьмемо тепер за $\varphi^{(m)}_{pk}$ ту функцію $\tilde{\varphi}$, існування якої гарантується лемою. Тоді $\operatorname{supp}\varphi^{(m)}_{pk} \subseteq \tau_m(p)$, $r_{mk}(x) = f_{mk}(x) + r_{m+1,k}(x) = \varphi^{(m)}_{pk}(x) + r_{m+1,k}(x) \le h_m(p)$ при $x \in \tau_m(p)$, $r^*_{mk}(p) = (\varphi^{(m)}_{p,k} + r_{m+1,k})^*(p) = h_m(p)$ і $|\varphi^{(m)}_{p,k} - \varphi^{(m)}_{p,k-1}| \le 2^{1-k-m}$, звідки $|f_{mk} - f_{m,k-1}| \le 2^{1-k-m} \le 2^{1-k}$.

Означимо функції $\varphi^{(n)}_p$. Зауважимо, що $|\varphi^{(n)}_{p,k+1} - \varphi^{(n)}_{pk}| \le |f_{n,k+1} - f_{nk}| \le 2^{-k}$ для всіх номерів n і k та точок $p \in P_n$. Тому послідовність $(\varphi^{(n)}_{pk})_{k=0}^{\infty}$ рівномірно збігається на X до деякої неперервної функції $\varphi^{(n)}_p : X \to [0;+\infty)$ з $\operatorname{supp}\varphi^{(n)}_p \subseteq \tau_n(p)$. Функції $f_n = \sum_{p\in P_n} \varphi^{(n)}_p$ коректно означені на X, причому $\lim\limits_{k\to\infty} f_{nk} = f_n$. Зазначимо, що $|f_{nk} - f_n| \le 2^{1-k}$, тому що $|f_{nk} - f_{n,k+m}| \le \sum_{j=k+1}^{k+m} |f_{n,j-1} - f_{nj}| \le \sum_{j=k+1}^{k+m} 2^{1-j} \le 2^{1-k}$. Оскільки $f_{nk} \le r_{nk} \le 4^{1-n}$ при $1 \le n \le k$, то при $k \to \infty$ одержимо, що $f_n \le 4^{1-n}$ для кожного n. Тому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний на X і його залишки $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} f_j$ визначені на X. Доведемо, що r_{nk} рівномірно збігається до r_n при $k \to \infty$. Справді, при $k \ge n$ $|r_{nk} - r_n| \le \left|r_{nk} - \sum_{j=n}^{k} f_j\right| + \left|\sum_{j=n}^{k} f_j - r_n\right| \le \sum_{j=n}^{k} |f_{jk} - f_j| + \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j \le \sum_{j=n}^{k} 2^{1-k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{1-j} \le (k+1)2^{1-k} + 2^{1-k} = (k+2)2^{1-k}$, а $\lim\limits_{k\to\infty}(k+2)2^{1-k} = 0$. Але $r_{nk}(x) \le h_n(p)$ при $x \in \tau_n(p)$ і $r^*_{nk}(p) = h_n(p)$ для довільних $n \le k$ і $p \in P_n$. Перейшовши до границі при $k \to \infty$, одержимо, що $r_n(x) \le h_n(p)$ при $x \in \tau_n(p)$ і $r^*_n(p) = h_n(p)$ для довільних $n = 0, 1, \ldots$ і $p \in P_n$.

4. У цьому пункті розробляється метод апроксимації ніде не щільних множин точковими множинами і пов'язаними з ними диз'юнктними сім'ями відкритих множин, який дозволить нам далі використати лему 2 для розв'язання поставленої задачі. Як і в [6], він базується на теоремі Стоуна про паракомпактність метризовних просторів і схожий до побудов, розвинутих у [9].

Нагадаємо, що система множин $\mathcal{A}$ називається локально скінченною в точці x топологічного простору X, якщо існує такий її окіл U в X, що перетинається лише зі скінченним числом елементів $\mathcal{A}$. Будемо говорити, що система $\mathcal{A}$ локально скінченна на множині E (поза множиною E), якщо вона локально скінченна в кожній точці з E (з $X \setminus E$). Система $\mathcal{B}$ називається щільною в просторі X, якщо кожна відкрита непорожня множина в X містить деяку непорожню множину з $\mathcal{B}$.

Нехай $\mathcal{B}$ — деяка система відкритих підмножин топологічного простору X. Множину $S \subseteq X$ назвемо *$\mathcal{B}$-апроксимовною*, якщо існує сім'я $\pi : S \to 2^X$ підмножин X і диз'юнктна сім'я $\tau : P \to \mathcal{B}$, визначена на тілі $P = \bigcup \pi(S)$ сім'ї π, такі, що $p \in \tau(p)$, $\overline{\tau(p)} \cap \overline{S} = \varnothing$, $s \in \overline{\pi(s)}$ для кожних $p \in P$ і $s \in S$ і система $\tau(P_E)$, де $P_E = \bigcup \pi(E)$, локально скінченна поза множиною $\overline{E}$ для довільної множини $E \subseteq S$.

Лема 3. *Нехай* X *— метризовний топологічний простір,* $\mathcal{B}$ *— щільна в* X *система відкритих множин і* S *— ніде не щільна в* X *множина. Тоді* S *є* $\mathcal{B}$*-апроксимовною.*

Доведення. Будемо вважати, що $S \neq \varnothing$. Нехай d — метрика на X, що породжує його топологію. Для точки $x_0 \in X$, непорожньої множини $E \subseteq X$ і числа $\varepsilon > 0$, покладемо $d(x_0, E) = \inf\limits_{x \in E} d(x, x_0)$, $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x, y \in E} d(x, y)$ і $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$. За теоремою Стоуна [10, с. 414] для кожного номера n існує локально скінченне відкрите покриття $\mathcal{V}_n$ простору X, вписане в покриття $\mathcal{U}_n = \{U_{1/2n}(x) : x \in X\}$. Для будь-якого $V \in \mathcal{V}_n$ маємо $\operatorname{diam} V \leq 1/n$. Для кожного $s \in S$ виберемо $V_n(s) \in \mathcal{V}_n$ так, щоб $s \in V_n(s)$. Легко переконатися, що система $\mathcal{V}(s) = \{V_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ є базою околів точки s в X, адже $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam} V_n(s) = 0$. Візьмемо $E \subseteq S$ і покажемо, що система $\mathcal{V}_E = \{V_n(s) : n \in \mathbb{N}$ і $s \in E\}$ локально скінченна поза множиною $\overline{E}$. Для кожної точки $x \in X \setminus \overline{E}$ відстань $d(x, E) = 2\varepsilon > 0$. Розглянемо окіл $U_0 = U_\varepsilon(x)$ і номер N, для якого $1/N \leq \varepsilon$. Тоді $U_0 \cap V_n(s) = \varnothing$ при $n > N$ і $s \in E$, тому що $\operatorname{diam} V_n(s) < \varepsilon$ для таких n. Оскільки системи $\mathcal{V}_n$ локально скінченні, то для кожного $n = 1, \ldots, N$ можна вибрати такий окіл U_n точки x, який перетинається лише зі скінченним числом множин з $\mathcal{V}_n$. Тоді окіл $U = U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_N$ перетинається лише зі скінченним числом елементів з $\mathcal{V}_E$.

Для $n \in \mathbb{N}$ і $s \in S$ покладемо $W_n(s) = V_n(s) \setminus \overline{S}$. Оскільки S ніде не щільна, то множини $W_n(s)$ відкриті і непорожні. Нехай $\mathcal{W} = \{W_n(s) : n \in \mathbb{N}, s \in S\}$. Легко бачити, що $\mathcal{W}$ локально скінченна поза множиною $\overline{S}$. В кожній множині $W \in \mathcal{W}$ виберемо точку q_W. Сукупність усіх точок позначимо через Q. Кожна точка $q \in Q$ входить щонайбільше в скінченне число множин з $\mathcal{W}$, адже $Q \cap \overline{S} = \varnothing$. Тому множина $O(q) = \bigcap \{W \in \mathcal{W} : W \ni q\}$ є відкритим околом точки q, отже, відстань $\alpha_q = d(q, X \setminus O(q)) > 0$. З локальної скінченності системи $\mathcal{W}$ поза множиною $\overline{S}$ випливає, що для кожного $q \in Q$ відстань $\beta_q = d(q, Q \setminus \{q\}) > 0$. Для $q \in Q$ покладемо $\varepsilon_q = \min\{\alpha_q, \beta_q/2\}$. Зрозуміло, що при $q \in Q$ околи $U_{\varepsilon_q}(q)$ попарно не перетинаються, причому $U_{\varepsilon_q}(q) \subseteq O(q)$. Якщо простір X регулярний і система $\mathcal{B}$ щільна в ньому, то для кожного $q = q_{W_n(s)} \in Q$ існує непорожня множина $G = G_q = G_n(s) \in \mathcal{B}$ така, що $\overline{G} \subseteq U_{\varepsilon_q}(q)$. У кожній такій множині $G = G_n(s)$ виберемо деяку точку $p = p_G = p_n(s)$. Відображення $\pi : S \to 2^X$ задамо рівністю $\pi(s) = \{p_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ для $s \in S$. Для довільної точки $p = p_G \in P = \bigcup \pi(S)$ покладемо $\tau(p) = G$. Множина G однозначно відновлюється за точкою p, оскільки система таких множин диз'юнктна. За побудовою сім'я $\tau : P \to \mathcal{B}$ диз'юнктна, $p \in \tau(p)$, $\overline{\tau(p)} \cap \overline{S} = \varnothing$ для кожного $p \in P$, а локальна скінченність системи $\tau(P_E)$ поза множиною $\overline{E}$ випливає з такої ж властивості системи $\mathcal{V}_E$. Крім цього, $s \in \overline{\pi(s)}$, тому що $p_n(s) \in V_n(s)$, а $\mathcal{V}_n(s)$ — база околів точки s. Отже, S є $\mathcal{B}$-апроксимовною.

5. Перейдемо до вивчення потрібних нам властивостей підмножин добутків топологічних просторів. Нехай $X = X_1 \times X_2$ — добуток топологічних просторів

X_1 і X_2, $\mathrm{pr}_i: X \to X_i$ при $i = 1, 2$ — відповідні проекції. *Хрестом* множини $E \subseteq X$ назвемо множину $\mathrm{xp}\, E = (X_1 \times \mathrm{pr}_2(E)) \bigcup (\mathrm{pr}_1(E) \times X_2)$. Легко перевірити, що $\mathrm{xp}\,\overline{E} \subseteq \overline{\mathrm{xp}\, E}$, до того ж $\mathrm{xp}\, E$ ніде не щільний в X тоді і тільки тоді, коли E має ніде не щільні проекції $E_i = \mathrm{pr}_i(E)$ в X_i при $i = 1, 2$, а це рівносильно тому, що E міститься в добутку ніде не щільних множин.

Множину $M \subseteq X$ назвемо *хрестом-околом точки* $x \in X$, якщо існує такий окіл U точки x в добутку X, що $U \bigcap \mathrm{xp}\{x\} \subseteq M$, і *хрестом-околом множини* $E \subseteq X$, якщо M є хрестом-околом кожної точки $x \in E$. Систему $\mathcal{A}$ підмножин добутку називатимемо *навхрест локально скінченною в точці* $x \in X$, якщо існує такий хрест-окіл M точки x, що система $\{A \in \mathcal{A}: A \bigcap M \neq \varnothing\}$ скінченна, і *навхрест локально скінченною*, якщо вона є такою в кожній точці простору X.

Нагадаємо, що функція $f: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ називається нарізно неперервною, якщо для будь-яких $x_1 \in X_1$ і $x_2 \in X_2$ функції $f^{x_1}: X_2 \to \mathbb{R}$ і $f_{x_2}: X_1 \to \mathbb{R}$, де $f^{x_1}(x_2) = f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$, є неперервними. Доведення наступної леми випливає з означень.

Лема 4. *Нехай Φ — деяка сукупність нарізно неперервних функцій $\varphi: X \to \mathbb{R}$ на добутку X двох топологічних просторів, для якої система $\{\mathrm{supp}\,\varphi: \varphi \in \Phi\}$ навхрест локально скінченна. Тоді функція $f = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi$ коректно означена і нарізно неперервна на X.*

Множину $E \subseteq X$ назвемо *проективно ніде не щільною* (*проективно першої категорії*), якщо її проекції $\mathrm{pr}_i(E)$ ніде не щільні (першої категорії) в X_i для $i = 1, 2$. Будемо говорити, що E *проективно ніде не щільна* (*проективно першої категорії*) *в точці* $x \in X$, якщо існує такий окіл U цієї точки в X, що множина $U \bigcap E$ проективно ніде не щільна (проективно першої категорії), і *локально проективно ніде не щільна* (*локально проективно першої категорії*), якщо вона проективно ніде не щільна (проективно першої категорії) в кожній точці $x \in X$.

Зрозуміло, що кожна проективно ніде не щільна множина є локально проективно ніде не щільна, а ця, в свою чергу, ніде не щільна. Застосувавши теорему Банаха про категорію [11, с. 87], одержимо, що те ж саме справджується і в категорному випадку. Якщо X має зліченну базу, то кожна множина $E \subseteq X$, що є локально проективно першої категорії, буде і проективно першої категорії. У загальному випадку це не так. Наприклад, у просторі $X = l_\infty \times l_\infty$, де l_∞ — простір обмежених послідовностей, можна вказати локально проективну ніде не щільну множину E, обидві проекції якої співпадають з усім простором l_∞. Для цього можна розглянути континуальну множину A характеристичних функцій всіх підмножин натурального ряду і деяку бієкцію $\varphi: l_\infty \to A$, а за E взяти об'єднання двох можливих графіків φ в X. Зауважимо, що всі ці властивості успадковуються підмножинами.

Провівши стандартні міркування, що використовують локально скінченні покриття, одержимо такі резульатати.

Лема 5. *Нехай $X = X_1 \times X_2$ — паракомпактний простір і $E \subseteq X$ — множина, що є локально проективно першої категорії. Тоді E подається у вигляді об'єднання послідовності локально проективно ніде не щільних множин.*

Лема 6. *Нехай $X = X_1 \times X_2$ — паракомпактний простір і E — локально проективно ніде не щільна підмножина X. Тоді існує ніде не щільний хрест-окіл M замикання $\overline{E}$.*

В метризовному випадку лему 6 можна підсилити.

Лема 7. *Нехай $X = X_1 \times X_2$ — метризовний простір і S — ніде не щільна підмножина X, замикання якої подається у вигляді об'єднання послідовності* *локально проективно ніде не щільних підмножин E_n. Тоді існує ніде не щільний хрест-окіл M замикання $\overline{S}$.*

Введемо поняття, яке є основним для наших побудов. Множину $S \subseteq X = X_1 \times X_2$ назвемо *навскіс апроксимовною,* якщо існує така навхрест локально скінченна система $\mathcal{B}$ відкритих підмножин X, що S є $\mathcal{B}$-апроксимовною. Виявляється, що в добутку метризовних просторів усі ніде не щільні множини, замикання яких подається у вигляді об'єднання послідовності локально проективно ніде не щільних множин, будуть навскіс апроксимовними. Це негайно випливає з леми 3 і наступних простих тверджень.

Лема 8. *Нехай $S \subseteq X = X_1 \times X_2$, M — хрест-окіл замикання $\overline{S}$ і $\mathcal{B}_M = \{G : G$ — відкрита в X і $G \bigcap M = \varnothing\}$. Тоді якщо S є $\mathcal{B}_M$-апроксимовною, то S навскіс апроксимовна.*

Лема 9. *Нехай X — добуток метризовних просторів X_1 і X_2 та $S \subseteq X$. Тоді якщо $\overline{S}$ має ніде не щільний хрест-окіл M, то S — навскіс апроксимовна.*

6. Основний результат сформулюємо в досить загальній формі і з нього як наслідок одержимо існування потрібної функції в метризовному випадку.

Теорема 1. *Нехай X — добуток цілком регулярних просторів X_1 і X_2 та $g : X \to [0; +\infty]$ — напівнеперервна зверху функція така, що всі множини $g^{-1}([\varepsilon; +\infty])$ при $\varepsilon > 0$ навскіс апроксимовні, а одна з них має тип G_δ. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f : X \to [0; +\infty)$, що $\omega_f = g$.*

Доведення. Оскільки $\omega_{\lambda f} = \lambda \omega_f$ при $\lambda > 0$, то без обмеження загальності можна вважати, що множина $S_0 = g^{-1}([1; +\infty])$ має тип G_δ, отже, подається у вигляді перетину спадної послідовності відкритих множин G_n з $G_0 = X$. Покладемо $I_0 = [1; +\infty]$, $I_n = [4^{-n}; 4^{1-n}]$, якщо $n > 0$, $S_n = g^{-1}(I_n)$ і $S'_n = g^{-1}([4^{-n}; +\infty]) = \bigcup_{j=0}^{n} S_j$. За умовою для кожного n множина S'_n навскіс апроксимовна, тобто існують відповідні навхрест локально скінченні системи $\mathcal{B}_n$ відкритих в X множин і сім'ї $\pi'_n : S'_n \to 2^X$ і $\tau'_n : P'_n \to \mathcal{B}_n$, де $P'_n = \bigcup \tau'_n(S'_n)$. Позначимо $\pi_n = \pi'_n|_{S_n}$ і $\tau_n = \tau'_n|_{P_n}$, де $P_n = \bigcup \pi_n(S_n)$, для кожного номера n. Покладемо для довільного $x \in X$, $l(x) = n$, якщо $x \in G_{n-1} \setminus G_n$, і $l(x) = 1$, якщо $x \in S_0$. Нарешті, для точки $p \in P_n$ позначимо $S_n(p) = \{s \in S_n : p \in \pi_n(s)\}$ і $h_n(p) = \min\{l(p), \sup g(S_n(p))\}$. Зрозуміло, що завжди $h_n(p) \in I_n \setminus \{+\infty\}$, тому за лемою 2 існує послідовність сімей $(\varphi_p^{(n)} : p \in P_n)$ неперервних функнкцій $\varphi_p^{(n)} : X \to [0; +\infty)$, для яких $\operatorname{supp} \varphi_p^{(n)} \subseteq \tau_n(p)$ для всіх номерів n і точок $p \in P_n$, причому для функцій $f_n = \sum_{p \in P_n} \varphi_p^{(n)}$ і $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} f_j$ виконуються умови: $r_n(x) \le h_n(p)$ при $x \in \tau_n(p)$ і $r_n^*(p) = h_n(p)$ для кожних $n = 0, 1, \ldots$ і $p \in P_n$ і до того ж ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ збігається рівномірно на X. Покладемо $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. За побудовою для кожного n система $\{\operatorname{supp} \varphi_p^{(n)} : p \in P_n\}$ навхрест локально скінченна. Тому, згідно з лемою 4, всі функції f_n нарізно неперервні. Тоді і f буде такою ж, як сума рівномірно збіжного ряду з нарізно неперервних функцій.

Залишилось довести, що $\omega_f = g$. Зауважимо, що функція f_n неперервна поза множиною $\overline{S}_n$, бо система $\tau_n(P_n)$ локально скінченна поза множиною $\overline{S}_n$. Оскільки g напівперервна зверху, то всі множини S'_n замкнені, тому $\overline{S}_n \subseteq$

$\subseteq S'_n$ і $X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{S}_n = g^{-1}(0)$. Візьмемо $x \in X$. Якщо $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{S}_n$, то всі функції f_n, а значить, і функція f, неперервні в точці x. Отже, $\omega_f(x) = 0 = g(x)$. Нехай тепер $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ і n — найменший з номерів, для якого $x \in \overline{S}_n$. Тоді $x \in \overline{S}_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} \overline{S}_j \subseteq S'_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} \overline{S}_j \subseteq S_n$ і всі функції $f_0, \ldots, f_{n-1}$ неперервні в точці x, тому $\omega_f(x) = \omega_{r_n}(x)$. Для $j \geq n$ маємо $\overline{S}_n \subseteq S'_j$. Оскільки $\tau_j(p) \cap S'_j = \tau'_j(p) \cap S'_n = \varnothing$ для кожного $p \in P_j$ і, крім цього, $x \in S'_j$, то $f_j(x) = 0$ при $j \geq n$, а значить, $r_n(x) = 0$. Але ж $r_n \geq 0$, отже, $(r_n)_*(x) = 0$ і $\omega_{r_n}(x) = r_n^*(x)$. Покажемо, що $r_n^*(x) = g(x)$.

Спочатку доведемо, що $r_n^*(x) \geq g(x)$. Візьмемо a з $0 < a < g(x)$. Позначимо $U_0 = G_{[a]} \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} \overline{S}_j$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді U_0 є відкритим околом точки x. Розглянемо довільний відкритий окіл U точки x, що міститься в U_0. Оскільки $x \in S_n$ і $x \in \overline{\pi_n(x)}$, то існує точка $p \in U \cap \pi_n(x)$. Тоді $x \in S_n(p)$ і, крім цього, $p \in G_{[a]}$, отже, $h_n(p) \geq \min\{l(p), g(x)\} \geq a$. Але $r_n^*(p) = h_n(p)$ і U — окіл точки p. Тому $\sup r_n(U) \geq h_n(p) \geq a$, звідки $r_n^*(x) \geq a$. Спрямувавши a до $g(x)$, одержимо $r_n^*(x) \geq g(x)$.

Тепер встановимо, що $r_n^*(x) \leq g(x)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки g напівнеперервна зверху в точці x, то існує такий її окіл U, що $g(u) \leq g(x) + \varepsilon$ для всіх $u \in U$. Покладемо $R = \bigcup \pi_n(S_n \setminus U)$ і $H = \bigcup \tau_n(R)$. Оскільки $x \notin \overline{S_n \setminus U}$, то система $\tau_n(R)$ локально скінченна в точці x. Але $\overline{\tau_n(p)} \cap \overline{S}_n = \varnothing$ для всіх $p \in P_n$. Тому множина $U_1 = U \setminus H$ є околом точки x.

Нехай $u \in U_1$. Доведемо, що $r_n(u) \leq g(x) + \varepsilon$. Якщо $u \in \tau_n(p)$ для деякого $p \in P_n$, то $p \notin R$, звідки $S_n(p) \subseteq U$, значить, $r_n(u) \leq h_n(p) \leq \sup g(S_n(p)) \leq \sup g(U) \leq g(x) + \varepsilon$. Якщо ж $u \notin \bigcup \tau_n(P_n)$, то, як легко бачити, $r_n(u) \leq 4^{-n}$. Але $g(x) \geq 4^{-n}$, отже, і в цьому випадку нерівність справджується. Таким чином, $\sup r_n(U_1) \leq g(x) + \varepsilon$, звідки $r_n^*(x) \leq g(x) + \varepsilon$, і при $\varepsilon \to 0$ одержуємо, що $r_n^*(x) \leq g(x)$, і тим самим теорему доведено.

7. Дамо повне розв'язання поставленої задачі, якщо простори X_1 і X_2 метризовні і один із них берівський. При цьому буде використано один результат В. В. Михайлюка, який послужив основою його характеризації множин точок розриву $D(f)$ нарізно неперервних функцій f на добутках метризовних просторів [8, 9, 14]. Подамо його у зручній для нас редакції.

Лема 10. *Нехай X — добуток метризовних просторів X_1 і X_2 і $f\colon X \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді існує послідовність локально проективно ніде не щільних в X множин E_n така, що $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.*

Теорема 2. *Нехай X — добуток метризовних просторів X_1 і X_2, один з яких є берівським, $g\colon X \to [0; +\infty]$ — деяка функція і $S_\varepsilon = g^{-1}([\varepsilon; +\infty])$. Тоді для того щоб існувала така нарізно неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$, необхідно і досить, щоб g була напівнеперервна зверху і для кожного $\varepsilon > 0$ задовольняла одну із наступних умов:*

(i) *S_ε ніде не щільна і покривається зліченним числом множин, які є локально проективно першої категорії в X;*

(ii) *S_ε ніде не щільна і покривається зліченним числом локально проективно ніде не щільних множин;*

(iii) S_ε *має ніде не щільний в* X *хрест-окіл* M;

(iv) S_ε *навскіс апроксимовна.*

Доведення. На основі леми 5 і теореми Стоуна одержуємо, що (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Імплікації (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) для напівперервної зверху функції g дістаємо з лем 7 і 9, адже тоді множини S_ε замкнені. Якщо g — напівнеперервна зверху функція і для кожного $\varepsilon > 0$ виконується умова (iv), то за теоремою 1 існує нарізно неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $\omega_f = g$, адже простір X, будучи метризовним, є разом з тим досконалим і цілком регулярним. Отже, достатність має місце для довільних метризовних просторів. Якщо тепер $\omega_f = g$ для деякої нарізно неперервної функції f, то зрозуміло, що g напівнеперервна зверху. Оскільки один із співмножників берівський, а інший задовольняє першу аксіому зліченності (як метризовний), то функція f квазінеперервна [3] (теорема 2.2). Отже, для кожного $\varepsilon > 0$ множина S_ε ніде не щільна, до того ж $S_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} g = D(f)$. Тому з леми 10 випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ виконується (ii).

Якщо ж добуток берівський, то можна одержати простішу характеризацію коливань.

Теорема 3. *Нехай добуток* $X = X_1 \times X_2$ *метризовний і берівський, а* $g\colon X \to [0; +\infty]$ — *деяка функція. Тоді для того щоб існувала така нарізно неперервна функція* $f\colon X \to [0; +\infty]$, *що* $\omega_f = g$, *необхідно і досить, щоб* g *була напівнеперервною зверху функцією і її носій* $\operatorname{supp} g$ *покривався зліченним числом множин, які є локально проективно першої категорії.*

Доведення. *Необхідність* випливає з леми 10. Для доведення *достатності* на основі теореми 2 досить показати, що множини S_ε ніде не щільні. Застосувавши теорему Стоуна і лему 5, одержимо, що S_ε покривається послідовністю локально проективно ніде не щільних множин, які автоматично є ніде не щільними, тому S_ε — множина першої категорії. Оскільки S_ε замкнена, то вона ніде не щільна, адже X — берівський простір.

Зауваження. Якщо добуток до того ж сепарабельний, то умова на носій функції g ще спрощується. А саме тоді $\operatorname{supp} g$ з необхідністю буде множиною проективно першої категорії.

8. Можна дати і інші цікаві храктеризації коливань нарізно неперервних функцій у тому випадку, коли простір X спадково берівський і метризовний. Нагадаймо, що топологічний простір називається *спадково берівським*, якщо кожний його замкнений підпростір є берівським, і *спадково паракомпактним*, якщо будь-який його підпростір паракомпактний.

Для множини $S \subseteq X = X_1 \times X_2$ позначимо через DS множину всіх таких точок $x \in X$, в яких S не є проективно ніде не щільною. Очевидно, що множина DS замкнена і $DS = D\overline{S} \subseteq \overline{S}$. Індуктивно визначимо множини $D^\nu S$ для довільного ординала ν, поклавши $D^0 S = \overline{S}$ і $D^\nu S = D\left(\bigcap_{\mu < \nu} D^\nu S\right)$ при $\nu \geq 1$. Зрозуміло, що всі множини $D^\nu S$ замкнені, $D^\nu S \subseteq D^\mu S$ при $\nu \geq \mu$ і $D^\nu E \subseteq D^\nu S$, якщо $E \subseteq S$. Множини S, для яких $DS = \varnothing$, — це в точності локально проективно ніде не щільні множини.

Наступна лема є поряд з лемою 7 ще одним підсиленням леми 6 у спеціальному випадку.

Лема 11. *Нехай* $X = X_1 \times X_2$ — *спадково паракомпактний гаусдорфовий простір. Тоді для довільної його підмножини* S *такої, що* $D^\nu S = \varnothing$ *для деякого ординала* ν, *існує ніде не щільний хрест-окіл* $M(S)$ *замикання* $\overline{S}$.

Доведення. Застосуємо трансфінітну індукцію. При $\nu = 0$ це твердження очевидне. Для $\nu = 1$ воно випливає з леми 6, адже $D^1 S = DS$. Візьмемо тепер $\nu > 1$ і припустимо, що воно вірне для всіх ординалів $\mu < \nu$. Покажемо, що воно вірне і для даного ν. Нехай $D^\nu S = \varnothing$. Для $\mu > 0$ покладемо $F_\mu = \bigcap_{\lambda < \mu} D^\lambda S$ і $G_\mu = X \setminus DF_\mu$. Оскільки $DF_\mu = D^\mu S$ і $D^0 S \supseteq D^\nu S$, то $\bigcup_{0<\mu<\nu} G_\mu = X \setminus \bigcap_{0<\mu<\nu} DF_\mu = X \setminus F_\nu$. Але X регулярний (навіть нормальний [10, с. 445]), тому для довільних μ з $0 < \mu < \nu$ і $x \in G_\mu$ існує відкритий окіл $U_\mu(x)$ точки x такий, що $\overline{U_\mu(x)} \subseteq G_\mu$. Множини $U_\mu(x)$, де $0 < \mu < \nu$ і $x \in G_\mu$, утворюють відкрите покриття відкритого підпростору $Y = X \setminus F_\nu$. Впишемо в нього локально скінченне на Y відкрите покриття $\mathcal{V}$. Нехай $V \in \mathcal{V}$, а $0 < \mu < \nu$ і $x \in G_\mu$ такі, що $V \subseteq U_\mu(x)$. Тоді $D^\mu(V \cap S) \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{U_\mu(x)} \subseteq G_\mu = X \setminus D^\mu S$. Оскільки $D^\mu(V \cap S) \subseteq D^\mu S$, то $D^\mu(V \cap S) = \varnothing$. Крім цього, $D^1 F_\nu = D^\nu S = \varnothing$. Розглянемо систему $\mathcal{A} = \{V \cap S : V \in \mathcal{V}\} \cup \{F_\nu\}$. Ми показали, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує $\mu < \nu$ таке, що $D^\mu S = \varnothing$. За індуктивним припущенням для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує ніде не щільний в X хрест-окіл $M(A)$ замикання $\overline{A}$. Покладемо $M(S) = M(F_\nu) \bigcup \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} (M(V \cap S) \cap V) \right)$. Оскільки $\mathcal{V}$ локально скінченна в $Y = \bigcup \mathcal{V}$, то множина $M(S)$ ніде не щільна в X. Доведемо, що $M(S)$ є хрестом-околом $\overline{S}$. Візьмемо точку $x \in \overline{S}$. Якщо $x \in F_\nu$, то $M(F_\nu)$ є хрестом-околом x і $M(F_\nu) \subseteq M(S)$, отже, і $M(S)$ є хрестом-околом x. Якщо ж $x \notin F_\nu$, то $x \in Y$, тому існує $V \in \mathcal{V}$ таке, що $x \in V$. Але V відкрита, тому $x \in \overline{V \cap S}$. В такому разі $M(V \cap S) \cap V$, а значить, і $M(S)$ будуть хрестами-околами точки x.

Лема 12. *Нехай $X = X_1 \times X_2$ — добуток топологічних просторів і $S \subseteq X$. Тоді для того щоб $D^\nu S = \varnothing$ для деякого ординала ν, необхідно і досить, щоб довільна непорожня замкнена множина $F \subseteq \overline{S}$ була б проективно ніде не щільною хоча б в одній зі своїх точок, тобто для неї $DF \neq F$.*

Доведення. Нехай $D^\nu S = \varnothing$ для деякого ординала ν і F — замкнена підмножина $\overline{S}$. Тоді і $D^\nu F = \varnothing$, адже $D^\nu F \subseteq D^\nu S$. Якщо б $DF = F$, то і $D^\nu F = F$, отже, $F = \varnothing$. Навпаки, нехай $DF \neq F$ для довільної непорожньої замкненої множини $F \subseteq \overline{S}$. Оскільки трансфінітна послідовність $D^\nu S$ спадна, існує такий ординал ν, що $D^\nu S = D^{\nu+1} S$ (наприклад, ординал, потужність якого більша за потужність множини 2^X). Тоді $D(D^\nu S) = D^{\nu+1} S = D^\nu S$ і, крім цього, $D^\nu S$ — замкнена підмножина $\overline{S}$. Отже, $D^\nu S = \varnothing$.

Теорема 4. *Нехай добуток $X = X_1 \times X_2$ — метризовний і спадково берівський і $g : X \to [0; +\infty]$ — деяка функція. Тоді для того щоб існувала така нарізно неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$, необхідно і досить, щоб g була напівнеперервною зверху і кожна непорожня замкнена підмножина F її носія $\operatorname{supp} g$ була проективно ніде не щільною хоча б в одній із своїх точок.*

Доведення. Нехай $\omega_f = g$ для деякої нарізно неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$. Тоді g напівнеперервна зверху і $\operatorname{supp} g = D(f)$. За лемою 10 існує послідовність локально проективно ніде не щільних множин E_n така, що

$\operatorname{supp} g = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Нехай F — замкнена непорожня підмножина $\operatorname{supp} g$. Покажемо, що $DF \neq F$. Припустимо, що $DF = F$. Покладемо $F_n = F \cap E_n$. Зрозуміло, що $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Доведемо, що F_n ніде не щільні в F. Нехай $x \in F$ і U — відкритий окіл точки x в X. Оскільки $DE_n = \varnothing$ і $F_n \subseteq E_n$, то $DF_n = \varnothing$. Тому існує такий відкритий окіл V точки x в X, що $V \subseteq U$ і $\operatorname{pr}_i(V \cap \cap F_n)$ ніде не щільні в X_i при $i = 1, 2$. Але $x \in DF$, адже $DF = F$. Тому існує i таке, що $\operatorname{pr}_i(V \cap F)$ десь щільна в X_i, нехай у непорожній відкритій множині G_i. В G_i можна вибрати непорожню відкриту підмножину H_i, для якої $H_i \cap \operatorname{pr}_i(V \cap F_n) = \varnothing$. Покладемо $H = \operatorname{pr}_i^{-1}(H_i)$. Тоді H відкрита, як прообраз відкритої множини при неперервному відображенні. Оскільки $\operatorname{pr}_i(V \cap F) \cap \cap H_i \neq \varnothing$, то $V \cap F \cap H \neq \varnothing$. Але ж $V \cap F_n \cap H = \varnothing$. Таким чином, $W = V \cap \cap H \cap F$ — непорожня відкрита в F множина, для якої $W \subseteq U \cap F_n$ і $W \cap \cap F_n = \varnothing$. Отже, ми показали, що F першої категорії в собі, тому F не берівський, тому що $F \neq \varnothing$. Але F замкнений, отже, X не спадково берівський, що суперечить умові. Таким чином, $DF \neq F$. Необхідність доведено.

Навпаки, нехай g — напівнеперервна зверху функція і $DF \neq F$ для довільної непорожньої замкненої множини $F \subseteq \operatorname{supp} g$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо множину $S_\varepsilon = g^{-1}([\varepsilon; +\infty])$. Ця множина замкнена і має таку ж властивість, як і весь носій, адже $S_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} g$. Отже, за лемами 11 і 12 множина S_ε має ніде не щільний хрест-окіл, тому що метризовний простір спадково паракомпактний. В такому разі за теоремою 2 існує нарізно неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\omega_f = g$.

9. Для метризовних просторів першої категорії умови теореми 1 можуть бути послаблені.

Теорема 5. *Нехай X — добуток двох метризовних просторів X_1 і X_2 першої категорії та $g\colon X \to [0; +\infty]$ — напівнеперервна зверху функція така, що для кожного $\varepsilon > 0$ множина $g^{-1}([\varepsilon; +\infty))$ ніде не щільна в X. Тоді існує нарізно неперервна функція $f\colon X \to [0; +\infty)$, для якої $\omega_f = g$.*

Доведення. Побудуємо навхрест локально скінченну щільну в X систему $\mathcal{B}$ відкритих множин. Позначимо через $U_\varepsilon^{(i)}(x_i)$, $i = 1, 2$, ε-окіл точки x_i відносно якоїсь метрики, узгодженої з топологією простору X_i. В покриття $\mathcal{U}_n^{(i)} = \{U_{1/n}^{(i)}(x_i)\colon x_i \in X_i\}$ простору X_i впишемо локально скінченне відкрите покриття $\mathcal{V}_n^{(i)}$. Нехай $X_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{(i)}$, де $(F_n^{(i)})$ — зростаюча послідовність замкнених ніде не щільних множин. Покладемо $\mathcal{B}_n^{(i)} = \{V \setminus F_n^{(i)}\colon V \in \mathcal{V}_n^{(i)}\}$, $\mathcal{B}_n = \{B_1 \times B_2\colon B_i \in \mathcal{B}_n^{(i)},\ i = 1, 2\}$ і $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Покажемо, що система $\mathcal{B}$ шукана. Нехай $x = (x_1, x_2) \in X$. Існує номер n такий, що $x_i \in F_n^{(i)}$ при $i = 1, 2$. Тоді множини з систем $\mathcal{B}_m$ при $m \geq n$ не перетинаються з хрестом точки x. Оскільки системи $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{n-1}$ локально скінченні, система $\mathcal{B}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathcal{B}_j$ теж локально скінченна. Але $\{B \in \mathcal{B}\colon B \cap \operatorname{хр}\{x\} \neq \varnothing\} \subseteq \mathcal{B}^{n-1}$, отже, система $\mathcal{B}$ навхрест локально скінченна. Доведемо, що $\mathcal{B}$ щільна в X. Розглянемо квадратний ε-окіл $U = U_\varepsilon^{(1)}(x_1) \times U_\varepsilon^{(2)}(x_2)$ точки $x = (x_1, x_2)$ в X. Візьмемо номер n з $2/n < \varepsilon$. Для $i = 1, 2$ існують такі множини $V_i \in \mathcal{V}_n^{(i)}$, що $V_i \subseteq U_\varepsilon^{(i)}(x_i)$. Множини $B_i = V_i \setminus F_n^{(i)}$ непорожні, тому що $F_n^{(i)}$ ніде не щільні. Тоді $B = B_1 \times B_2$ — непорожня множина з $\mathcal{B}$ така, що $B \subseteq U$.

Покладемо $F = g^{-1}(+\infty)$ і $g_1(x) = g(x)$, якщо $x \in \overline{X \setminus F}$, і $g_1(x) = 0$, якщо $x \in \operatorname{int} F$. Очевидно, що g_1 напівнеперервна зверху, причому, оскільки F замкнена, то її межа ніде не щільна, отже, звідси і з умови випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ множина $g_1^{-1}([\varepsilon; +\infty])$ ніде не щільна, а тому, за лемою 3, $\mathcal{B}$-апроксимовна, а значить навскіс апроксимовна, оскільки $\mathcal{B}$ навхрест локально скінченна. Тоді, застосувавши теорему 1 до функції g_1, одержимо, що існує нарізно неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $\omega_{f_1} = g_1$. Зафіксуємо тепер якусь обмежену метрику, узгоджену з топологією X, і через $\operatorname{diam} E$ позначимо діаметр непорожньої множини $E \subseteq X$ у цій метриці. Для довільної множини $B \in \mathcal{B}$ такої, що $\operatorname{diam} B > 0$, візьмемо таку неперервну функцію $\varphi_B\colon X \to [0; +\infty)$, що $\operatorname{supp} \varphi_B \subseteq B$ і $\sup \varphi_B(B) = 1/\operatorname{diam} B$. Покладемо $f_2 = \sum_{B \in \mathcal{B},\, B \subseteq F} \varphi_B$. З леми 4 випливає, що f_2 коректно означена і нарізно неперервна на X. А оскільки $\mathcal{B}$ щільна в X, то неважко зрозуміти, що $\omega_{f_2}(x) = +\infty$, якщо $x \in \overline{\operatorname{int} F}$, і $\omega_{f_2}(x) = 0$, якщо $x \notin \overline{\operatorname{int} F}$. Тому, поклавши $f = f_1 + f_2$, матимемо, що $\omega_f = g$, і теорему доведено.

Зауважимо, що функція f, яка задана на квадраті раціональної прямої і тотожно рівна $+\infty$, очевидним чином задовольняє умови теореми 5 і тому є коливанням деякої нарізно неперервної функції $f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, але множини $S_\varepsilon = g^{-1}([\varepsilon; +\infty]) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, зрозуміло, не є навскіс апроксимовними. Отже, умова навскісної апроксимовності множин S_ε не є необхідною навіть для метризовних просторів.

Автори висловлюють щиру вдячність В. В. Михайлюку за плідні обговорення і цінні зауваження, які дозволили покращити первісний текст роботи.

1. *Kershner R.* The continuity of functions of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, № 1. – P. 83–100.
2. *Grande Z.* Une caracterisation des ensembles des points de discontinuite des functions linéairement-continues // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **52**. – P. 257–262.
3. *Breckenridge J. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191–203.
4. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні відображення з сепарабельною множиною точок розриву. – Чернівці, 1990. – 11 с. – Деп. в Укр НДІНТІ, № 907-Ук90.
5. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1209–1220.
6. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Про нарізно неперервні відображення на добутках метризовних просторів // Допов. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 28–31.
7. *Михайлюк В. В.* Обернена задача теорії нарізно неперервних відображень: загальний підхід // Міжнар. мат. конф., присвячена пам'яті Ганса Гана (10–15 жовтня 1994 р., Чернівці): Тези допов. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 104.
8. *Михайлюк В. В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів // Там же. – С. 103.
9. *Михайлюк В. В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1994. – 82 с
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
11. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.
12. *Маслюченко В. К., Маслюченко О. В.* Побудова нарізно неперервної функції з даним коливанням // Мат. наук. конф. ... , присвяченої 120-річчю заснування Чернівец. ун-ту (4–6 травня 1995 р.) – Фіз.-мат. науки. – Чернівці: Рута, 1995. – Т. 2. – С. 93.
13. *Маслюченко О. В.* Про характеризацію коливань нарізно неперервних функцій // Всеукр. наук. конф. „Розробка та застосування мат. методів в наук.-техн. дослідженнях", присвячена 70-річчю від дня народження професора П. С. Казімірського (5–7 жовтня 1995 р.): Тези допов. – Львів, 1995. – Ч. 1. – С. 80–81.
14. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192–246.

Одержано 14.02.96