УДК 512.552.16

О. Д. Артемович (Нац. ун-т им Т. Шевченко, Киев)

О I-ЖЕСТКИХ И q-ЖЕСТКИХ КОЛЬЦАХ

We describe q-rigid rings having no simple noncommutative homomorphic images and I-rigid rings with periodic and mixed additive groups.

Описані q-жорсткі кільця, які не мають простих некомутативних гомоморфних образів, і I-жорсткі кільця з періодичною та змішаною адитивними групами.

1. Изучение жестких колец, т. е. колец, имеющих только тождественный и нулевой эндоморфизмы, началось в работе [1], в которой исследованы жесткие артиновы кольца, полное описание которых завершено в [2]. Позднее появились работы [3 – 10], посвященные различным аспектам жесткости колец. Например, в [7, 8] введены в рассмотрение и исследованы некоторые свойства I-жестких и q-жестких колец, т. е. колец, все собственные идеалы (соответственно все собственые фактор-кольца) которых являются жесткими. I-жесткие кольца конечного ранга изучались также в [9, 11].

В предлагаемой работе описаны q-жесткие кольца, не имеющие простых некоммутативных гомоморфных образов, и непростые периодические I-жесткие кольца. Показано, то I-жесткое кольцо со смешанной аддитивной группой является прямой суммой поля $\mathbb{Z}_p$ и жесткого поля характеристики 0.

Все рассматриваемые кольца ассоциативны и, как правило, содержат единицу. Обозначения: p — простое число; R^+ — аддитивная группа кольца R; $\mathcal{J}(R)$ — радикал Джекобсона кольца R; $\mathcal{F}(R) = \{ r \in R \mid nr = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \}$ — периодическая часть кольца R; $\mathcal{N}(R)$ — совокупность всех нильпотентных элементов кольца R; $\mathbb{Z}_{p^k}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^k ($k \in \mathbb{N}$); N_2 — такое кольцо, что $N_2^2 = 0$; N_2^+ — группа из двух элементов.

Кольцо R называется p-кольцом (соответственно периодическим кольцом или кольцом без кручения), если таковой является его аддитивная группа R^+. Все остальные используемые понятия и факты общеизвестны, и их можно найти, например в [12 – 14].

2. В работе [8] дано описание q-жестких нильпотентных колец и q-жестких артиновых полупростых колец. В этом пункте полностью описаны q-жесткие кольца с единицей, не имеющие простых некоммутативных гомоморфных образов.

Лемма 1. *Пусть q-жесткое кольцо удовлетворяет одному из условий:*

1) *R обладает единственным максимальным идеалом;*

2) *R — локальное кольцо;*

3) *R — прямая сумма двух жестких полей.*

Доказательство несложно и мы его опускаем.

Лемма 2. *Если R — непростое локальное q-жесткое кольцо характеристики p, то $R \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.5 работы [1] $R/\mathcal{J}(R) \cong \mathbb{Z}_p$ и, таким образом, $R = \mathcal{J}(R) + P$, где P — простое подкольцо кольца R, а значит, каждый элемент $r \in R$ единственным образом представляется в виде

$$r = j + z, \quad j \in \mathcal{J}(R), \quad z \in P. \tag{1}$$

Поскольку правило $\delta(r + I) = z + I$, где $r \in R$, z — элемент из разложения (1), определяет эндоморфизм $\delta : R/I \to R/I$ для любого идеала I кольца R, то $\mathcal{J}(R)$ — минимальный идеал кольца R и, как следствие, $\mathcal{J}(R)^2 = 0$, $\mathcal{J}(R) = aP$ для некоторого своего элемента a. Тогда $R = aP + P \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть R — непростое периодическое локальное q-жесткое кольцо. Тогда $R \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, $k \geq 2$, либо $R \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$.*

Доказательство. Поскольку R — периодическое локальное кольцо, то по предложению 2.4 [15] $\operatorname{char} R = p^k$ для некоторых положительного целого k и простого p. Если $k \geq 2$, то R/pR — жесткое кольцо с жесткими собственными фактор-кольцами, и тогда вследствие леммы 2 и теоремы 2.5 из [1] $R/pR \cong \mathbb{Z}_p$, откуда следует $\mathcal{J}(R) = pR$, $R = pR + P$, где $P \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, и, принимая во внимание лемму Накаямы, получаем $R \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Лемма доказана.

Напомним [16], что v-кольцом называется неразветвленное полное регулярное локальное кольцо без делителей нуля характеристики 0 размерности 1 с полем вычетов характеристики p.

Лемма 4. *Пусть R — непростое локальное q-жесткое кольцо без кручения. Тогда R принадлежит к одному из типов:*

1) *R — жесткое v-кольцо, т. е. R такое v-кольцо, что $R/pR \cong \mathbb{Z}_p$;*
2) *$R \cong L[x]/(x^2)$, где L — жесткое поле характеристики 0.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{char}(R/\mathcal{J}(R)) = p$ для некоторого простого p. Тогда R/pR — жесткое кольцо характеристики p с жесткими фактор-кольцами, и поэтому с учетом леммы 2 и теоремы 2.5 из [1] $R/pR \cong \mathbb{Z}_p$. Значит, $\mathcal{J}(R) = pR$. Понятно, что $p^kR \neq p^{k+1}R$, $k \in \mathbb{N}$, и согласно лемме 3 $R/p^kR \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Поскольку R без кручения, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} p^k R = 0$. Таким образом, R — жесткое v-кольцо [10].

Пусть теперь $\operatorname{char}(R/\mathcal{J}(R)) = 0$. По условию $\mathcal{J}(R) \neq 0$ и, значит, $R/\mathcal{J}(R)$ — поле. Семейство всех подполей кольца R, упорядоченное по включению, согласно лемме Цорна, имеет максимальный элемент L. Пусть $\pi: R \to R/\mathcal{J}(R)$ — естественый эпиморфизм. Если a — такой элемент из $R \setminus L$, что его образ $\pi(a)$ трансцендентный над $\pi(L)$, то легко показать, что кольцо многочленов $L[a]$ является полем. Поэтому поле $R/\mathcal{J}(R)$ алгебраично над $\pi(L)$. Пусть θ — какой-либо элемент из фактор-кольца $R/\mathcal{J}(R)$, лежащий вне $\pi(L)$, и $g(y) = y^n + \beta_1 y^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} y + \beta_n$ — минимальный многочлен элемента θ над полем $\pi(L)$. Тогда найдутся представители $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ в кольце R соответственно элементов $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n$ из $R/\mathcal{J}(R)$ и такой элемент $j \in \mathcal{J}(R)$, что многочлен

$$f(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n + j \in (\mathcal{J}(R) + L)[x]$$

имеет корень b такой, что $b + \mathcal{J}(R) = \theta$. Легко показать, что кольцо $L[b]$ изоморфно кольцу $\pi(L)[\theta]$, которое является полем. Отсюда получаем, что $\theta \in \pi(L)$, и, как следствие, $R = \mathcal{J}(R) + L$, а значит, каждый элемент $r \in R$ единственным образом представляется в виде

$$r = j + l, \quad j \in \mathcal{J}(R), \quad l \in L. \tag{2}$$

Пусть I — какой-либо идеал кольца R, $\overline{R} = R/I$. Вследствие (2) отображение $\mu: \overline{R} \to \overline{R}$, заданное по правилу $\mu(r+I) = l + I$, $r \in R$, является эндоморфизмом. Следовательно, $\mathcal{J}(R)$ — минимальный идеал кольца R и $\mathcal{J}(R)^2 = 0$. Однако тогда $\mathcal{J}(R) = aR = aL$ для некоторого своего элемента a и, таким образом, $R \cong L[x]/(x^2)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если R — локальное q-жесткое кольцо, то R без кручения либо p-кольцо.*

Доказательство. Предположим, что $0 \neq \mathcal{F}(R) \neq R$. Если аддитивная группа R^+ делима, то $\mathcal{F}(R)^+$ тоже делима. Если же $pR \neq R$ для некоторого простого p, то $\mathcal{J}(R) = pR$ и тогда $\mathcal{F}(R) \leq pR$. Отсюда следует, что и в этом случае $\mathcal{F}(R)^+$ — делимая группа и, следовательно,

$$R^+ = \mathcal{F}(R) \oplus T \text{ —} \tag{3}$$

прямая сумма группы $\mathcal{F}(R)$ и группы T без кручения. Кроме этого, $\mathcal{F}(R)^2 = 0$.

Если группа T делима, то вследствие леммы 4 $R/\mathcal{F}(R)$ — жесткое поле характеристики 0, а это противоречит лемме 2.3 из [15]. Поэтому группа T не является делимой. Пусть $e \in T$ и e — прообраз единицы фактор-кольца $R/\mathcal{F}(R)$. Тогда всякий элемент $t \in T$ записывается в виде $t = le$, где $l = k_0 + k_1 p + \ldots + k_n p^n$ — целое число, причем $0 \leq k_i \leq p-1$, $i = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что T — кольцо. Кроме этого, вследствие (3) каждый элемент $r \in R$ представляется единственным образом в виде $r = f + t$, где $f \in \mathcal{F}(R)$, $t \in T$. Тогда отображение $\theta: R \to R$, где $\theta(r) = t$, индуцирует нетривиальный эндоморфизм в фактор-кольце R/I, где I — идеал, отличный от $\mathcal{J}(R)$, а это невозможно.

Таким образом, аддитивная группа R^+ локального q-жесткого кольца R не является смешанной. Лемма доказана.

Из лемм 1 – 5 и работы [8] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть R — кольцо с единицей. Тогда R — q-жесткое кольцо, если и только если оно принадлежит к одному из типов:*

1) R — поле;
2) *R — q-жесткое кольцо, имеющее некомутативный простой гомоморфный образ;*
3) *R — прямая сумма двух жестких полей;*
4) $R \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, $k \in \mathbb{N}$;
5) $R \cong L[x]/(x^2)$, *где L — жесткое поле характеристики* 0;
6) $R \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2)$;
7) *R — жесткое v-кольцо, т. е. такое v-кольцо, что $R/pR \cong \mathbb{Z}_p$.*

3. Всякое простое кольцо является I-жестким. Некоторые свойства I-жестких колец исследованы в [7]. В частности, I-жесткое кольцо, содержащее ненулевой несущественный идеал, является прямой суммой двух жестких полей. Поэтому ниже ограничимся рассмотрением непростых колец, все ненулевые идеалы которых существенны. Коммутативные I-жесткие неделимые кольца R без кручения с аддитивной группой R^+ конечного ранга (Прюфера) охарактеризованы в [11] (теорема 3.7).

Лемма 6. *Ненулевой ниль-идеал непростого I-жесткого кольца R, все ненулевые идеалы которого существенны, изоморфен N_2.*

Доказательство. Пусть S — ненулевой ниль-идеал непростого I-жесткого кольца R, все ненулевые идеалы которого существенны. Тогда S не имеет ненулевых дифференцирований [4], а следовательно, S — коммутативный идеал, и ввиду теоремы 2 [2] $i^2 = 2i = 0$ для всякого элемента $i \in S$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* R *— непростое периодическое* I*-жесткое кольцо, все ненулевые идеалы которого существенны. Тогда* R *принадлежит к одному из типов:*

1) $R \cong \mathbb{Z}_4$;

2) $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$.

Доказательство. Понятно, что R^+ — p-группа для некоторого простого p. Пусть $\mathcal{N}(R) = 0$. Тогда $\operatorname{char} R = p$ и для любых элементов $j, k \in \mathcal{J}(R)$ имеем

$$(1-j)^{-1} k (1-j) \in \mathcal{J}(R),$$

поэтому $jk = kj$ и идеал $\mathcal{J}(R)$ коммутативный. Отображение $\sigma : \mathcal{J}(R) \to \mathcal{J}(R)$, где $\sigma(j) = j^p$, определяет эндоморфизм идеала $\mathcal{J}(R)$, а значит, $j^p = j$ для всех элементов $j \in \mathcal{J}(R)$. Ввиду этого радикал Джекобсона $\mathcal{J}(R)$ содержится во всяком первичном идеале кольца R и, следовательно, состоит из строго нильпотентных элементов кольца R [17, с. 92]. Вследствие сделанного предположения $\mathcal{J}(R) = 0$. Тогда, учитывая предложение 3, теоремы 3 и 5 из [7], получаем, что R — правое и левое кольцо Голди характеристики 0. Поскольку это противоречит условию леммы, то $\mathcal{N}(R) \neq 0$.

Легко показать, что всякий нильпотентный элемент централен, и, принимая во внимание лемму 6, $\mathcal{N}(R) \cong N_2$, а значит, $p = 2$. Поскольку идеал $\mathcal{J}(R)$ коммутативный, то, как и выше, легко показать, что $\mathcal{J}(R) \cong N_2$.

Если M_1, M_2 — различные максимальные левые идеалы кольца R, то они коммутативные, и отображение $\sigma_i : M_i \to M_i$, $\sigma(m_i) = m_i^2$, где $m_i \in M_i$, является эндоморфизмом идеала M_i, $i = 1, 2$. Вследствие жесткости имеем, например, $m_1 = m_1^2$ для всякого $m_1 \in M_1$, а это невозможно. Поэтому R — локальное кольцо и $\operatorname{char} R = 2^m$ для некоторого целого m [15]. Если $m \geq 2$, тогда $\mathcal{J}(R) = \{x \in R \mid \text{порядок } x \leq 2\}$ — единственная подгруппа порядка 2 группы R^+, и поэтому [18] (теорема 12.5.2) R^+ — циклическая группа порядка 4 и $R \cong \mathbb{Z}_4$.

Если же $m = 1$, то R — равнохарактеристическое артиново локальное кольцо и вследствие теоремы Коэна [16] $R = \mathcal{J}(R) + K$, где K — поле представителей кольца R. Кроме этого, $K \cong \mathbb{Z}_2$, и, как следствие, $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$. Лемма доказана.

Следующая лемма легко следует из [7].

Лемма 8. *Пусть* R *— непростое кольцо без кручения, все ненулевые идеалы которого существенны. Если* R *—* I*-жесткое кольцо, то* R *— левое и правое кольцо Голди без делителей нуля характеристики* 0 *(а следовательно, имеет тело частных). Кроме этого,*

1) *если аддитивная группа* R^+ *неделима, то кольцо* R *само жесткое;*

2) *если* $\mathcal{J}(R) \neq 0$, *то кольцо* R *коммутативное.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}(R)$ идеал в R, на основании леммы 6 $\mathcal{N}(R) = 0$. Однако тогда вследствие предложения 3, теорем 3 и 5 из [7], R — правая и левая область Голди характеристики 0. Согласно теореме 9.9 из [13] R имеет тело частных.

Если $pR \neq R$ и φ — нетривиальный эндоморфизм кольца R, то ограничение φ на идеале pR является нетривиальным эндоморфизмом идеала pR. Из этого замечания следует утверждение 1. Утверждение 2 легко получить на основании теоремы 2.4 из [1]. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть R — непростое кольцо с единицей. Тогда R — I-жесткое кольцо, если и только если R принадлежит к одному из типов:*

1) $R \cong \mathbb{Z}_4$;
2) $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;
3) $R \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$;
4) *R — I-жесткая левая и правая область Голди характеристики* 0;
5) $R \cong S \oplus T$, *где S, T — жесткие поля характеристики* 0;
6) $R \cong \mathbb{Z}_p \oplus S$, *где S — жесткое поле характеристики* 0.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть R — I-жесткое кольцо. Если адитивная группа R^+ периодическая, то согласно лемме 7 и вследствие [7] R — кольцо одного из типов 1) – 3). Если же R^+ без кручения, то R — типов 4) – 5). Поэтому предположим, что $0 \neq \mathcal{F}(R) \neq R$. Тогда $\mathcal{F}(R)$ — жесткое p-кольцо для некоторого простого p. Если $\mathcal{N}(R) \neq 0$, то ввиду леммы 6 $p = 2$. Кроме этого, идеал $\mathcal{F}(R)$ коммутативен и, следовательно, правило $\sigma(f) = f^2$, где $f \in \mathcal{F}(R)$, определяет эндоморфизм $\sigma: \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(R)$. Принимая во внимание жесткость идеала $\mathcal{F}(R)$, получаем $\mathcal{F}(R) \cong N_2$. Тогда по предложению 27.1 [19] имеем

$$R^+ = \mathcal{F}(R) \oplus K \tag{4}$$

для некоторой группы без кручения K. Отсюда следует, что $(2R) \cap \mathcal{F}(R) = 0$, а это приводит к противоречию. Пусть теперь $\mathcal{N}(R) = 0$. Тогда $\mathcal{F}(R)^+$ — группа экспоненты p и в силу предложения 27.1 [19] также имеет место разложение (4). Тогда $(pR) \cap \mathcal{F}(R) = 0$ и, как следствие, $R = \mathcal{F}(R) \oplus (pR)$ — прямая сумма полей. Ввиду теоремы 2.5 из [1] $\mathcal{F}(R) \cong \mathbb{Z}_p$ и R — кольцо типа 6). Теорема доказана.

1. *Maxson C. J.* Rigid rings // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1978. – **21**. – P. 95–101.
2. *McLean K. R.* Rigid Artinian rings // Ibid. – 1982. – **25**. – P. 97–99.
3. *Артемович О. Д.* О связи жестких и АДТ-колец // Тез. сообщ. 17 Всесоюз. алгебр. конф. – Минск: Ин-т математики АН БССР, 1983. – Ч.2. – С. 5.
4. *Артемович О. Д.* Про ідеально-диференціальні і досконалі жорсткі кільця // Допов. АН УРСР. Сер. фіз.-мат. – 1985. – №4. – С. 3–5.
5. *Фригер М. Д.* О жестких кольцах без кручения. – Кемерово, 1985. – 14 с. Деп. в ВИНИТИ, №6023-85.
6. *Фригер М. Д.* О жестких кольцах без кручения // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, №3. – С. 217–219.
7. *Suppa M. A.* Sugli anelli *I*-rigidi // Boll. Unione mat. ital. – 1985. – **D4**, №1. – P. 145–152.
8. *Suppa M. A.* Sugli anelli I-rigidi // Riv. mat. Univ. Parma. – 1986. – **12**, – P. 121–125.
9. *Friger M. D.* Torsion-free rings: some results on automorphisms and endomorphisms // Contemp. Math. – 1995. – P. 111–115.
10. *Artemovych O. D.* Differentially trivial and rigid rings of finite rank // Ring Theory Conf. Abstracts (Miskolc, Hungary, July 15–20). – Miskolc, 1996. – P. 3–4.
11. *Friger M. D.* Strongly rigid and *I*-rigid rings // Communs Algebra. – 1994. – **22**, №5. – P. 1833–1842.
12. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – М.: Мир, 1972. – 160 с.
13. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории: В 2-х т. – М.: Мир, 1977. – Т.1. – 688 с.
14. *Общая* алгебра / Под ред. Л. А. Скорнякова: В 2-х т. – М.: Наука, 1990. – Т.1. – 592 с.
15. *Feigelstock S.* The additive groups of local rings // Ark. Math. – 1980. – **18**, №1. – P. 49–51.
16. *Cohen I. S.* On the structure and ideal theory of complete local rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1946. – **59**, №1. – P. 54–106.
17. *Ламбек И.* Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 278 с.
18. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
19. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2-х т. – М.: Мир, 1974. – Т.1. – 336 с.

Получено 13.09.96