УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. III*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko, we analyze the applications to delay differential equations, equations with "maxima", and to functional-differential, operator-differential, integral-differential equations.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком, до диференціальних рівнянь з „максимумами", функціонально-диференціальних, диференціально-операторних та інтегро-диференціальних рівнянь.

Данная статья является третьей частью обзорной работы [1, 2], посвященной численно-аналитическому методу, который для простоты будем называть одним словом „метод", предложенному А. М. Самойленко в 1965 г. Нумерация формул, теорем и т. д. при этом продолжается.

3.2 Приложения метода к исследованию дифференциально-функциональных уравнений.

3.2.1. Уравнения с запаздыванием. В работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюка [3], Д. И. Мартынюка, А. М. Самойленко [4], Д. И. Мартынюка [5] численно-аналитический метод был впервые применен к исследованию T-периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-\Delta)\big), \qquad x, f \in \mathbb{R}^n. \tag{69}$$

Здесь Δ — постоянная положительная величина, характеризующая запаздывание в системе, а вектор-функция $f(t, x, y)$ определена в области

$$(t, x, y) \in (-\infty, \infty) \times D \times D \tag{70}$$

(D — замкнутая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$) и периодична по t с периодом T.

Основные результаты доказаны в стандартных для метода предположениях:

H3.5) для всех $\{x, y\} \subset D$ и $t \in \mathbb{R}$ $|f(t, x, y)| \le M$, где $M \in \mathbb{R}^n_+$;

H3.6) при всех $\{x_j, y_j\}_{j=1,2} \subset D$ и $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \le K_1 |x_1 - x_2| + K_2 |y_1 - y_2|,$$

где $\{K_1, K_2\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — неотрицательные матрицы;

H3.7) $D_\beta \ne \varnothing$, где $D_\beta := \{x \in \mathbb{R}^n\colon S(x, \beta) \in D\}$ и $\beta := \dfrac{T}{2}M$;

H3.8) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}(Q)$ матрицы

$$Q = (K_1 + K_2)\left[\frac{T}{3} + \frac{3}{2T}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{T}\right)^2\right]$$

не превышает единицы.

Поскольку речь идет о T-периодических решениях системы (69), без ограничения общности можно считать, что $0 \le \Delta \le T$.

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект № 1.4/269) при Министерстве Украины по делам науки и технологий, а также гранта ОТКА Т 019095.

© Н. И. РОНТО, А. М. САМОЙЛЕНКО, С. И. ТРОФИМЧУК, 1998

Теорема 14 ([3], теорема 1.1, §2). *Предположим, что выполнены условия* H3.5 – H3.8. *Тогда для каждого* $z \in D_\beta$ *последовательность* T*-периодических функций*

$$x_m(t, z) = z + \int_0^t \Bigg[f(t, x_{m-1}(t, z), x_{m-1}(t-\Delta, z)) - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z), x_{m-1}(s-\Delta, z))\,ds \Bigg] dt$$

равномерно по $t \in (-\infty, \infty)$, $z \in D_\beta$, *сходится к предельной функции* $x = x^*(t, z)$, *причем*

$$|x^*(t, z) - x_m(t, z)| \le \frac{T}{2} Q^m (E-Q)^{-1} M.$$

Указав условие разрешимости определяющего уравнения

$$\Delta(t, z) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, z), x^*(t-\Delta, z))\,dz = 0,$$

можно установить следующее утверждение.

Теорема 15 ([3], теорема 1.2, § 3). *Пусть выполнены сформулированные выше условия* H3.5 – H3.8 *и, кроме того, справедливы следующие два предположения:*

H3.9) *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$ *приближенная определяющая функция*

$$\Delta_m(z) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, z), x_m(t-\Delta, z))\,dz \tag{71}$$

имеет изолированную особую точку $z = z_{m_0}$ *ненулевого индекса Лере – Шаудера;*

H3.10) *существует замкнутая выпуклая область* $D_1 \subset D_\beta$, *в которой* $z = z_{m_0}$ *является единственным решением приближенного определяющего уравнения* $\Delta_m(z) = 0$, *и на границе* S_1 *области* D_1 *справедливо неравенство*

$$\inf_{z \in S_1} |\Delta_m(z)| > \frac{T}{3} Q^m (E-Q)^{-1} (K_1 + K_2) M.$$

Тогда система (69) *имеет* T*-периодическое решение* $x = x^*(t)$ *с начальным значением* $x^*(0) = x_0^* \in D_1$.

Отметим, что обоснование метода усреднения для T-периодических дифференциальных уравнений с запаздыванием является следствием применения метода к системам стандартной формы:

$$x'(t) = \varepsilon f(t, x, x(t-\Delta)), \tag{72}$$

где ε — малый параметр.

Следствие 9 ([3], теорема 1.3, §6). *Пусть в правой части системы* (72) *функция* $f(t, x, y)$ *определена в области* (70) *и удовлетворяет условиям* H3.5, H3.6. *Тогда, если усредненная система*

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \varepsilon X_0(\xi(t), \xi(t-\Delta)),$$

где

$$X_0(x, y) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, y)\,dt,$$

имеет изолированное положение равновесия $\xi = \xi_0$: $X_0(\xi_0, \xi_0) = 0$, *и индекс точки* ξ_0 *отличен от нуля, то при достаточно малых* $\varepsilon \le \varepsilon_0$ *система* (72) *имеет периодическое с периодом* T *решение.*

Укажем еще несколько интересных приложений теорем 14, 15.

***Следствие* 10** ([3], теорема 1.4, §3). *Пусть в скалярном уравнениии* (69) *функция* $f(t, x, y)$ *в области*

$$-\infty < t < \infty, \quad a \le x \le b, \quad a \le y \le b$$

удовлетворяет условиям Н3.5 – Н3.6. *Кроме того, допустим, что для некоторого* $m \ge 1$ *функция* (71) *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{a+\frac{T}{2}M \le z \le b-\frac{T}{2}M} \Delta_m(z) \le -\frac{T}{3}\frac{Q^m}{1-Q}(E-Q)^{-1}(K_1+K_2)M;$$

$$\min_{a+\frac{T}{2}M \le z \le b-\frac{T}{2}M} \Delta_m(z) \ge \frac{T}{3}\frac{Q^m}{1-Q}(E-Q)^{-1}(K_1+K_2)M.$$

Тогда скалярное уравнение (69) *имеет* T-*периодическое решение* $x = x^*(t)$ *с начальным значением, удовлетворяющим соотношению*

$$a + \frac{T}{2}M \le x^*(0) \le b - \frac{T}{2}M.$$

***Следствие* 11** ([3], теорема 1.5, §3). *Пусть правая часть системы*

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left(t - \frac{T}{2}\right)\right), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{73}$$

определена в области (70), *удовлетворяет условиям* Н3.5, Н3.6 *и следующему симметрийному свойству:*

Н3.11) *для всех* x, y *выполнено равенство* $f(t, x, y) = -f(-t, x, y)$.

Тогда через любую точку $z \in D_\beta$ *при* $t = 0$ *проходит* T-*периодическое решение* $x = x^*(t, z)$ *системы* (73).

***Пример* 6.** При исследовании 2π-периодического решения уравнения

$$x'(t) = \varepsilon\left[x^2(t) - \sin t - x(t-\Delta)\cos t + 0{,}001\right], \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{74}$$

где $\varepsilon \ge 0$, с помощью численно-аналитического метода были введены ([3, §6, гл. 1]) определенные подмножества Ω_1, Ω_2 в плоскости параметров (ε, Δ) такие, что при $(\varepsilon, \Delta) \in \Omega_1$ не существует ни одного 2π-периодического решения, а при $(\varepsilon, \Delta) \in \Omega_2$ существует не менее одного 2π-периодического решения уравнения (74). При этом обнаружен эффект, заключающийся в том, что при малых ε, удовлетворяющих, например, неравенству

$$(4 + \sin\Delta)^2\varepsilon^2 < 4(\varepsilon^2 + 2)(0{,}002 + 3\varepsilon^2 - \varepsilon\cos\Delta),$$

не существуют 2π-периодические решения, которые, однако, появляются при достижении некоторого критического значения $\varepsilon = \varepsilon(\Delta)$.

В работе [3] метод применяется также при отыскании T-периодических решений скалярного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x(t-\Delta), x'(t), x'(t-\Delta)),$$

систем нейтрального типа

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\Delta), x'(t-\Delta)),$$

счетных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием вида (69), когда $x, f \in \ell_\infty$.

Если в уравнении (69) функция f представима в виде $f(t, x, y) = g(t, x, y, x, y)$, где g удовлетворяет некоторым дополнительным условиям монотонности,

$$g(t, x, y, u, v) \le g(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$$

для всех $x \le \bar{x}$, $y \le \bar{y}$, $u \ge \bar{u}$, $v \ge \bar{v}$, то возможно комбинирование численно-аналитического метода с методом двусторонних приближений (см. Н. С. Курпель [6], Н. С. Курпель, К. В. Цидыло [7, 3, §12, гл. 1]).

В работе С. В. Янчука [8] численно-аналитический метод применяется к уравнению (69) в случае, когда правая часть имеет специальный вид $f(t, x(t), x(t-\tau) - x(t))$.

***Задача* 7.** Разработать схему метода применительно к непериодическим краевым задачам для уравнения с запаздыванием (69), учитывающую специфику запаздывания.

3.2.2. Функционально-дифференциальные уравнения. Заметим, что интегральное уравнение (2) заменой

$$x(t, z) = z + \int_0^t y(s, z)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T y(s, z)\,ds \tag{75}$$

преобразуется к виду

$$y(t, z) = f\left(t,\ z + \int_0^t y(s, z)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T y(s, z)\,ds\right). \tag{76}$$

Поскольку замена (75) преобразует T-периодические функции в T-периодические же, то, определив решение уравнения (76), после применения преобразования (75) получим решение уравнения (2).

Таким образом, исследование T-периодического решения краевой задачи (1) может быть сведено как к интегральному уравнению (2), так и к интегро-дифференциальному уравнению (76). При этом оператор в правой части (76) также имеет требуемое свойство переводить T-периодические функции в T-периодические.

Для простоты положим, что $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ непрерывна на множестве

$$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Тогда решение уравнения (76) также можно найти итерационным методом, если выполнено условие Липшица (15), и спектральный радиус $r(B_2)$ оператора

$$B_2 = KA : CP_T \to CP_T,$$

где

$$(Kx)(t) := K(t)x(t);$$

$$(Ax)(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t x(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T x(s)\,ds, \qquad t \in [0, T],$$

меньше единицы: $r(B_2) < 1$. Заметим, что для сходимости итерационного процесса (7) достаточно выполнения условия

$$r(B_1) < 1,$$

в котором $B_1 = AK$. (В частном случае, когда $K(t) \equiv K$, имеем $r(B_1) = r(B_2)$). Вообще говоря, операторы A и K не коммутируют, и поэтому достаточные условия сходимости итерационных процессов для решения уравнений (2) и (76) могут быть различными.

Именно уравнение вида (76) А. Августинович и М. Квапиш [9], М. Квапиш [10 – 12] выбрали как более подходящее для изучения краевых задач в случае функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа:

$$x'(t) = f(t, x(\alpha(t)), x'(\beta(t)));$$
$$Ax(0) + Bx(0) = d, \tag{77}$$

где $\alpha, \beta: [0, T] \to [0, T]$; $\{A, B, B^{-1}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$, и функция $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$|f(t, x_1, z_1) - f(t, x_2, z_2)| \le K|x_1 - x_2| + L|z_1 - z_2|$$

с некоторыми постоянными матрицами $\{K, L\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. В этом случае задача (77) сводилась к отысканию решения $y = y^*(t, z)$ уравнения

$$y(t, z) = f\left(t,\ z + \alpha(t)\varphi(t) + \frac{T - \alpha(t)}{T}\int_0^{\alpha(t)} y(s, z)\,ds - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha(t)}{T}\int_{\alpha(t)}^{T} y(s, z)\,ds,\ y(\beta(t), z)\right), \tag{78}$$

где

$$\varphi(z) := \frac{1}{T}B^{-1}[d - (A + B)z],$$

методом последовательных приближений с последующим вычислением параметра $z \in \mathbb{R}^n$ из определяющего уравнения

$$\varphi(z) - \frac{1}{T}\int_0^T y^*(s, z)\,ds = 0. \tag{79}$$

В работах [9, 11] указаны условия, гарантирующие сходимость последовательных приближений при решении уравнения (78), а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 16. [9, 11]. *Пусть спектральный радиус оператора*

$$K_\omega = \frac{2}{T}K \sup_{t \in [0, T]} (T - \alpha(t))\alpha(t) + L \tag{80}$$

меньше единицы. Тогда для любого $z \in \mathbb{R}^n$ *уравнение* (78) *имеет единственное решение* $y = y^*(t, z)$, *которое может быть найдено методом последовательных приближений независимо от выбора начального приближения. Кроме того, если* $z = z^*$ *— корень определяющего уравнения* (79), *то функция*

$$x(t, z) = z^* + \int_0^t y(s, z^*)\,ds$$

будет решением краевой задачи (77).

Отметим, что разрешимость определяющего уравнения в работах [9, 11] не исследовалась. Вместо этого рассмотрен „нерезонансный" случай $(\det(A+B) \neq 0)$, для которого построена модификация уравнения (78), не требующая разрешения определяющего уравнения. Отметим, что эта идея также предложена в работах Е. П. Трофимчук, А. В. Коваленко [13] и А. Н. Ронто [14] независимо от [9].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 17 [9]. *Пусть* $\det(A+B) \neq 0$ *и спектральный радиус* $r(K_\omega)$ *определенного формулой* (80) *оператора* K_ω *меньше единицы. Если, кроме того, наибольшее из положительных собственных значений матрицы*

$$T\left|(A+B)^{-1}B\right|(I-K_\omega)^{-1}K \sup_{t\in[0,T]}\left|E-\frac{\alpha(t)}{T}B^{-1}(A+B)\right|$$

также меньше единицы, то существует единственное решение краевой задачи (77).

Заметим, что обсуждавшиеся выше методы могут быть применены для установления существования и единственности решения краевых задач в случае функционально-дифференциальных уравнений более общего вида [9]:

$$x'(t) = f\big(t, x(\alpha_1)), \ldots, x(\alpha_p)), x'(\beta_1)), \ldots, x'(\beta_q))\big),$$

$$Ax(0)+Bx(T) = d.$$

В этом случае оператор (80) принимает вид

$$K_\omega = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{p}\left[K_i \sup_{t\in[0,T]}(T-\alpha_i(t))\alpha_i(t)\right] + \sum_{j=1}^{q}L_j,$$

где $\{K_i\}_{i=1}^{p}$ и $\{L_i\}_{i=1}^{q}$ — матрицы из покоординатного условия Липшица

$$\left|f(t, x_1', \ldots, x_p', x_{p+1}', \ldots, x_{p+q}') - f(t, x_1'', \ldots, x_p'', x_{p+1}'', \ldots, x_{p+q}'')\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p}K_i|x_i'-x_i''| + \sum_{i=1}^{q}K_i\left|x_{p+i}'-x_{p+i}''\right|.$$

3.2.3. Уравнения с „максимумами". Уравнения с „максимумами"

$$x'(t) = f\left(t, x, \max_{s\in[t-h,t]}x(s)\right), \qquad t\in\mathbb{R}, \qquad x\in D\subset\mathbb{R}^n, \tag{81}$$

где, по определению,

$$\max_{s\in[t-h,t]}x(s) = \left(\max_{s\in[t-h,t]}x_1(s), \ldots, \max_{s\in[t-h,t]}x_n(s)\right),$$

при $h>0$ представляют собой интересный частный случай дифференциально-функциональных уравнений запаздывающего типа.

Интерес к таким уравнениям появился относительно недавно (по нашим данным по этой тематике опубликовано не более 40 работ, последняя из которых относится к 1995). Например, в обзорном докладе А. Д. Мышкиса [15] отмечалось: „*Вариантом дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом сложной структуры служит уравнение, в правую часть которого входят выражения, подобные* $\max\limits_{-h\leq\theta\leq 0}x(t+\theta)\ldots$. *Специфика этих уравнений пока недостаточно выявлена*".

Первой работой, в которой уравнение (81) исследуется с помощью численно-аналитического метода, была статья Д. Д. Байнова и Г. Н. Сарафовой [16]. В этой работе T-периодические решения T-периодической системы (81) искались согласно итерационному алгоритму

$$x_{m+1}(t,z) = z + \int_0^t f\left(s, x_m(s,z), \max_{\tau\in[s-h,s]} x_m(\tau,z)\right)ds -$$
$$- \frac{t}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z), \max_{\tau\in[s-h,s]} x_m(\tau,z)\right)ds, \qquad (82)$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $x_0(t,z) \equiv z$. При этом предполагается выполнение условий:

Н3.12) $z \in D_\beta$, где $\beta = \dfrac{T}{2}M$ и $M = \max\limits_{t\in\mathbb{R},\ (x,y)\in D\times D} |f(t,x,y)|$;

Н3.13) $r((T+4h)L) < 1$, где $L = L_1 = L_2$ в условии Липшица

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \le L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2|,$$

которое считается выполненным для $(t,x,y)\in\mathbb{R}\times D\times D$;

Н3.14) $h > 0$.

При выполнении условий Н3.12 – Н3.14 оказалось возможным применить всю методику численно-аналитического метода к изучению T-периодических решений (81); в частности, итерационный процесс является сходящимся, и можно исследовать соответствующее определяющее уравнение.

Заметим, что оператор $(Bx)(t) = \max\limits_{\theta\in I} x(t+\theta)$, где I — компактный подынтервал $\mathbb{R}$, переводит периодические функции в периодические того же периода. Более того, если $x\in CP_T(\mathbb{R})$, то $Bx \in CP_T(\mathbb{R})$. Действительно, непрерывность функции $\max\limits_{\theta\in I} x(t+\theta)$ по переменной t следует из непрерывности суперпозиции непрерывных функций и следующего свойства максимума:

$$\left|\max_{\theta\in I} x(\theta) - \max_{\theta\in I} y(\theta)\right| \le \max_{\theta\in I}|x(\theta) - y(\theta)|.$$

Таким образом, для правой части уравнения (81) справедливо неравенство вида

$$|Bx - By|_0 \le K|x - y|_0$$

при $K = E$. Отметим, что последнее неравенство используется нами в случае общего вида дифференциально-операторных уравнений (см. п. 3.4), частным случаем которых являются уравнения с максимумами.

Тогда, согласно условию сходимости численно-аналитического метода (93) применительно к дифференциально-операторным уравнениям, предположение Н3.13 может быть заменено на условие

$$r\left(\frac{T}{3}L_1 + \frac{T}{2}L_2\right) < 1.$$

Если к тому же $L_1 = L_2$ (как это принято в [16]), то получим, очевидно, условие

$$\frac{5T}{6}r(L) < 1,$$

которое слабее Н3.13, так как не учитывает знак и величину h.

Одновременно с [16] в [17, 19] появилась одна и та же работа Г. Х. Сарафовой, Д. Д. Байнова, в которой численно-аналитический метод применялся к скалярному дифференциальному уравнению

$$y'(t) + y(t) + q \max_{\tau \in [t-h, t]} y(\tau) = f_0(t), \tag{83}$$

где $f_0 \in CP_T(\mathbb{R})$; $q > 0$; h — малая положительная постоянная.

При исследовании уравнения (83) метод применялся и для того, чтобы иметь возможность рассматривать произвольное значение q; соответствующее обобщение получено в работе Н. А. Перестюка [19]. Используя оператор обобщенного среднего

$$[M_\lambda f](t) = \hat{f}(t) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T e^{-\lambda(T-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \qquad \lambda = -(1+q),$$

авторы работ [17, 18] рассмотрели последовательность периодических функций

$$x_{m+1}(t, z) = z - q \int_0^t e^{-(1+q)(t-\tau)} \left\{ \max_{s \in [\tau-h, \tau]} [\, y_0(s) + x_m(s, z) - (y_0(\tau) + x_m(\tau, z))\,] - \right.$$

$$\left. - M_\lambda \left[\max_{s \in [\tau-h, \tau]} (y_0(s) + x_m(s, z)) - (y_0(\tau) + x_m(\tau, z)) \right] \right\} d\tau,$$

где $y_0 = y_0(t)$ — единственное решение уравнения (83) при $h = 0$.

Введем обозначения

$$\sigma := 2hq\left[(1+q)\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right) + 2 \right]; \qquad \beta := \sup_t |y_0'(t)|;$$

$$d(\lambda) := h\beta(1+\lambda)\alpha\left(\lambda, \frac{T}{2}\right),$$

где

$$\alpha(\lambda, t) := \frac{2\left(e^{\lambda(T-t)} - 1\right)\left(e^{\lambda t} - 1\right)}{\lambda\left(e^{\lambda T} - 1\right)}.$$

В [17, 18] доказывается следующая теорема.

Теорема 18 [17, 18]. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *на отрезке* $[a, b]$ *задано уравнение* (83);

2) *отрезок* $[a, b]$ *таков, что* $\dfrac{b-a}{2} > d_\lambda$;

3) *для некоторого целого* $m > 1$ *функция*

$$\Delta_m(z) = (1+q)z + qM_\lambda\left[\max_{s \in [t-h, t]} (y_0(s) + x_m(s, z)) - (y_0(t) + x_m(t, z)) \right]$$

удовлетворяет неравенствам

$$\min_{a+d_\lambda \le z \le b-d_\lambda} \Delta_m(z) \le -\frac{\beta}{2}\frac{(2hq)\sigma^{m+1}}{1-q};$$

$$\min_{a+d_\lambda \le z \le b-d_\lambda} \Delta_m(z) \ge \frac{\beta}{2}\frac{(2hq)\sigma^{m+1}}{1-q};$$

4) *число* h *настолько мало, что* $\sigma < 1$.

Тогда уравнение (83) *имеет* T*-периодическое решение* $x = x(t)$, *для которого* $x(0) \in [a + d_\lambda, b - d_\lambda]$, *причем*

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, x(0)).$$

Условия этой теоремы кажутся достаточно жесткими, в связи с чем мы формулируем следующую задачу.

***Задача* 8.** Доказать, что условие $\sigma > 1$ гарантирует существование хотя бы одного T-периодического решения уравнения (83).

Дифференциальные уравнения с „максимумами" с помощью численно-аналитического метода впоследствии исследовались в статье В. П. Шпаковича, В. И. Мунтяна [20], в диссертационной работе В. И. Мунтяна [21], а также в работе Т. К. Юлдашева [22].

Так, в [20] рассматривалась система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = f\left(s, \dot{x}, \max_{s \in [t-h, t]} x(s), \int_{t-h}^{t} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right),$$

где функции $f(t, x, y, z)$, $\varphi(t, s, y)$ являются T-периодическими по переменному t. Полученный в этой работе результат совпадает с результатами, установленными здесь для дифференциально-операторных уравнений (см. п. 3.4), если положить

$$(Ax)(t) = f(t, x, (Bx)(t))\,;$$

$$(Bx)(t) = [(B_1x)(t), (B_2x)(t)] = \left[\max_{s \in [t-h, t]} x(s), \int_{t-h}^{t} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right]$$

и в оценках использовать неравенство (93) вида

$$r\left(\frac{T}{3}L_1 + \frac{T}{2}L_2K\right) < 1.$$

В работе [21] с помощью обобщения метода, предложенного в [19], исследовалась система второго порядка

$$x'(t) = \lambda x + p\left(t, x(t), y(t), \max_{s \in [t-h, t]} x(s), \int_{t-h}^{t} \varphi(t, s, x(s), y(s))\, ds\right);$$

$$y'(t) = z\left(t, x(t), y(t), \max_{s \in [t-h, t]} x(s), \int_{t-h}^{t} \varphi(t, s, x(s), y(s))\, ds\right).$$

В [22] с использованием численно-аналитического метода изучались проблемы существования и построения периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с „максимумами".

3.3. Дифференциально-операторные уравнения. Оказывается, что исследования, проведенные в пп. 3.2.1, 3.2.3 (впоследствии убедимся, что и п. 3.4), можно рассмотреть с единых позиций. Мы видели, что численно-аналитический метод позволил исследовать периодические решения соответствующих уравнений достаточно простым образом. При этом часто игнорировалась сложная внутренняя структура уравнений.

Так, при изучении уравнений с „максимумами" даже не анализировалась постановка и разрешимость начальной задачи. По сути, бóльшая часть исследования сводилась к изучению интегрального уравнения метода, и впоследствии — полученного определяющего уравнения.

В работе [23] Г. Д. Завалыкут впервые обратила внимание на эту черту метода, введя в рассмотрение так называемые *дифференциально-операторные уравнения.*

Следуя [23], перейдем к изложению основных результатов этой работы. Пусть непрерывный оператор A определен на пространстве $CP_T(\mathbb{R}, D)$ непрерывных T-периодических функций со значениями в замкнутой области D: $A: CP_T(\mathbb{R}, D) \to CP_T(\mathbb{R}, D)$, т. е. $(Ax)(t) = (Ax)(t+T)$, $-\infty < t < \infty$.

Ставится общего вида задача отыскания T-периодических решений уравнения

$$x'(t) = (Ax)(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{84}$$

Укажем следующие важные частные случаи.

3.3.1. Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа. Пусть задано уравнение

$$x'(t) = f(t, x_t). \tag{85}$$

Здесь $(Ax)(t) = f(t, x_t)$, где $x_t(\theta) = x(t-\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, а функция $f(t, y): \mathbb{R} \times \times C[-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывна по совокупности аргументов и T-периодична по переменному t.

Поскольку $x_{t+T} = x_t$ при $x(\cdot) \in CP_T(\mathbb{R}, D)$, то

$$(Ax)(t) = f(t, x_t) = f(t+T, x_{t+T}) = (Ax)(t+T).$$

Уравнения с запаздыванием и уравнения с „максимумами" представляют собой частные случаи (85), так как можно положить

$$g\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) = f_1(t, x_t);$$

$$h\left(t, x(t), \max_{\tau \in [t-\delta, t]} x(\tau)\right) = f_2(t, x_t),$$

где

$$f_1(t, x_t) = g\big(t, x_t(0), x_t(-\tau)\big);$$

$$f_2(t, x_t) = h\left(t, x(0), \max_{u \in [-\tau, 0]} x_t(u)\right).$$

3.3.2. Уравнения опережающего типа. Заметим, что уравнение (85) может быть уравнением опережающего типа, когда $\tau < 0$. Хотя о таких уравнениях известно значительно меньше, чем об уравнениях запаздывающего типа (см., например, I. Györi, G. Ladas [24]), с точки зрения применения численно-аналитического метода последовательных периодических приближений они ничем не отличаются.

Здесь также выделим частный случай оператора A вида

$$(Ax)(t) = f\big(t, x, x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p)\big),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_p$ — произвольная конечная последовательность точек отрезка $[0, T]$.

3.3.3. Интегро-дифференциальные уравнения. Оператором A в (84) может быть интегральный оператор вида

$$(Ax)(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_0 |t-\tau|} \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $\lambda_0 > 0$, $\varphi(s, x)$ — T-периодическая по s непрерывная функция. (Здесь и всюду выше полагается, что непрерывные функции $g(\cdot), h(\cdot), f(\cdot)$ T-периодичны по первому аргументу.)

***Замечание* 6.** В работе [23] рассматривалось уравнение вида

$$x'(t) = f(t, x, Bx), \tag{86}$$

где оператор B имел те же свойства, что и оператор A в (84), а непрерывная функция f предполагалась T-периодичной по первому аргументу. Очевидно, полагая $(Ax)(t) = f\big(t, x(t), (Bx)(t)\big)$, делаем наши исследования более ясными.

При изучении уравнения (84) предположим, что

$$|Ax - Ay|_0 \le L\,|x-y|_0,$$

где $L = \{L_{ij} \ge 0 : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда T-периодическая краевая задача для уравнения (84) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t, z) = z + (Nx)(t, z), \tag{87}$$

где оператор $x \mapsto z + Nx$, определенный формулой

$$(Nx)(t) = \int_0^t (Ax)(s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T (Ax)(s)\,ds,$$

отображает пространство $CP_T(\mathbb{R}, D)$ в себя, лишь только z принадлежит множеству D_β, где

$$\beta = \frac{T}{2}M, \qquad M = \sup_{x \in CP_T(\mathbb{R}, D)} |Ax|_0. \tag{88}$$

Более того, так как

$$|Nx - Ny|_0 \le \frac{T}{2}L\,|x-y|_0,$$

то при условии, что выполняется неравенство

$$r(L) < \frac{2}{T}, \tag{89}$$

оператор N является сжимающим в полном метрическом пространстве $CP_T(\mathbb{R}, D)$. Следовательно, уравнение (87) имеет единственное решение $x = x^*(t, z)$, причем в силу стандартных аргументов и свойств (см., например, М. А. Красносельский и др. [25]), это решение будет непрерывно и липшицево зависеть от параметра z. Изучая теперь определяющее уравнение

$$\Delta(z) = \frac{t}{T}\int_0^T (Ax^*)(t, z)\,dt = 0$$

указанными выше методами, находим значение $z = z^*$ (такое, что $\Delta(z^*) = 0$), при котором функция $x = x^*(t, z^*)$ будет решением дифференциально-операторного уравнения (84).

В приложениях, как отмечалось, часто встречается уравнение вида (86), где T-периодическая по t функция $f(t, x, y)\colon \mathbb{R} \times D \times D_1 \to \mathbb{R}^n$ липшицева по переменным $x \in D$, $y \in D_1 \subset Y$

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \le L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2|_Y,$$

а

$$|Bx - By|_0 \le K\,|x-y|_0. \tag{90}$$

Здесь $\langle Y, Y_+, |\cdot|_Y\rangle$ — банахово пространство с заданными конусом неотрицательных элементов $Y_+ \subset Y$ и абстрактной операцией модуля $|\cdot|_Y\colon Y \to Y_+$

(подробности см. в [26], где обобщены некоторые результаты [27]), а $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $L_2 \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R}^n)$ и $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ — линейные непрерывные операторы, положительные в смысле М. А. Красносельского относительно конических множеств Y_+ и $\mathbb{R}^n_+$. В указанном случае условие (89) имеет вид [23]

$$r\left(\frac{T}{2}[L_1 + L_2 K]\right) < 1, \tag{91}$$

так как

$$|f(t, x(t), (Bx)(t)) - f(t, y(t), (Bx)(t))| \le$$
$$\le L_1 |x(t) - y(t)| + L_2 |(Bx)(t) - (By)(t)|,$$

и, следовательно,

$$|f(t, x(t), (Bx)(t)) - f(t, y(t), (Bx)(t))|_0 \le$$
$$\le L_1 |x(t) - x(t)|_0 + L_2 |(Bx)(t) - (By)(t)|_0 \le [L_1 + L_2 K] |x - y|_0.$$

Оценку (91) можно улучшить, используя одну идею из диссертационной работы В. И. Мунтяна [20, 21]. Действительно, пусть итерационный процесс определяется соотношением

$$x_{m+1}(t, z) = z + (Nx_m)(t, z), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$x_0(t, z) = z.$$

Тогда

$$|x_1(t, z) - x_0(t, z)| \le \alpha_1(t) M.$$

Предположим, что

$$|x_m(t, z) - x_{m-1}(t, z)| \le \alpha_1(t) c, \qquad c \in \mathbb{R}^n_+.$$

Тогда

$$|x_{m+1}(t, z) - x_m(t, z)| \le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^T |(Ax_m)(s) - (Ax_{m-1})(s)| ds +$$
$$+ \frac{t}{T} \int_t^T |(Ax_m)(s) - (Ax_{m-1})(s)| ds \le$$
$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \Big[L_1 |x_m - x_{m-1}| + L_2 K |x_m - x_{m-1}|_0 \Big] ds +$$
$$+ \frac{t}{T} \int_t^T \Big[L_1 |x_m - x_{m-1}| + L_2 K |x_m - x_{m-1}|_0 \Big] ds \le$$
$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left[L_1 c \alpha_1(s) + \frac{T}{2} L_2 K c \right] ds + \frac{t}{T} \int_t^T \left[L_1 c \alpha_1(s) + \frac{T}{2} L_2 K c \right] ds =$$
$$= L_1 c \alpha_2(t) + \frac{T}{2} L_2 K c \alpha_1(t) \le \left[\frac{T}{3} L_1 + \frac{T}{2} L_2 K \right] \alpha_1(t) c = Q \alpha_1(t) c.$$

По индукции заключаем, что

$$|x_{m+1}(t, z) - x_m(t, z)| \le \alpha(t) Q^m M.$$

Таким образом, итерационная последовательность (92) будет сходящейся, как только

$$r\left(\frac{T}{3}L_1 + \frac{T}{2}L_2K\right) < 1, \tag{93}$$

что точнее, чем условие (91).

Докажем некоторые нужные в дальнейшем вспомогательные утверждения. В ряде случаев эти утверждения представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть* $L = \left(k_iL_j\right)_{i,j=1}^m$ *— матрица размерности* $m^2 \times m^2$, *где* $\left\{L_j\right\}_{j=1}^m$ *являются* $m \times m$ *матрицами с неотрицательными компонентами, а* $\{k_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}_+$ *— произвольные неотрицательные постоянные. Тогда справедлива следующая формула для вычисления спектрального радиуса матрицы* L:

$$r(L) = r\left(\sum_{j=1}^m k_iL_j\right).$$

Доказательство. **1°.** Рассмотрим сначала случай, когда все компоненты матриц L_j и все числа k_i строго положительны. В этом случае согласно теореме Перрона (см. §2 гл. XIII [28]) матрица

$$G = \sum_{j=1}^m k_iL_j$$

имеет такой собственный вектор b со всеми положительными компонентами, что

$$Gb = r(G)b.$$

Образуем вектор $a = \operatorname{col}(k_1b, k_2b, \ldots, k_mb)$ с положительными компонентами. С учетом последнего равенства легко проверить, что

$$La = r(G)a.$$

Далее, поскольку матрицы с положительными компонентами не могут иметь двух линейно независимых неотрицательных собственных векторов (см. замечание 3 в §2 гл. XVI [28], то, обращаясь вновь к теореме Перрона, заключаем, что $r(L) = r(G)$.

2°. Рассмотрим теперь общий случай, когда некоторые компоненты матрицы L_j, а также числа k_i могут обращаться в нуль.

Пусть $A(\varepsilon) = \{\varepsilon\}_{i,j=1}^\infty$ — матрица, все элементы которой равны $\varepsilon > 0$. Тогда матрицы $L_j(\varepsilon) = L_j + A(\varepsilon)$ и числа $k_j(\varepsilon) = k_j + \varepsilon$ удовлетворяют условиям первой части доказательства. Поэтому

$$r(L(\varepsilon)) = r\left(\sum_{j=1}^m k_i(\varepsilon)L_j(\varepsilon)\right).$$

Как известно, спектральный радиус конечномерной матрицы непрерывно зависит от параметра, следовательно, предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве завершает доказательство леммы.

Последнее утверждение может быть обобщено следующим образом.

Лемма 3. *Пусть* $P = \left(K_iL_j\right)_{i,j=1}^\infty$; $Q = \left(L_jK_i\right)_{i,j=1}^\infty$ *— матрицы размерности* $m^2 \times m^2$, *где* L_j *и* K_i *—* $m \times m$ *матрицы с неотрицательными компонентами.*

Тогда спектральные радиусы матриц P и Q таковы:

$$r(P) = r\left(\sum_{j=1}^{m} K_j L_j\right); \qquad r(Q) = r\left(\sum_{j=1}^{m} L_j K_j\right).$$

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения леммы 2, определив векторы a и b следующим образом:

1) для P

$$b\sum_{i=1}^{m} K_i L_i = \mu b; \qquad a = (bL_1, bL_2, \dots, bL_m),$$

тогда $aP = \mu a$;

2) для Q

$$\left(\sum_{i=1}^{m} K_i L_i\right) b = \nu b; \qquad a = \mathrm{col}\,(K_1 b, K_2 b, \dots, K_m b),$$

тогда $Qa = \nu a$.

Следующее утверждение весьма полезно при доказательстве сходимости различных последовательных функций.

Лемма 4. *Предположим, что существуют последовательности векторов $\{a_m\}_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}^n_+$ и $\{b_m\}_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}^n_+$, а также неотрицательные непрерывные функции φ_1 и φ_2 такие, что для некоторой последовательности функций $\{x_m\colon m \in \mathbb{N}\} \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ для всех m, начиная с некоторого номера $m_0 \geq 1$, выполняется неравенство*

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq a_m \varphi_1(t) + b_m \varphi_2(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Если при этом для некоторой $2n \times 2n$ матрицы Q с неотрицательными компонентами выполняется неравенство

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} \leq Q \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix},$$

и спектральный радиус Q меньше единицы, то существует равномерный предел последовательности $\{x_m\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x^*(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$; $c_m = \mathrm{col}\,(a_m, b_m)$. Поскольку $c_{m+j} = Q^j c_m$, то, согласно данной оценке для $|x_{m+1}(t) - x_m(t)|$, при всех t имеем

$$\begin{aligned} |x_{m+1}(t) - x_m(t)| &\leq |x_{m+k}(t) - x_{m+k-1}(t)| + \ldots + |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \\ &\leq \varphi(t)\left(Q^{k-1} + Q^{k+2} + \ldots + E\right)c_m \leq \\ &\leq \varphi(t)(E-Q)^{-1}c_m = \varphi(t)(E-Q)^{-1}Q^{m-m_0}c_{m0}. \end{aligned}$$

Так как $r(Q) < 1$, из последнего соотношения следует, что последовательность $\{x_m\colon m \geq 1\}$ является фундаментальной, что и завершает доказательство.

Замечание 7. Оценка (93) является простым следствием лемм 2 и 4. Действительно, условия леммы 4 будут выполнены, если положить $\varphi_1(t) = \alpha_2(t)$; $\varphi_2(t) = \alpha_1(t)$ и определить матрицу Q по формуле

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3T}{10}L_1 & \frac{T^2}{6}L_2K \\ L_1 & \frac{T}{2}L_2K \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$Q \le \begin{bmatrix} \frac{T}{3}L_1 & \frac{T^2}{6}L_2K \\ L_1 & \frac{T}{2}L_2K \end{bmatrix},$$

то в силу леммы 2 получаем

$$r(Q) \le r\left(\frac{T}{3}L_1 + \frac{T}{2}L_2K\right).$$

Кроме того, так как

$$Q \le \begin{bmatrix} \frac{3}{10}TL_1 & \frac{T^2}{6}L_2K \\ L_1 & \frac{5}{9}TL_2K \end{bmatrix},$$

то, наряду с (93), получаем и другую полезную достаточную оценку

$$r\left(\frac{3T}{10}L_1 + \frac{5T}{9}L_2K\right) < 1,$$

дополняющую неравенство (93).

Сформулируем полученный нами окончательный результат, например, для уравнения (84).

Теорема 19. *Пусть выполнено условие* (89) *и, дополнительно,* $D_\beta \ne \varnothing$, *где вектор* β *определяется из* (88). *Тогда для каждого* $z \in D_\beta$ *последовательность* $x_m(t, z)$, *определяемая соотношением* (92), *равномерно сходится при* $t \in \mathbb{R}$ *к T-периодической функции*

$$x^*(t, z) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z),$$

причем

$$|x^*(t, z) - x_m(t, z)| \le Q^m(E - Q)^{-1}M\alpha_1(t).$$

Кроме того, функция

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T (Ax^*)(t, z)\,dt$$

непрерывна на множестве D_β, *и ее нули (т. е. корни* z^* *определяющего уравнения* $\Delta(z^*) = 0$*) определяют T-периодическое решение* $x = x^*(t, z^*)$ *уравнения* (84). *При этом упомянутое определяющее уравнение* $\Delta(z) = 0$ *может быть исследовано методами, изложенными в п.* 1.2 *работы* [1].

Отметим также некоторые другие работы, связанные с изучением дифференциально-операторных уравнений с помощью численно-аналитического метода.

В работе [23] доказана теорема об усреднении T-периодических систем стандартного вида $x'(t) = \varepsilon f(t, x, Bx)$, аналогичная теореме 7.3 работы [27].

В работе Г. Д. Завалыкут, О. Д. Нуржанова [29] под влиянием работ А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [30, 31] рассмотрена задача отыскания T-периодических решений уравнения

$$x'(t) = \varepsilon f(x, Bx), \tag{94}$$

которые авторы называют автономным в том смысле, что правая часть уравнения не зависит явно от времени. Однако, поскольку „неавтономное" уравнение (86) может быть, как показываем, записано в „автономном" виде (84), то возникает вопрос о правомочности перенесения понятия автономной системы из области обыкновенных дифференциальных уравнений на дифференциально-операторные.

Авторы работы [29] предполагают, что оператор B таков, что „сохраняет автономность" (?!) уравнения (94). По-видимому, под сохранением автономности уравнения (94) оператором B следует понимать, что $(Bx)(t+\mu) = (Bx)(t)$, как только $x(t+\mu) = x(t)$, где период μ произволен и не фиксирован. (Напомним, ранее фиксировалось значение периода $\mu = T$).

***Задача* 9.** Возможно ли усиление неравенства (93) до условия вида

$$r\left(\frac{T}{q}L_1 + \frac{T}{2}L_2K\right) < 1,$$

где $q = 3, 41 \ldots$?

Достаточно большое число работ было посвящено исследованию с помощью численно-аналитического метода интегро-дифференциальных уравнений различных типов. Первые такие публикации (см. [32]) появились вскоре после возникновения метода. Впоследствии большинство авторов, которые проводят исследования в данной области, в той или иной мере затрагивали этот вопрос. Анализ упомянутых публикаций показывает, что в этих исследованиях можно выделить два основных направления.

Первое из них связано с изучением уравнений вида

$$x'(t) = f(t, x(t), (Ax)(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{95}$$

где выражение для оператора $A: CP_T(\mathbb{R}) \to CP_T(\mathbb{R})$ содержит интегральный оператор типа Фредгольма. В этих работах для конкретных видов оператора A повторяется схема численно-аналитического метода, изложенная в п. 3.3 для дифференциально-операторных уравнений (84). По этой причине мы не приводим подробный анализ упоминаемых работ.

Так, в работе Г. Вахабова [33]

$$(Ax)(t) = \int_0^{h(t)} \varphi(t, s, x(s))\,ds,$$

где $h(t)$, $\varphi(t, s, x)$ — периодические по t, s с периодом T функции.

В работе Н. Г. Господинова [34]

$$(Ax)(t) = \int_0^{b} \varphi(t, s, x(s))\,ds, \tag{96}$$

где $0 \le a \le b \le T$, $\varphi(t, s, x(s))$ — T-периодическая по t функция.

В случае уравнения вида (95) с оператором (96), согласно результатам п. 3.3, для применимости метода достаточно выполнения ограничений $D_\beta \ne \varnothing$ и

$$r\left(\frac{L_1T}{3} + \frac{L_2K}{2}(b-a)T\right) < 1. \tag{97}$$

Здесь предполагается выполнение условия типа (90)

$$|Ax - Ay|_0 \le K|x - y|_0,$$

а также условия

$$|\varphi(t,s,x)-\varphi(t,s,x)| \leq K|x-y|.$$

Ввиду простоты оператора A в (96), оценку (97) можно, однако, несколько улучшить. Для этого заметим, что интегральное уравнение метода в этом случае имеет вид

$$x(t) = z + (Nx)(t),$$

где

$$(Nx)(t) = \int_0^t f[s, x(s), (Ax)(s)]ds - \frac{t}{T}\int_0^T f[s, x(s), (Ax)(s)]ds,$$

причем

$$|(Nx)(t)-(Ny)(t)| \leq V|x(t)-y(t)|,$$

где линейный оператор сравнения V задан следующим образом:

$$(Vu)(t) = L_1(Au)(t) + L_2K\alpha_1(t)\int_a^b u(s)ds.$$

Таким образом, условие (97) можно (см. теорему 6.2 в работе [25]) заменить предположением о справедливости неравенства

$$r(V) < 1. \tag{98}$$

Поскольку для каждого $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$(V\alpha_1)(t) = \left[\frac{T}{3}L_1 + L_2K\int_a^b \alpha_1(s)ds\right]\alpha_1(t),$$

то условие (98) будет наверное выполнено, если

$$r\left(\frac{T}{3}L_1 + L_2K\int_a^b \alpha_1(s)ds\right) < 1. \tag{99}$$

Очевидно, что неравенство (99), совпадающее с соответствующей оценкой из [34], точнее, чем (97).

Далее, в работе [35] было положено

$$(Ax)(t) = \int_0^{t+a} \varphi(t, \theta, x(\theta))d\theta,$$

где $\varphi(t, \theta, x)$ — функция T-периодическая по t, θ.

Непосредственное применение результатов п. 3.3 дает следующие достаточные условия применимости метода:

$$D_\beta \neq \varnothing, \qquad r\left(\frac{1}{3}L_1T + \frac{1}{2}L_2KT|\alpha|\right) < 1. \tag{100}$$

Эти условия совершенно аналогичны условиям (97).

Заметим, что в [35] получена более грубая, по сравнению с неравенством (100), оценка

$$\frac{T}{3}r\left(L_1 + L_2K\left[a\left(1+\frac{a}{2T}\right) + \frac{a^2}{T}\left(1-\frac{a}{T}\right) + 3T\left(1-\frac{a}{T}\right)^2\right]\right) < 1.$$

Кроме этого, в цитируемой работе [35] предполагалось, что $a \in [0, T]$, в то время, как в (100) значение a может быть произвольным.

Отметим также, что впоследствии Раад Ноори Бутрис [36] исследовал даже более простой случай, когда

$$(Ax)(t) = \int_{t-T}^{t} g(s, x(s))\,ds.$$

Другие публикации этого направления упоминались в разделе 3.2.3; на некоторые из них также укажем далее, в разделе, связанном с изучением „импульсных" систем.

Вторая группа исследований связана с изучением уравнения (95) в предположении, что оператор A имеет вид

$$(Ax)(t) = \int_{0}^{t} \varphi(t, s, x(s))\,ds. \tag{101}$$

Теория численно-аналитического метода, изложенная в п. 3.3, может быть применена к уравнению (95) с оператором (101), если функция $\varphi(t, s, x)$ является T-периодической по переменным t, s и, кроме того, для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_{0}^{T} \varphi(t, s, x_m(s, z))\,ds = 0, \tag{102}$$

где $\{x_m(s, z)\}_{m \geq 0}$ — последовательные периодические приближения, определяемые соотношением типа (92). Если же отказаться от условия (102) и строить схему метода для общего случая, то в конце концов придем к необходимости искать решение системы $2n$ нелинейных трансцендентных уравнений с n неизвестными (вектор $z \in \mathbb{R}^n$). Ясно, что такая система в общем случае не имеет решений. В этой связи сформулируем следующую задачу.

***Задача* 10.** Указать условия (например, какие-либо условия симметрии) на функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$, при которых всегда верно условие (102).

Отметим, что решение поставленной задачи, к сожалению, не дано ни в оригинальной работе Г. Вахабова [32], ни в последовавших за нею статьях Г. Х. Сарафовой, Д. Д. Байнова [37 – 39].

По применению метода к другим интегро-дифференциальным уравнениям отметим также работу А. Т. Алымбаева [40], повторно опубликованную О. Д. Нуржановым, А. Т. Алымбаевым [41], в которых рассматриваются так называемые *автономные системы интегро-дифференциальных уравнений*

$$x'(t) = f\left(x, \int_{t}^{t+\tau} \varphi(t-s, x(s))\,ds\right).$$

Укажем еще на статьи А. Т. Алымбаева [42] и Б. Вуйтовича [43], где изучается уравнение

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{t} \varphi(t, s, x(s))\,ds\right),$$

а также на работу [44], где анализируются периодические решения автономных систем интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием.

Не разрешенная относительно производной система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \int_{0}^{t} \varphi(t, s, x(s), x'(s))\,ds\right)$$

изучалась в диссертационной работе Б. Е. Турбаева [45].

Уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f\left(t, x(t), x'(t), \int_0^{h(t)} \varphi(t, s, x(s), x'(s))\,ds\right)$$

изучалась в монографии Ю. А. Митропольского, Г. П. Хомы, М. И. Громяка [46] и в работе В. З. Чорного [47]. В работе [47] анализируется также T-периодическое решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x(t), x'(t), \int_{kt}^{kt+h(t)} \varphi(t, s, x(s), x'(s))\,ds\right),$$

где $h(\cdot)$ — T-периодическая функция; k — целое число.

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50,** № 1. – С. 93–108.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – № 2. – С. 225 – 243.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием // Мат. физика. – 1967. – Вып. 3. – С. 128 – 145.
5. *Мартынюк Д. И.* О периодических решениях счетных систем периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Там же. – 1968. – Вып. 4. – С. 84 – 89.
6. *Курпель Н. С.* О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Тр. Пятой Междунар. конф. по нелин. колеб. – Киев. – 1970. – **1.** – С. 348 – 352.
7. *Курпель М. С., Цідило К. В.* Про двосторонні наближення до періодичних розв'язків систем диференціальных рівнянь із запізненням аргументу // Докл. АН УССР. – 1972. – № 6. – С. 515 – 520.
8. *Янчук С. В.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Допов. НАН України. – 1997. – № 6. – С. 49 – 52.
9. *Augustinowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving boundary value problems for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. – 1990. – **145.** – P. 255 – 269.
10. *Kwapisz M.* On modifications of the integral equation of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems // Ibid. – 1992. – **157.** – P. 125 – 135.
11. *Kwapisz M.* On integral equations arising in numerical-analytic method of solving boundary value problems for differential functional equations // Proc. Int. Conf. Different. Equat. (Barcelona, Spain, 26 – 31 August, 1991). – London: World Scientific, 1993. – **2.** – P. 671 – 677.
12. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44,** № 1. – С. 128 – 132.
13. *Трофимчук Е. П., Коваленко А. В.* Численно-аналитический метод А. М. Самойленко без определяющего уравнения // Там же. – 1995. – **47,** № 1. – С. 138 – 140.
14. *Ронто А. Н.* Об одной итерационной схеме приближенного решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб. работ студентов и аспирантов Киевского университета. Естественные науки. – Киев: Киев. ун-т, 1995. – Вып. 2. – С. 17 – 22.
15. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения с отклоняющимся аргументом. – Киев, 1997. – С. 221 – 247.
16. *Байнов Д. Д., Сарафова Г. Х.* Применение численно-аналитического метода к исследованию периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами // Rev. roum. sci. techn. Sér. Méc. appl. – 1981. – **26,** № 3. – P. 371 – 382.
17. *Сарафова Г. Х., Байнов Д. Д.* Применение численно-аналитического метода А. М. Самойленко к исследованию периодических линейных дифференциальных уравнений с максимумами // Ibid. – № 4. – P. 595 – 603.
18. *Сарафова Г. Х., Байнов Д. Д.* Применение численно-аналитического метода А. М. Самойленко к исследованию периодических линейных дифференциальных уравнений с максимумами // Stud. scim. math. hung. – 1982. – **17,** № 1–4. – P. 221 – 228.
19. *Перестюк Н. А.* О периодических решениях некоторых систем дифференциальных уравнений // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 136 – 146.

20. *Шпакович В. П., Мунтян В. И.* Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений с „максимумами" // Некоторые проблемы теории асимптотических процессов нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 186 – 190.
21. *Мунтян В. И.* Обоснование асимптотических методов для уравнений с „максимуми": Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 111 с.
22. *Юлдашев Т. К.*. Периодические решения нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с „максимумами" // Вопр. вычисл. и прикл. мат. АН Республики Узбекистан. – 1992. – № 33. – С. 119 – 129.
23. *Завалыкут Г. Д.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений одного класса дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19,** № 4. – С. 569 – 575.
24. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. – Oxford: Clarendon, 1991. – 320 p.
25. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
26. *Rontó M., Ronto A. N., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 51 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 96-02).
27. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
28. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
29. *Завалыкут Г. Д., Нуржанов О. Д.* О периодической краевой задаче для одного класса дифференциально-операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39,** № 3. – С. 299 – 303.
30. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Периодическая краевая задача // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 9. – С. 20 – 23.
31. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
32. *Вахабов Г.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1969. – **21,** № 5 – С. 675 – 683.
33. *Вахабов Г.* О некоторых классах исследования колебаний в нелинейных системах интегро-дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1970. – 13 с.
34. *Господинов М. Г.* Численно-аналитический метод исследования одного класса периодических систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка // Годишник высш. учебн. завед. Приложна мат. – 1980. – **16,** № 1. – С. 191 – 202 (на болг. яз.).
35. *Нуржанов О. Д.* О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 7. – С. 595 – 599.
36. *Бутрис Раад Наори.* Периодические решения нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 16 с.
37. *Сарафова Г. Х., Байнов Д. Д.* Численно-аналитический метод исследования счетных систем периодических интегро-дифференциальных уравнений // Годишник высш. учебн. завед. Приложна мат. – 1980. – **16,** № 1. – С. 135 – 146 (на болг. яз.).
38. *Sarafova G. H., Bainov D. D.* Periodic solutions of nonlinear integro-differential equations with an impulse effect // Period. math. hungar. – 1987. – **18,** № 2. – P. 99 – 113.
39. *Bainov D. D., Sarafova G. H.* An application of the numerical-analytic method of A. M. Samoilenko for investigation of periodic systems of integro-differential equations // Arch. Math. (Brno). – 1979. – **15,** № 2. – P. 67 – 80.
40. *Алымбаев А. Т.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Асимптотические методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложения. – Фрунзе: Киргиз. ун-т, 1981. – С. 27 – 36.
41. *Нуржанов О. Д., Алымбаев А. Т.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1981. – **33,** № 4. – С. 540–547.
42. *Алымбаев А. Т.* Периодическое решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – С. 116 – 123.
43. *Вуйтович Б.* Чисельно-аналітичний метод дослідження інтегро-диференціальних рівнянь // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1982. – № 24. – С. 14 – 21.
44. *Алымбаев А. Т.* Периодические решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – 1987. – № 20. – С. 156 – 23.
45. *Турбаев Б. Е.* Асимптотические методы интегрирования нелинейных интегро-дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 9 с.
46. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квази-волновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
47. *Чорный В. З.* Исследование периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 10 с.

Получено 27.02.98