УДК 514.17+513+681.3

Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

ЭЛЛИПС МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ, СОДЕРЖАЩИЙ КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО ТОЧЕК. I

From the geometric point of view, we consider the problem of constructing the minimal area ellipse containing a given convex polygon. In the case of an arbitrary triangle, we obtain the equation of minimal area ellipse in the explicit form; in the case of quadrangle, we associate the problem under consideration with solving a cubic equation. In the case of any polygon, we prove that if the boundary of minimal area ellipse and contained inside it polygon possess exactly three common points, then the ellipse under consideration is a minimal area ellipse for a triangle.

З геометричної точки зору розглянуто проблему побудови еліпса мінімальної площі (ЕМП), що містить заданий опуклий многокутник. Для довільного трикутника в явному вигляді одержано рівняння межі ЕМП, для чотирикутника проблема побудови ЕМП пов'язана з розв'язком кубічного рівняння. Доведено, що для будь-якого многокутника у випадку, коли межа ЕМП має з ним рівно три спільні точки, тоді цей еліпс є ЕМП для отриманого трикутника.

Введение. Рассмотрим задачу построения эллипса минимальной площади, содержащего данное конечное множество точек. Переходя к выпуклой оболочке конечного набора точек, нетрудно убедиться, что эта проблема эквивалентна задаче построения эллипса минимальной площади, содержащего выпуклый многоугольник. Предлагаем точное решение этой задачи с помощью классических геометрических методов без использования теории выпуклого программирования [1]. Одной из первых работ, посвященных подобной проблематике, является результат Г. Радемахера и О. Теплица [2], где аналогичная проблема решена для окружности.

Определение 1. *Эллипсом минимальной площади (ЭМП) для ограниченного множества* Φ *называется эллипс* $e(\Phi)$, *удовлетворяющий следующим условиям:* 1) $\Phi \subset e(\Phi)$; 2) *для всякого другого эллипса* e_1 *такого, что* $\Phi \subset e_1$ *выполнено неравенство* $S(e(\Phi)) \le S(e_1)$, *где* $S(M)$ — *площадь фигуры* M.

Очевидно, что в случае ограниченного множества Φ ЭМП для Φ и $\operatorname{conv}(\Phi)$ (выпуклая оболочка Φ) совпадают, поэтому единственное ограничение, которое накладывается на класс ограниченных множеств Φ (возможно даже состоящий из бесконечного числа точек) состоит в том, что $\operatorname{conv}(\Phi)$ должна быть выпуклым многоугольником, т. е. его граница должна состоять из конечного числа отрезков.

Методом от противного, с использованием аффиных отображений на плоскости гомотетии и сжатия, легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *На границе ЭМП для произвольного выпуклого многоугольника* M *лежит не меньше трех вершин* M.

1. Эллипс минимальной площади для треугольника. Начнем исследование проблемы со следующего очевидного результата.

Теорема 2. *ЭМП для правильного треугольника* T *является описанный вокруг* T *круг.*

Доказательство этой теоремы эквивалентно доказательству следующего утверждения: треугольник максимальной площади, вписанный в заданный круг является правильным [3].

Теорема 2 позволяет получить ЭМП для произвольного треугольника T: для этого достаточно провести аффинное преобразование T в правильный треугольник T_0, а затем описать вокруг T_0 круг K, далее выполнить обратное аффинное преобразование. При этом T_0 перейдет в T, а искомый ЭМП для треугольника T будет образом круга K.

Для дальнейших исследований ЭМП необходимо решить следующую задачу.

***Задача* 1.** *Найти уравнение ЭМП для произвольного треугольника.*

Для решения этой задачи введем в пространстве $\mathbb{R}^3$ декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$. Пусть ABC — произвольный треугольник. Разместим его в плоскости ZOX следующим образом: сторона AB лежит на оси OX, так, что ее середина совпадает с началом координат O, а вершина C расположена в верхней полуплоскости (т. е. $z > 0$) (рис. 1).

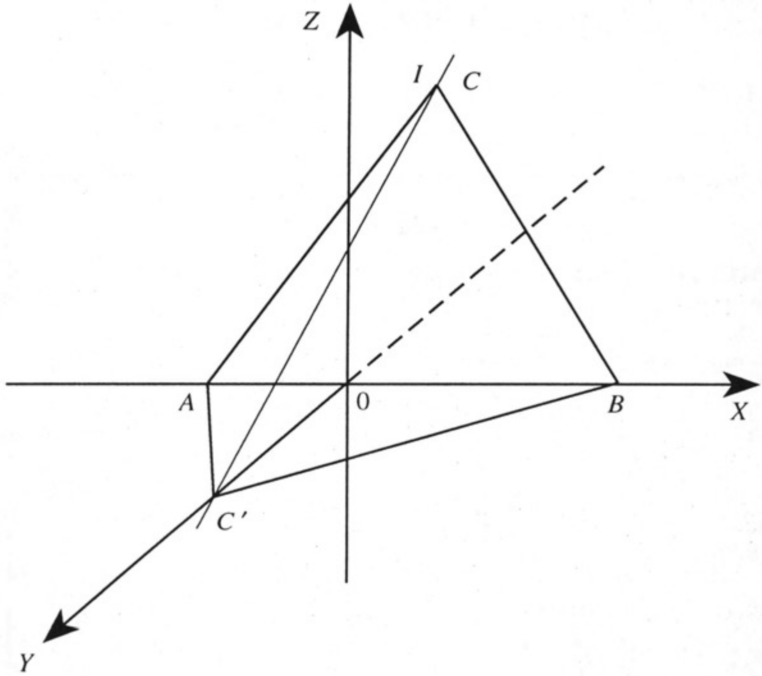

Рис. 1

Предположим, что при таком расположении треугольника ABC его вершины имеют в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие координаты: $A(-a, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(b, 0, c)$.

Далее в плоскости XOY построим правильный треугольник ABC' так, чтобы вершина C' лежала в верхней полуплоскости XOY (т. е. $y > 0$). Очевидно, что при этом C' будет расположена на оси OY и иметь координаты $\left(0, \sqrt{3}a, 0\right)$.

Рассмотрим операцию проектирования плоскости ZOX на XOY вдоль прямой $l = CC'$. При этом треугольник ABC переходит в правильный треугольник ABC'. В силу аффинности описанного отображения эллипсы в одной плоскости переходят в эллипсы в другой, причем сохраняется отношение площадей проектируемых фигур. Найдем уравнение образа круга, описанного вокруг треугольника ABC' при этом преобразовании. Из изложенного выше вытекает, что этот образ и будет искомым ЭМП для треугольника ABC.

Вектор, вдоль которого проводится проектирование, имеет координаты: $\overrightarrow{CC'} = \left(b, -\sqrt{3}a, c\right)$, а произвольная точка $M(x_0, 0, z_0)$ в плоскости ZOX переходит в точку M' в плоскости XOY с такими координатами:

$$x' = -\frac{z_0 b}{c} + x_0; \qquad y' = \frac{\sqrt{3}a z_0}{c}; \qquad z' = 0. \tag{1}$$

В плоскости XOY окружность, описанная вокруг треугольника ABC', задается уравнением

$$(x')^2 + \left(y' - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}a^2. \tag{2}$$

Из формул (1) вытекает, что уравнение эллипса, который является образом окружности (2) при описанном выше преобразовании проектирования, имеет вид

$$\left(x_0 - \frac{z_0 b}{c} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}az_0}{c} - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}a^2.$$

Отсюда уравнение ЭМП, являющегося решением задачи 1, примет вид

$$c^2x_0^2 - 2bcx_0z_0 + \left(b^2 + 3a^2\right)z_0^2 - 2a^2cz_0 - a^2c^2 = 0. \tag{3}$$

2. ЭМП, описанный вокруг выпуклого четырехугольника. Решение задачи построения ЭМП для выпуклого четырехугольника является более сложной проблемой по сравнению с треугольником, так как все треугольники аффинно инвариантны (напомним, что две фигуры называются аффинно инвариантными, если их можно преобразовать друг в друга с помощью аффинных отображений), в то время как для выпуклых четырехугольников этот факт не имеет места. Выпуклые четырехугольники распадаются на классы аффинно инвариантных фигур (классы эквивалентности [4]). Один такой класс образуют все параллелограммы, а уже множество всех трапеций состоит из бесконечного числа классов, однако в каждом из них есть равнобочная трапеция, которую удобно считать в качестве представителя этого класса.

Далее нам понадобится следующий критерий аффинной инвариантности выпуклых четырехугольников, который приводим без доказательства.

Лемма 1. *Любые два выпуклых четырехугольника, у которых диагонали в точке пересечения делятся в равных отношениях* $a:c$ *и* $b:d$, *являются аффинно инвариантными.*

Из свойств аффинных преобразований вытекает, что для аффинно инвариантных четырехугольников отношения, в которых делятся их диагонали в точке пересечения, равны. На основании леммы 1 проблема отыскания ЭМП для заданного выпуклого четырехугольника сводится к решению задачи построения ЭМП для четырехугольника с фиксированным отношением $a:c$ и $b:d$ отрезков диагоналей, на которые их делит точка пересечения.

Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке O и делятся в отношениях:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{1}{k^2}; \qquad \frac{BO}{OD} = \frac{n^2}{1}. \tag{4}$$

При этом, без ограничения общности рассмотрения, можно считать, что

$$0 < k \le 1; \qquad 0 < n \le 1. \tag{5}$$

Класс всех выпуклых четырехугольников, аффинно инвариантных заданному четырехугольнику $ABCD$, обозначим $W(k, n)$.

При исследовании ЭМП для выпуклых четырехугольников необходимо решить следующие задачи.

Задача 2. *Построить ЭМП для четырехугольника из класса* $W(k, n)$.

Задача 2а. *Построить ЭМП для четырехугольника из класса* $W(k, n)$, *если известно, что все четыре вершины четырехугольника лежат на границе этого эллипса.*

Легко показать, что задача 2а эквивалентна следующей задаче.

Задача 3. *В заданный круг вписать четырехугольник из класса* $W(k, n)$ *максимальной площади.*

Для решения задачи 3 используем аппарат аналитической геометрии. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $AO \cdot OC = BO \cdot OD$. Положим $AO = 1$, тогда из (4) вытекат, что $OC = k^2$, кроме того, если $DO = q$, то $BO = n^2 q$, так что $AO \cdot OC = k^2 = BO \cdot OD = q^2 n^2$. Следовательно, $q = n/k$ и

$$AO = 1; \quad CO = k^2; \quad BO = nk; \quad DO = k/n. \tag{6}$$

Любой четырехугольник, диагонали которого удовлетворяют условию (6), является вписанным в окружность и принадлежит классу $W(k, n)$; угол φ между диагоналями удовлетворяет неравенству

$$0 < \varphi < \pi. \tag{7}$$

Рассмотрим произвольный четырехугольник, для которого выполнены условия (6) и расположим его на координатной плоскости XOY, как показано на рис. 2. Точка пересечения диагоналей помещается в центр системы координат, другие точки имеют следующие координаты:

$$A(1, 0); \quad B(-kn\cos\varphi, -kn\sin\varphi); \quad C(-k^2, 0); \quad D\left(\frac{k}{n}\cos\varphi; \frac{k}{n}\sin\varphi\right).$$

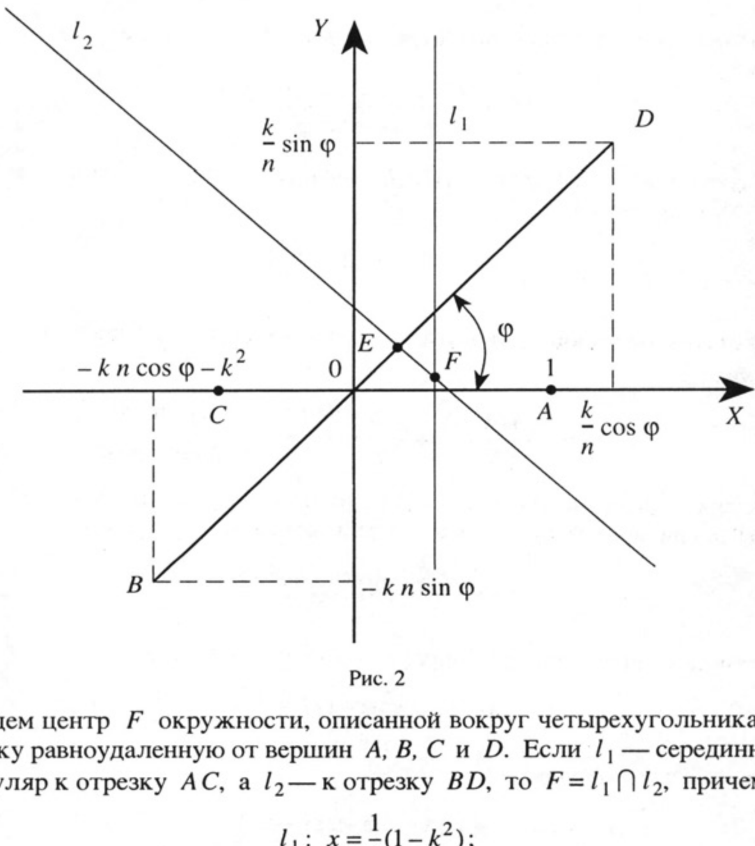

Рис. 2

Найдем центр F окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, как точку равноудаленную от вершин A, B, C и D. Если l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AC, а l_2 — к отрезку BD, то $F = l_1 \cap l_2$, причем

$$l_1: \ x = \frac{1}{2}(1 - k^2); \tag{8}$$

$$l_2: \ y = (-\operatorname{ctg}\varphi)x + b,$$

где параметр b определяется исходя из условия, что l_2 проходит через точку E — середину отрезка BD. Поэтому

$$b = \frac{k\left(1-n^2\right)}{2n \sin \varphi},$$

и

$$l_2: \; y = (-\operatorname{ctg} \varphi)x + \frac{k\left(1-n^2\right)}{2n \sin \varphi}. \tag{9}$$

Абсцисса x_F точки F определяется из уравнения (8), а ордината y_F — из системы (8), (9):

$$x_F = \frac{1-k^2}{2}; \qquad y_F = \frac{k\left(1-n^2\right) - (\cos \varphi)\left(1-k^2\right)n}{2n \sin \varphi}. \tag{10}$$

Для сокращения обозначений положим

$$I = \left(n^2k^2+1\right)\left(n^2+k^2\right); \qquad J = 2nk\left(1-n^2\right)\left(1-k^2\right);$$

$$L = 4n^2k^2. \tag{11}$$

Теперь можно записать квадрат радиуса R искомой окружности:

$$R^2 = \frac{I - J\cos\varphi - L\cos^2\varphi}{4n^2\sin^2\varphi}. \tag{12}$$

Площадь четырехугольника $ABCD$ вычисляется по диагоналям и углу между ними по формуле

$$S(ABCD) = \frac{\left(1+k^2\right)\left(1+n^2\right)k \sin\varphi}{2n}.$$

Поэтому отношение площадей четырехугольника и круга в зависимости от угла φ имеет вид

$$\gamma(\varphi) = \frac{S(ABCD)}{\pi R^2} = \frac{2nk\left(1+k^2\right)\left(1+n^2\right)\sin^3\varphi}{\pi(I - J\cos\varphi - L\cos^2\varphi)}.$$

При фиксированных значениях n и k проблема отыскания максимума функции $\gamma(\varphi)$ эквивалентна задаче нахождения минимума функции

$$f(\varphi) = \frac{I - J\cos\varphi - L\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}.$$

Критические значения $f(\varphi)$ определяются из соотношения

$$f'(\varphi) = \frac{L\cos^3\varphi + 2J\cos^2\varphi + (2L-3I)\cos\varphi + J}{\sin^4\varphi} = 0,$$

а это равносильно условию

$$g(\varphi) = L\cos^3\varphi + 2J\cos^2\varphi + (2L-3I)\cos\varphi + J = 0.$$

Поскольку φ удовлетворяет условию (7), то $\cos\varphi \in (-1, 1)$, и, вводя новую переменную $t = \cos\varphi$, получаем уравнение

$$g_1(t) = Lt^3 + 2Jt^2 + (2L - 3I)t + J = 0. \tag{13}$$

Для отыскания корней уравнения (13) заметим, что

$$\lim_{t \to -\infty} g_1(t) = -\infty,$$

$$g_1(-1) = 3(I + J - L) = 3(n + k^2)(1 - nk^2) \geq 0;$$

$$g_1(0) = J = 2nk(1 - n^2)(1 - k^2) \geq 0;$$

$$g_1(1) = 3(L + J - I) = -3(1 + nk)^2(n - k)^2 \leq 0;$$

$$\lim_{t \to +\infty} g_1(t) = +\infty.$$

Отсюда следует, что кубический многочлен $g_1(t)$ имеет три вещественных корня, расположенных соответственно на промежутках $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Поскольку $|t| \leq 1$, на промежутке $(-1, 1)$ уравнение $g_1(t) = 0$ имеет только один корень.

Возвращаясь к функции $g(\varphi)$ видим, что $g(0) = g_1(1) \leq 0$, $g(\pi/2) = g_1(0) \geq 0$, следовательно, ее производная имеет единственный корень $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и меняет в этой точке знак с минуса на плюс, поэтому $f(\varphi)$ в этой критической точке достигает минимума.

Таким образом, решение задачи 3 сводится к исследованию кубического уравнения (13) и нахождению корня, лежащего между нулем и единицей.

Легко видеть, что решение задачи 2а сводится к задаче 3: решая для заданного класса четырехугольников $W(k, n)$ задачу 3, можем построить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1 \in W(k, n)$ с максимальным отношением его площади к площади описанного круга. Далее вокруг четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ можно описать круг K_1, который с помощью аффинного отображения, переводящего $A_1B_1C_1D_1$ в $ABCD$, преобразуется в искомый эллипс e.

3. ЭМП для произвольного многоугольника в случае, когда ровно три его вершины лежат на границе ЭМП. Пусть $M = A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный выпуклый многоугольник. Рассмотрим всевозможные треугольники $A_iA_jA_k$, порожденные вершинами этого многоугольника $(1 \leq i < j < k \leq n)$, и выберем треугольник BCD; наибольшей площади: $\left(\{B, C, D\} \subset \left\{A_j \,\middle|\, i = \overline{1, n}\right\}\right)$. Построим ЭМП e для треугольника BCD; если при этом весь многоугольник $M \subset e$, то e — ЭМП для всего многоугольника, ибо иначе существует ЭМП $e_1 = e(M)$ такой, что $S(e_1) < S(e)$. Поскольку треугольник $BCD \subset e_1$, то e не является ЭМП для треугольника BCD. Отсюда становится очевидным следующее утверждение.

Лема 2. *Пусть $M = A_1A_2 \ldots A_n$ — выпуклый многоугольник; BCD — треугольник наибольшей площади с вершинами, составленными из вершин многоугольника M, $e(BCD)$ — ЭМП для треугольника BCD. При этом, если многоугольник $M \subset e(BCD)$, тогда $e(BCD)$ является ЭМП для всего многоугольника M. Если же $A_iA_jA_k$ не является треугольником наибольшей площади среди всех треугольников, составленных из вершин $A_1A_2 \ldots A_n$, то ЭМП для этого треугольника не может быть ЭМП для всего многоугольника M.*

Теорема 3. *ЭМП для выпуклого многоугольника $M = A_1A_2 \ldots A_n$, граница которого имеет с многоугольником три общие точки, является ЭМП для треугольника, порожденного этими точками.*

Доказательство. Как показано ранее (см. теорему 1), граница ЭМП для многоугольника M имеет с M не менее трех общих точек. Докажем следующее утверждение.

Если некоторый эллипс содержит многоугольник M, имеет на своей границе ровно три вершины M и не является ЭМП для треугольника, порожденного этими вершинами, то он не будет ЭМП для M, поэтому можно построить эллипс меньшей площади, содержащий многоугольник M. Доказательство этого утверждения проведем методом от противного.

Предположим, что у многоугольника M граница ЭМП e содержит ровно три его вершины A, B, C. Проведем аффинное преобразование эллипса e в круг K так, что многоугольник M перейдет в многоугольник M', а треугольник ABC — в треугольник $A'B'C'$.

Пусть $B'C'$ — наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$. Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат, начало которой расположено в центре круга K, отрезок $B'C'$ будет параллелен оси абсцисс и расположен в нижней полуплоскости и K будет единичным кругом. В дальнейшем для сокращения обозначений опускаем штрихи у всех соответствующих элементов. Тогда вершины B и C имеют следующие координаты:

$$B(a, -b); \quad C(-a, -b); \quad a \in (0, 1]; \quad b \in [0, 1).$$

Случай тупоугольного треугольника ABC очевиден.

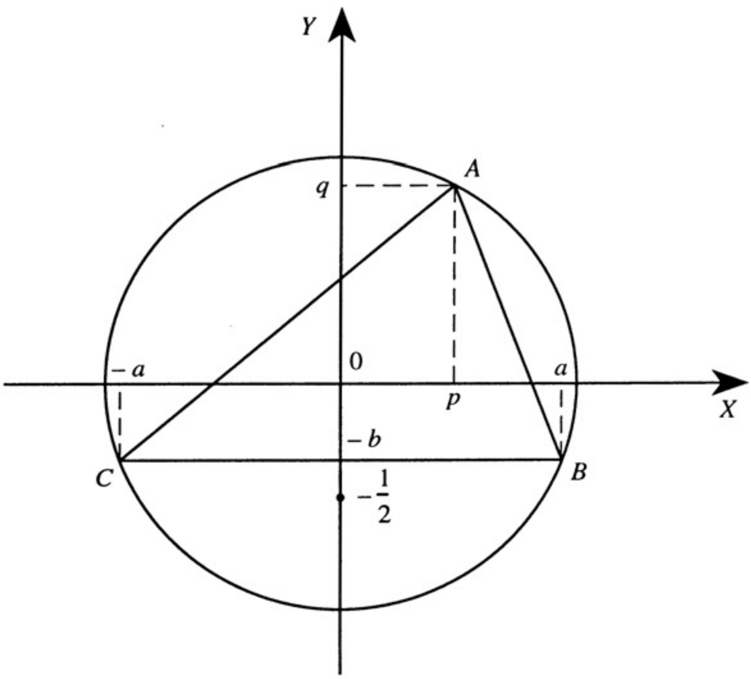

Рис. 3

Пусть теперь треугольник ABC не тупоугольный и его третья вершина A имеет координаты (p, q), $p \geq 0$, $q > 0$ (рис. 3). При этом выполняются следующие условия:

$$p^2 + q^2 = 1; \quad a^2 + b^2 = 1, \quad p < a, \quad q > b. \tag{14}$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$b < \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Действительно, если предположить, что $b > 1/2$, то против стороны BC будет лежать угол меньший $\pi/3$, а это противоречит тому, что сторона BC наибольшая в треугольнике ABC [5]; если же отрезок $b = 1/2$, то угол BAC равен $\pi/3$, треугольник ABC будет правильным, и круг K для него будет ЭМП [6], что противоречит нашему предположению.

Рассмотрим эллипс e_δ с центром в точке $(0, \delta)$, где $\delta > 0$, проходящий через вершины треугольника ABC и с осями, параллельными координатным прямым; уравнение его границы имеет вид

$$\left(\frac{x}{U}\right)^2 + \left(\frac{y-\delta}{V}\right)^2 = 1, \tag{16}$$

где U, V — неизвестные параметры, которые определяются из условия прохождения эллипса через вершины треугольника ABC.

Полагая $\alpha = \frac{1}{U^2}$ и $\beta = \frac{1}{V^2}$, находим

$$\beta = \frac{a^2 - p^2}{(q-\delta)^2 a^2 - p^2 (b+\delta)^2};$$

$$\alpha = \frac{(q-\delta)^2 - (b+\delta)^2}{(q-\delta)^2 a^2 - p^2 (b+\delta)^2}.$$

Заметим, что при достаточно малых $\delta > 0$ все вершины многоугольника M расположены внутри или на границе эллипса e_δ, поэтому параметры α и β будут положительные. Покажем, что при достаточно малых $\delta > 0$ $S(K) > S(e_\delta)$, или

$$S^2(K) = \pi^2 > S^2(e_\delta) = \pi^2 U^2 V^2 = \frac{\pi^2}{\alpha\beta}.$$

Таким образом, осталось показать, что $\alpha\beta > 1$ при достаточно малых положительных $\delta > 0$. Последнее неравенство равносильно следующему:

$$-2(q^2 - b^2)(q+b) > -4(b+q)(q^2 - b^2)(1 - qb),$$

или

$$2(q^2 - b^2)(q+b)(1 - 2bq) > 0.$$

В силу условий (14), (15) последнее неравенство примет вид $2bq < 1$, а это очевидно на основании неравенств $0 < q \le 1$; $0 \le b < 1/2$, которые доказаны ранее.

Следовательно, при достаточно малом $\delta > 0$ площадь эллипса e_δ меньше площади круга K, кроме того, при $\delta \to 0$

$$\alpha \to \frac{q^2 - b^2}{q^2 a^2 - p^2 b^2} = 1; \quad \beta \to \frac{a^2 - p^2}{q^2 a^2 - p^2 b^2} = 1,$$

поэтому эллипс e_δ стремится к кругу K в метрике Хаусдорфа. В силу нашего предположения на границе круга K лежит три вершины многоугольника M, а остальные расположены внутри, поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ на границе эллипса e_δ находится ровно три вершины многоугольника M, а остальные его вершины расположены внутри e_δ. Отсюда следует, что круг K не является ЭМП для многоугольника M, что противоречит построению круга K. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Вернемся к решению задачи 2. Пусть задан некоторый четырехугольник $ABCD \in W(k, n)$. Рассмотрим треугольники ABC, ABD, ACD, BCD. Выберем из них треугольник с наибольшей площадью. Пусть для определенности это будет треугольник ABC. Построим для него ЭМП (который обозначим $e(ABC)$). Если вершина D принадлежит эллипсу e, то задача построения ЭМП для четырехугольника $ABCD$ (а значит и для всего класса $W(k, n)$) решена, и искомым ЭМП будет эллипс e. Если же D не принадлежит e, то в силу леммы 2 и теоремы 3 ЭМП для четырехугольника $ABCD$ является эллипс, описанный вогруг этого четырехугольника и, таким образом, приходим к необходимости решения задачи 2а, которая решена в разделе 2. Задача 2 полностью решена.

1. *Хачиян Л. Ю.* Проблемы оптимальных алгоритмов в выпуклом программировании, декомпозиции и сортировке // Компьютер и задачи выбора. – 1989. – С. 161–205.
2. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1962. – 264 с.
3. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
4. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
5. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970. – 336 с.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

Получено 04.11.96