УДК 517.549.8

А. Р. Бечелова (Кабардино–Балк. ун-т, Нальчик)

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

For a fractional order equation of diffusion, a difference scheme of approximation of order $O(h^2+\tau)$ is constructed. The algorithm is given for the solution of boundary-value problems for the generalized fractional order equation of diffusion.

Для рівняння дифузії дробового порядку побудовано різницеву схему апроксимації порядку $O(h^2+\tau)$. Наведено алгоритм розв'язання крайових задач для узагальненого рівняння переносу дробового порядку.

1. В области $Q_T \equiv \{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим задачу [1–3]

$$D_{0t}^{1-\alpha}u = Lu + f(x,t), \qquad Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x,t)u, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0} u(x,t)t^{1-\alpha} = 0, \tag{3}$$

где

$$D_{0t}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \text{ —}$$

дробная производная в смысле Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$,

$$k \ge c_1 > 0, \qquad q(x,t) \ge 0.$$

При $t=0$ условие (3) можно записать иначе:

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\big|_{t=0} = 0,$$

или

$$D_{0t}^{\alpha-1}u\big|_{t=0} = D_{0t}^{-(1-\alpha)}u\big|_{t=0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\bigg|_{t=0}. \tag{4}$$

В классе достаточно гладких функций условия (3) и (4) эквивалентны.

Разрешимость задачи (1)–(3) для уравнения с постоянными коэффициентами можно провести методом разделения переменных [4]. В общем случае вопрос о существовании решения задачи (1)–(3) остается открытым. Единственность следует из априорной оценки [5]

$$\|u_x\|_{2,Q_T} \le M\|f\|_{2,Q_T}, \tag{5}$$

где

$$\|u\|_{2,Q_T}^2 = \int_0^T \|u\|_0^2\,d\tau;$$

$$\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx.$$

2. Перейдем к построению разностных схем для решения задачи (1)–(3). В $\overline{Q}_T$ введем сетку

$$\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau);\ i = 0,1,\dots,N;\ j = 0,1,\dots,j_0\}$$

с шагами $h = 1/N$, $\tau = \dfrac{T}{j_0}$, где

$$\overline{\omega}_h = \{ x_i = i\,h\colon i = 0, 1, \ldots, N\};$$
$$\overline{\omega}_\tau = \{ t_j = j\,\tau)\colon j = 0, 1, \ldots, j_0\}.$$

Предположим, что задача (1)–(3) имеет единственное регулярное в области Q_T решение. Тогда в классе достаточно гладких функций решение уравнения (1) удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$.

Последнее подробно доказано в [6]. Исходя из изложенного, дифференциальной задаче (1)–(3) ставим в соответствие разностную схему

$$\Delta_{0t}^{\alpha}\, y = \Lambda\,(\sigma\,\hat{y} + (1-\sigma)\,y) + \varphi, \tag{6}$$
$$y_0 = y_N = 0, \qquad y\,(x, 0) = 0, \tag{7}$$
$$\Lambda_y = (a(\bar{t})\,y_{\bar{x}})_x - d\,(\bar{t}\,)y; \quad \varphi = f\,(x, \bar{t}\,),$$
$$\Delta_{0t_j}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma\,(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{j+1} \left(t_{j-s+2}^{1-\alpha} - t_{j-s+1}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t},s},$$
$$y_{\bar{t},\,s} = \frac{y^s - y^{s-1}}{\tau}, \qquad \hat{y} = y^{j+1}; \qquad y = y^j; \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$$

С помощью разложения Тейлора можно убедится, что справедлива формула

$$\Delta_{0t}^{\alpha}\, u = D_{0t}^{\alpha}\, u + O\,(\tau).$$

Обозначим $z = y - u$, тогда для погрешности z получим задачу

$$\Delta_{0t}^{\alpha}\, z = \Lambda\,(\sigma\,\hat{z} + (1-\sigma)\,z) + \psi,$$
$$z_0 = z_N = 0, \qquad z\,(x, 0) = 0, \tag{8}$$

где

$$\psi = \Lambda\,(\sigma\,\hat{u} + (1-\sigma)u) + \varphi - \Delta_{0t}^{\alpha}\, u = O\,(h^2 + \tau).$$

Последняя оценка выполняется при условии, что $k \in C^3[0, 1]$, $q, f \in C^2[0, 1]$ при каждом фиксированном t.

3. Чтобы доказать устойчивость и сходимость разностной схемы (6), (7), перепишем ее в виде

$$\frac{\sigma a_i \tau}{h^2}\, y_{i-1}^{j+1} = \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau d_i \tau + \frac{(a_i + a_{i+1})\sigma\tau}{h^2} \right) y_i^{j+1} +$$
$$+ \frac{\sigma a_{i+1}\tau}{h^2}\, y_{i-1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{9}$$

где

$$F_i = \frac{1}{\Gamma\,(2-\alpha)} \Big[\left(-t_{j+1}^{\,1-\alpha} + 2t_j^{\,1-\alpha} - t_{j-1}^{\,1-\alpha} \right) y_i^1 +$$
$$+ \left(-t_j^{\,1-\alpha} + 2t_{j-2}^{\,1-\alpha} - t_{j-2}^{\,1-\alpha} \right) y_i^2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(-t_3^{\,1-\alpha} + 2t_2^{\,1-\alpha} - t_1^{\,1-\alpha} \right) y_i^{j-1} \Big] + \frac{(1-\sigma)a_i\tau}{h^2}\, y_i^j +$$
$$+ \left(\frac{-t_2^{\,1-\alpha} + 2t_1^{\,1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - (1-\sigma)d_i\tau - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\,(a_i + a_{i+1}) \right) y_i^j +$$
$$+ \frac{(1-\sigma)\tau a_{i+1}}{h^2}\, y_{i+1}^j + \varphi_i^j\,\tau.$$

Поскольку

$$-t_{j+1}^{1-\alpha} + 2t_j^{1-\alpha} - t_{j+1}^{1-\alpha} > 0 \qquad \forall j \geq 0,$$

при выполнении условия

$$\tau^\alpha \leq \frac{\left(2-2^{1-\alpha}\right)h^2}{\Gamma(2-\alpha)(1-\sigma)(2c_2+c_3h^2)}, \tag{10}$$

$$0 < c_1 \leq k \leq c_2; \qquad 0 \leq q \leq c_3,$$

находим

$$\left|F_i^j\right| \leq \frac{\left(2^{1-\alpha}-1\right)\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \max_{0\leq k\leq j-1}\left\|y^k\right\|_C +$$

$$+ \left(\frac{\left(2-2^{1-\alpha}\right)\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - (1-\sigma)\,d\tau\right)\left\|y^j\right\|_C + \left\|\varphi^j\right\|_C\tau \leq$$

$$\leq \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma d\tau\right)\max_{0\leq k\leq j}\left\|y^k\right\|_C + \left\|\varphi^j\right\|_C\tau. \tag{11}$$

Пользуясь известной оценкой [7]

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C \leq \left\|\frac{F}{D}\right\|_C, \qquad D = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma d\tau > 0,$$

получаем

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C \leq \left\|y^0\right\|_C + \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha \max_{0\leq k\leq j'}\left\|\varphi^k\right\|_C. \tag{12}$$

Применяя оценку (12) к задаче для погрешности (8), находим

$$\left\|z^{j+1}\right\|_C \leq M\,(h^2+\tau^\alpha).$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $k(x,t)\in C^3[0,1]$; $q, f \in C^2[0,1]$ *при каждом фиксированном* t *и выполнено условие* (10). *Тогда решение разностной задачи* (6), (7) *сходится в равномерной метрике к решению дифференциальной задачи* (1) – (3) *со скоростью* $O(h^2+\tau^\alpha)$.

1. *Чукбар К. В.* Стохастический перенос и дробные производные // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1995. – **108**, Вып. 5. – С. 1875–1884.
2. *Нигматуллин Р. Р.* Решение обобщенного уравнения переноса в среде с фрактальной геометрией // Phys. stat. sol. – 1986. – **133**. – P. 38 – 43.
3. *Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков-Лафишев М. Х.* Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Докл. АМАН. – 1996. – **2**, № 1. – С. 43 – 46.
4. *Геккиева С.* Краевая для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Там же. – 1994. – **1**, № 1.– С. 17 – 19.
5. *Бечелова А. Р.* Построение разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для уравнения диффузии дробного порядка // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.– Киев, 1996. – С. 40 – 41.
6. *Шхануков-Лафишев М. Х., Бечелова А. Р.* Замечания к постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными // Там же. – Киев, 1996. – С. 286 – 287.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Получено 07.07.97

УДК 517. 9

А. Л. Лапшин (Киев. нац. эконом. ун-т)

ФИЛЬТРАЦИЯ И УПРЕЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ КОНЕЧНОЗНАЧНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

We obtain an equation of optimal filtration for processes of the Markov random evolution, which is a solution of systems of linear differential equations with the Markov switchings.

Одержано рівняння оптимальної фільтрації для процесів марковської випадкової еволюції, що є розв'язком систем лінійних диференціальних рівнянь з марковськими перемиканнями.

Рассматривается задача оценки случайного соостояния для системы, которая описывается системой линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от марковского конечнозначного процесса.

1. Класс рассматриваемых стохастических процессов. Рассматривается стохастический процесс с непрерывным временем, описываемый уравнением

$$dX(t) = A(t,\zeta(t))\,X(t)\,dt + B(t,\zeta(t))\,dW(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\zeta(t)$ — марковский конечнозначный случайный процесс, принимающий значения $\theta_1, \ldots, \theta_q$.

Вероятности

$$p_k(t) = P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, p_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{3}$$

Предполагаем выполнение известных условий [1]

$$\alpha_{ks} \geq 0, \quad k \neq s; \quad \alpha_{kk} \leq 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ks}(t) = 0$$

и пусть вектор $W(t)$ является вектором стохастических процессов с некоррелируемыми приращениями, ковариация которого равна $R\,dt$, т. е. математическое ожидание $\left\langle dW(t)\,dW^*(t) \right\rangle = R\,dt$.

Пусть $Y(t)$ — l-мерный вектор наблюдаемых выходных переменных, определяемый системой уравнений

$$dY(t) = H(t,\zeta(t))\,X(t)\,dt + G(t,\zeta(t))\,dV(t), \tag{4}$$

где $\det G(t,\zeta(t)) \neq 0$.

Вектор $V(t)$ имеет размерность l и является вектором стохастических процессов с некоррелируемыми приращениями, ковариация которого равна $S\,dt$, где $S = S^* > 0$. Предполагаем, что векторы $W(t)$, $V(t)$ взаимно не коррелируемы и не коррелированы с $X(0)$.

2. Вывод уравнений задачи восстановления. Введем линейную оценку вектора состояния системы (1), которая определяется системой стохастических дифференциальных уравнений

$$d\hat{X}(t) = A(t,\zeta(t))\,\hat{X}(t)\,dt + K(t,\zeta(t))\big(dY(t) - H(t,\zeta(t))\,\hat{X}(t)\,dt\big);$$

$$\hat{X}(0) = \langle X(0) \rangle \equiv M(0). \tag{5}$$

Ошибка оценки $\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений

$$d\tilde{X}(t) = (A(t,\zeta(t)) - K(t,\zeta(t))\,H(t,\zeta(t)))\,\tilde{X}(t)\,dt + B(t,\zeta(t))\,dW(t) - \\ - K(t,\zeta(t))\,G(t,\zeta(t))\,dV(t). \tag{6}$$

Введем обозначение для матриц вторых моментов

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) \right\rangle = D(t);$$

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) \,\middle|\, \zeta(t) = \theta_k \right\rangle P\{\zeta(t) = \theta_k\} = D_k(t), \quad k = 1, \dots, q. \tag{7}$$

Используем частные математические ожидания

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_k \right\rangle P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, \dots, q.$$

Вычислим значение матрицы

$$D_k(t+dt) = \left\langle \tilde{X}(t+dt)\,\tilde{X}^*(t+dt),\ \zeta(t+dt) = \theta_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \left\langle \left(\tilde{X}(t) + d\tilde{X}(t)\right)\left(\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}^*(t)\right).\ \zeta(t+dt) = \theta_k,\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \left\langle \left(\tilde{X}(t) + d\tilde{X}(t)\right)\left(\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}^*(t)\right),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle P\left\{\zeta(t+dt) = \theta_k \,\middle|\, \zeta(t) = \theta_s\right\} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} (\delta_{ks} + \alpha_{ks}(t)\,dt) \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + \tilde{X}(t)\,d\tilde{X}^*(t) + \right. \\ \left. + d\tilde{X}(t)\,d\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$A_s(t) \equiv A(t,\theta_s); \quad B_s(t) \equiv B(t,\theta_s); \quad H_s(t) \equiv H(t,\theta_s); \\ G_s(t) \equiv G(t,\theta_s), \quad s = 1, \dots, q.$$

Из системы уравнений (8) находим асимптотические при $dt \to 0$ равенства

$$D_k(t+dt) = \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,\tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t)\,dt + \right. \\ + B_k(t)\,dW(t)\,\tilde{X}^*(t) - K_k(t)\,G_k(t)\,dV(t)\,\tilde{X}^*(t) + \\ + \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t)(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t))\,dt + \tilde{X}(t)\,dW^*(t)\,B_k^*(t) - \\ - \tilde{X}(t)\,dV^*(t)\,G_k^*(t)\,K_k^*(t) + B_k(t)\,dW(t)\,dW^*(t)\,B_k^*(t) + \\ \left. + K_k(t)\,G_k(t)\,dV(t)\,dV^*(t)\,G_k^*(t)\,K_k(t),\ \zeta(t) = \theta_k \right\rangle + \\ + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,dt \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle + O(dt^2), \quad k = 1, \dots, q,$$

которые можно переписать в виде

$$D_k(t+dt) = D_k(t) + (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,D_k(t)\,dt + \\ + D_k(t)\left(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t)\right)dt + B_k(t)\,p_k(t)\,R\,B_k^*(t) + \\ + K_k(t)\,G_k(t)\,p_k(t)\,S\,G_k^*(t)\,K_k^*(t)\,dt + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,D_s(t)\,dt + O(dt^2), \quad k = 1, \dots, q.$$

При $dt \to 0$ приходим к системе матричных дифферениальных уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,D_k(t) + D_k(t)\left(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t)\right) + \\ + B_k(t)\,p_k(t)\,R\,B_k(t) + K_k(t)\,G_k(t)\,p_k(t)\,S\,G_k^*(t)\,K_k^*(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,D_s(t), \tag{9} \\ k = 1, \dots, q.$$

При этом выполнено равенство

$$\left\langle \tilde{X}(t)\, \tilde{X}^*(t) \right\rangle = D(t) = \sum_{k=1}^{q} D_k(t).$$

3. Построение оптимального наблюдателя. Чтобы минимизировать матрицу $D(t)$, минимизируем правые части системы уравнений, используя матрицы $K_k(t)$. Необходимые условия минимума имеют вид

$$-D_k(t)\, H_k^*(t)\, \delta K_k^*(t) + p_k(t)\, K_k(t)\, G_k(t)\, S\, G_k^*(t)\, \delta K_k^*(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, q, \tag{10}$$

откуда находим выражения для матриц

$$K_k(t) = D_k(t)\, H_k^*(t) \left(G_k(t)\, p_k(t)\, S\, G_k^*(t) \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{11}$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (9), получаем систему уравнений Риккати

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)\, D_k(t) + D_k(t)\, A_k^*(t) + p_k(t)\, B_k(t)\, R\, B_k^*(t) -$$

$$- D_k(t)\, H_k(t) \left(G_k(t)\, p_k(t) S\, G_k^*(t) \right)^{-1} H_k(t)\, D_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\, D_s(t), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{12}$$

которая определяет изменение матриц вторых частных моментов $D_k(t)$. Для системы уравнений (12) можно использовать начальные значения $D_k(0) = D(0)\, p_k(0)$, $k = 1, \ldots, q$.

Интегрируя систему уравнений (12), находим явное выражение для матриц $K_k(t)$, $k = 1, \ldots, q$, входящих в систему стохастических дифференциальных уравнений (5).

4. Задача оптимальной фильтрации для стационарных систем. Рассмотрим стационарный случай, когда система уравнений (1), (4) имеет вид

$$dX(t) = A(\zeta(t))\, X(t)\, dt + B(\zeta(t))\, dW(t); \tag{13}$$

$$dY(t) = H(\zeta(t))\, X(t)\, dt + G(\zeta(t))\, dV(t). \tag{14}$$

Полагаем $A_s = A(\theta_s)$; $B_s = B(\theta_s)$; $H_s = H(\theta_s)$; $G_s = G(\theta_s)$, $s = 1, \ldots, q$.

Предполагаем, что $\zeta(t)$ — однородный марковский процесс, определяемый системой уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, p_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{15}$$

Предполагаем также эргодичность марковского процесса $\zeta(t)$, т. е. существование пределов

$$p_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t), \qquad k = 1, \ldots, q, \tag{16}$$

не зависящих от начальных значений $p_k(t)$, $k = 1, \ldots, q$.

Система уравнений (11), (12) принимает вид

$$K_k(t) = D_k(t)\, H_k^*(t) \left(p_k\, G_k\, S\, G_k^* \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, q; \tag{17}$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)\, D_k(t) + D_k(t)\, A_k^* + p_k\, B_k\, R\, B_k^* -$$

$$- D_k(t)\, H_k(t) \left(G_k\, p_k\, S\, G_k^* \right)^{-1} H_k\, D_k + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, D_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{18}$$

Пусть существуют пределы

$$D_k = \lim_{r\to+\infty} D_k(t), \qquad D_k \ge 0, \quad k = 1, \dots, q. \tag{19}$$

Эти матрицы удовлетворяют системе матричных алгебраических уравнений второго порядка:

$$A_k D_k + D_k A_k^* + p_k B_k R B_k^* - D_k H_k \left(p_k G_k S G_k^* \right) H_k D_k + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_k = 0.$$

При этом можно выбрать постоянные матрицы $K_k = D_k H_k^* \left(p_k G_k S G_k^* \right)^{-1}$, $k = 1, \dots, q$, в системе дифференциальных уравнений (5)

$$d\hat{X}(t) = A(\zeta(t))\, \hat{X}(t) dt + K(\zeta(t))\,(dY(t) - H(\zeta(t)))\, \hat{X}(t) dt.$$

5. Асимптотическое поведение исследуемых процессов. Рассмотрим систему уравнений (6) при $K(t, \zeta(t)) \equiv 0$

$$d\hat{X}(t) = A(t, \zeta(t))\, \tilde{X}(t) dt + B(t, \zeta(t))\, dW(t). \tag{20}$$

Эта система совпадает с системой уравнений (1). При этом из (9) находим математическое ожидание

$$D(t) = \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} D_k(t),$$

где матрицы $D_k(t)$ определяются системой матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t) D_k(t) + D_k(t) A_k^*(t) + p_k B_k(t) R B_k^*(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) D_s(t), \quad k = 1, \dots, q. \tag{21}$$

Систему уравнений (21) можно использовать для изучения системы линейных дифференциальных уравнений со случайными марковскими коэфициентами и случайным входом. В стационарном случае получим систему уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k(t) A_k^* + p_k B_k R B_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s(t), \qquad k = 1, \dots, q. \tag{22}$$

В случае асимптотической устойчивости решений системы уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k(t) A_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s(t), \quad k = 1, \dots, q,$$

для предельных значений D_k, $k = 1, \dots, q$ (19), получим систему матричных уравнений

$$A_k D_k + D_k A_k^* + p_k B_k R B_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s = 0;$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle = D = \sum_{k=1}^{q} D_k. \tag{23}$$

Эту систему уравнений можно использовать для синтеза оптимального управления [2].

1. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
2. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 260 с.

Получено 26.02.97

УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

The rate of convergence of the Tayler series is studied for functions from the classes $A^{\psi}H_p$, $p = 1, \infty$, in uniform and integral metrics.

Досліджується швидкість збіжності ряду Тейлора для функцій із класів $A^{\psi}H_p$, $p = 1, \infty$, в рівномірній та інтегральних метриках.

1. Нехай A — множина всіх функцій, аналітичних у крузі $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < < 1 \}$;

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad z \in D, \tag{1}$$

— розклад в ряд Тейлора функції $f \in A$; $S_n(f; z)$ — частинна сума порядку n ряду (1); $r_n(f; z) = f(z) - S_n(f; z)$ — залишок порядку n ряду (1).

Як завжди, через $B^{(r)}$ (відповідно $H^{(r)}$), $r \in \mathbb{N}$, позначається клас функцій $f \in A$, r-ті похідні яких задовольняють умову

$$\| f^{(r)} \|_{\infty} := \sup_{z \in D} | f^{(r)}(z) | \leq 1$$

$$\left(\| f^{(r)} \|_1 := \sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f^{(r)}(\rho e^{it}) | \, dt \leq 1 \right).$$

В роботах [1, 2] досліджено швидкість збіжності рядів Тейлора функцій із класів $B^{(r)}$ і $H^{(r)}$. В даній роботі наводиться один результат, який є узагальненням результатів цих робіт на інші класи функцій, аналітичних у крузі D.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина опуклих, спадних до нуля додатних функцій. Будемо позначати через $A^{\psi}H_{\infty}$, $\psi = \psi(t) \in \mathfrak{M}$ (відповідно $A^{\psi}H_1$) множину функцій $f \in A$, з рядом Тейлора (1), для яких ряд

$$f^{\psi}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} c_k z^k$$

зображає в крузі D функцію простору H_{∞} із скінченною нормою $\| \cdot \|_{\infty}$ (відповідно функцію простору H_1 із скінченною нормою $\| \cdot \|_1$). Таким чином, $f \in \in A^{\psi}H_{\infty}$ ($A^{\psi}H_1$), якщо

$$\| f^{\psi} \|_{\infty} < \infty \qquad (\| f^{\psi} \|_1 < \infty).$$

Якщо ж $\| f^{\psi} \|_{\infty} \leq 1$ ($\| f^{\psi} \|_1 \leq 1$), то пишемо $f \in H_{\infty}^{\psi}$ (H_1^{ψ}).

Розглянемо приклад. Нехай $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$, $r > 0$, де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера. Тоді для кожної функції $f \in H_{\infty}^{\psi}$ (H_1^{ψ}) функція

$$g(z) := z^{[r]} f(z) + P_{[r]-1}(z),$$

де $[r]$ — ціла частина числа r, $P_{[r]-1}(z)$ — довільний многочлен степеня $[r]-1$, належить класу $B^{(r)}$ $(H^{(r)})$, в якому під виразом $g^{(r)}(\cdot)$ слід розуміти дробову похідну за Ріманом – Ліувіллем. Таким чином, легко встановлюється зв'язок між класами H_∞^ψ (H_1^ψ) і $B^{(r)}$ $(H^{(r)})$.

Зазначимо, що класи $A^\psi H_\infty$ $(A^\psi H_1)$ є аналогами класів $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ (2π-періодичних функцій), введених О. І. Степанцем [3]. Тому, як і слід було очікувати, результат цієї роботи виявився цілком аналогічним до відомих результатів про збіжність рядів Фур'є на класах $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ [3].

2. Далі будемо використовувати позначення: $D_\rho = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < \rho \}$, $\|f\|_{\infty,\rho} = \sup\limits_{z \in D_\rho} |f(z)|$; $\|f\|_{1,\rho} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|\, dt$;

$$E_n(f)_{p,\rho} = \inf_{P_{n-1}} \|f(\cdot) - P_{n-1}(\cdot)\|_{p,\rho},$$

де $p = 1, \infty$ і нижня грань береться по множині всіх многочленів степеня $\leq n - 1$;

$$R_n(\mathfrak{A})_{p,\rho} = \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho}, \quad p = 1, \infty, \quad \mathfrak{A} \subset A.$$

Згідно з [3] покладемо: $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$;

$$\mathfrak{M}_C = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \; 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 \};$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \; \mu(\psi; t) \uparrow \infty, \; t \to \infty \},$$

де K_1, K_2 — константи, які можуть залежати від $\psi(\cdot)$.

Теорема. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$. *Тоді якщо* $f \in A^\psi H_p$, $p = 1, \infty$, *то* $\forall \rho \in [0; 1]$ *при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива нерівність*

$$\|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) \psi(n)\, E_n(f^\psi)_{p,\rho}, \tag{2}$$

де $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$, $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* n, f, ρ.

Доведення теореми проводиться методом, розробленим О. І. Степанцем [3, 4] з урахуванням специфіки комплексного випадку.

Наведемо лише схему цього доведення. Спочатку, подібно до того, як отримано рівність (21) в [4], одержуємо зображення залишків $r_n(f; z)$ у вигляді

$$r_n(f; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(ze^{-it})\, \mathcal{J}(\psi; n; t)\, dt + \frac{1}{2} c_n z^n,$$

де

$$\mathcal{J}(\psi; n; t) = \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v)\, e^{ivt}\, dv;$$

$$\delta_n(z) = f^\psi(z) - P_{n-1}(z);$$

$P_{n-1}(z)$ — довільний многочлен степеня $\leq n - 1$.

Виходячи з цього зображення, доводимо асимптотичну рівність (аналог рівності (22) в [4])

$$r_n(f;z) = -\frac{\psi(n)}{2\pi i} \int\limits_{|t| \geq a(n)} \delta_n(ze^{-it}) \frac{e^{int}}{t} dt + O(1)\, \psi(n) \|\delta_n\|_{p,\rho}, \qquad z \in D_\rho,$$

де $a(n) = (\eta(n) - n)^{-1}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n, z, ρ і $f \in A^{\Psi} H_p$, $p = 1, \infty$.

Звідси, враховуючи те, що при $a(n) \geq \pi$ [3, с. 110]

$$\left\| \int\limits_{|t| \geq a(n)} \delta_n(\cdot\, e^{-it}) \frac{e^{int}}{t} dt \right\|_{p,\rho} = O(1) \|\delta_n\|_{p,\rho},$$

одержуємо нерівність

$$\|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho} = \frac{\psi(n)}{2\pi} \left\| \int\limits_{a(n) \leq |t| \leq \pi} \delta_n(\cdot\, e^{-it}) \frac{e^{int}}{t} dt \right\|_{p,\rho} + O(1)\, \psi(n) \|\delta_n\|_{p,\rho} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) \psi(n) \|\delta_n\|_{p,\rho}.$$

Нарешті, з цієї нерівності одержуємо (2), якщо $P_{n-1}(z)$ — многочлен, для якого $\|f^{\Psi}(\cdot) - P_{n-1}(\cdot)\|_{p,\rho} = E_n(f^{\Psi})_{p,\rho}$.

В роботах [5, 6] показано, що при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\|f\|_\infty \leq 1} E_n(f)_{\infty,\rho} = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} E_n(f)_{1,\rho} = \rho^n \qquad \forall\, \rho \in [0;1].$$

На основі цих фактів із теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. *Тоді* $\forall\, \rho \in [0;1]$ *при* $n \to \infty$

$$R_n(H_p^{\psi})_{p,\rho} \leq \frac{1}{\pi} \rho^n \psi(n) \ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\, \rho^n \psi(n), \qquad p = 1, \infty. \tag{3}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то при* $\rho = 1$ *в* (3) *має місце рівність.*

Зазначимо, що в роботі [7] для залишків $r_n(f;z)$, $f \in A^{\Psi} H_\infty$ $(A^{\Psi} H_1)$ отримано оцінку, яка при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, є гіршою у розумінні порядку, ніж оцінка (2).

1. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 451–472.
2. *Тайков Л. В.* О методах суммирования рядов Тейлора // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 1. – С. 252–254.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 499–510.
5. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631–640.
6. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183–189.
7. *Двейрин М. З.* О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метр. вопросы теории функций и отображений. – 1975. – № 5. – С. 41–54.

Одержано 15.04.98

УДК 519.21

Е. В. Чалых (Биробиджж. пед. ин-т, Россия)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ МОДУЛЕМ СКОРОСТИ

For a special class of systems of the Ito stochastic equations with random coefficients, conditions are established under which the module of state vector is not a random variable. Possible ways of the generalization of this problem are considered.

Для спеціального класу системи стохастичних рівнянь Іто з випадковими коефіцієнтами встановлено умови, при виконанні яких модуль вектора стану не є випадковою величиною. Розглядаються можливі шляхи узагальнення даної проблеми.

В работах [1, 2] построено точное решение для стохастического дифференциального уравнения типа Ланжевена вида

$$dv(t) = -\overline{\mu}(t)\, v(t)\, dt + \frac{b(t)}{|v(t)|}\left[v(t) \times d\overline{w}(t) \right], \tag{1}$$

где $\overline{\mu}(t) = \mu(t) - b^2(t)|v(t)|^{-2}$, $b(t)$ — детерминированные коэффициенты.

Особенностью такого уравнения является наличие ортогональных воздействий на движущуюся частицу.

Точное решение уравнения (1) имеет вид [1]

$$v(t) = \exp\left\{ \int_0^t \left(\frac{b^2(\tau)}{|v(\tau)|^2} - \mu(\tau) \right) d\tau \right\} \times$$

$$\times \left[I + \frac{\sin\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}} \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right) B_k^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right)^2 \right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right)^2} \left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right) B_k^0 \right)^2 \right] v(0). \tag{2}$$

(B_k^0 — матрицы, выбранные согласно с представлением стохастического слагаемого, но только при дополнительном ограничении [2]: $w_k(t) = w(t)$).

Уравнение (1), а также его возможные обобщения, в том числе и на n-мерный случай, имеют и устойчивое сферическое многообразие, а при случайности процесса $v(t)$, процесс $|v(t)|$ оказывается детерминированным. Однако полученные выводы относятся не только к случаю детерминированных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение Ито:

$$dv(t) = -\mu(t) v(t)\, dt + B\,(b_1; b_2; |v(t)|; t)\, d\overline{w}\,(t), \tag{3}$$

где $\mu(t)$ — детерминированный коэффициент, $v \in R^3$; $w_k(t)$ — независимы;

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v(t)|;\, t)\, dw(t) =$$

$$= b_1(|v(t)|;\, t)\frac{[v(t)\times dw(t)]}{|v(t)|} + b_2(|v(t)|;\, t)\,\frac{[v(t)\times[v(t)\times dw(t)]]}{|v(t)|^2\ \sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Общий вид оператора $B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t)$ имеет вид

$$B(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t) = \frac{b_1(|v|;t)}{|v|}\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{b_2(|v|;t)}{|v|^2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |v|^2 - v_1^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3 \\ -v_1v_2 & |v|^2 - v_2^2 & -v_2v_3 \\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & |v|^2 - v_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Вводя обозначение

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем представление

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t) = \frac{b_1(|v|;t)}{|v|}\,K - \frac{b_2(|v|;t)}{|v|^2\sqrt{2}}\,K^2.$$

При этом

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t)\, B^*(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t) = b^2(|v|;t)/(|v|^2), \qquad (6)$$

где $*$ — знак транспонирования и

$$b^2(|v|;t)/(|v|^2) = b_1^2(|v|;t)/(|v|^2) + b_2^2(|v|;t)/(2\,|v|^2).$$

Теперь вместо детерминированых коэффициентов $b_1(|v|;\, t)$ и $b_2(|v|;\, t)$ рассмотрим случайные $b_1(|v|;\, t;\, \eta)$ и $b_2(|v|;\, t;\, \eta)$, где η — случайный процесс, и пусть эти коэффициенты имеют вид

$$b_1(|v|;\, t;\eta) = |\, b_1(|v|;\, t)|\, \sin f(\eta),$$

$$b_2(|v|;\, t;\eta) = |\, b_1(|v|;\, t)\ \sqrt{2}\,|\, \cos f(\eta),$$

где $f(\eta)$ — произвольная случайная функция от параметра η, выбранная из класса функций таким образом, чтобы не были нарушены условия существования и единственности решения.

Как видим из выражений (4), (5), подобные изменения не влияют на их вид. При этом выражение (6) преобразуется следующим образом:

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t)\, B^*(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t) =$$

$$= \frac{b_1^2(|v|;\, t;\, \eta)}{|v|^2} + \frac{b_2^2(|v|;\, t;\, \eta)}{2\,|v|^2} =$$

$$= \frac{b_1^2(|v|;\, t)}{|v|^2}\,(\cos^2 f(\eta) + \sin^2 f(\eta)) = \frac{b_1^2(|v|;\, t)}{|v|^2}, \qquad (7)$$

а этот факт означает, что случайность коэффициентов $b_1(|v|;\ t;\eta)$ и $b_2(|v|;\ t;\eta)$ не влияет на поведение решения уравнения (3), подобно (2) и, следовательно, выводы, полученные для броуновской диффузии с детерминированными модулем скорости и коэффициентами, переносятся на уравнение (3) со случайными коэффициентами.

Отметим, что дальнейшее расширение этого класса задач связано с предположением о том, что условие (7) может выполняться только в некоторой области $D(v;t) \subset R_v^3 \times [0;\infty)$. Исходя из этого, условие (7) будет выполняться только в некоторой совокупности таких областей (перемежаемой областями стохастической неустойчивости) [3]. Это связано с выводом, основанным на более широком определении первого интеграла [2] как неслучайной функции только в некоторой области D.

1. *Дубко В. А., Чалых Е. В.* Построение аналитического решения для одного класса уравнений типа Ланжевена с ортогональными случайными воздействиями // Укр. мат. журн. – 1998 – **50**, № 4. – С. 558–559.
2. *Дубко В. А.* Интегральные инварианты, первые интегралы и притягивающие многообразия стохастических дифференциальных уравнений // Нелинейные задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 103–106.
3. *Дубко В. А.* Открытые динамические системы // В поисках скрытого порядка. – Владивосток:Дальнаука, 1995, – С. 94–115.

Получено 22.01.98