УДК 517. 9

А. Л. Лапшин (Киев. нац. эконом. ун-т)

ФИЛЬТРАЦИЯ И УПРЕЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ КОНЕЧНОЗНАЧНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

We obtain an equation of optimal filtration for processes of the Markov random evolution, which is a solution of systems of linear differential equations with the Markov switchings.

Одержано рівняння оптимальної фільтрації для процесів марковської випадкової еволюції, що є розв'язком систем лінійних диференціальних рівнянь з марковськими перемиканнями.

Рассматривается задача оценки случайного соостояния для системы, которая описывается системой линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от марковского конечнозначного процесса.

1. Класс рассматриваемых стохастических процессов. Рассматривается стохастический процесс с непрерывным временем, описываемый уравнением

$$dX(t) = A(t,\zeta(t))\,X(t)\,dt + B(t,\zeta(t))\,dW(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\zeta(t)$ — марковский конечнозначный случайный процесс, принимающий значения $\theta_1, \ldots, \theta_q$.

Вероятности

$$p_k(t) = P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, p_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{3}$$

Предполагаем выполнение известных условий [1]

$$\alpha_{ks} \geq 0, \quad k \neq s; \quad \alpha_{kk} \leq 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ks}(t) = 0$$

и пусть вектор $W(t)$ является вектором стохастических процессов с некоррелируемыми приращениями, ковариация которого равна $R\,dt$, т. е. математическое ожидание $\langle dW(t)\,dW^*(t)\rangle = R\,dt$.

Пусть $Y(t)$ — l-мерный вектор наблюдаемых выходных переменных, определяемый системой уравнений

$$dY(t) = H(t,\zeta(t))\,X(t)\,dt + G(t,\zeta(t))\,dV(t), \tag{4}$$

где $\det G(t,\zeta(t)) \neq 0$.

Вектор $V(t)$ имеет размерность l и является вектором стохастических процессов с некоррелируемыми приращениями, ковариация которого равна $S\,dt$, где $S = S^* > 0$. Предполагаем, что векторы $W(t)$, $V(t)$ взаимно не коррелируемы и не коррелированы с $X(0)$.

2. Вывод уравнений задачи восстановления. Введем линейную оценку вектора состояния системы (1), которая определяется системой стохастических дифференциальных уравнений

$$d\hat{X}(t) = A(t,\zeta(t))\,\hat{X}(t)\,dt + K(t,\zeta(t))\big(dY(t) - H(t,\zeta(t))\,\hat{X}(t)\,dt\big);$$

$$\hat{X}(0) = \langle X(0)\rangle \equiv M(0). \tag{5}$$

Ошибка оценки $\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений

$$d\tilde{X}(t) = (A(t,\zeta(t)) - K(t,\zeta(t))\,H(t,\zeta(t)))\,\tilde{X}(t)\,dt + B(t,\zeta(t))\,dW(t) - \\ - K(t,\zeta(t))\,G(t,\zeta(t))\,dV(t). \qquad (6)$$

Введем обозначение для матриц вторых моментов

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) \right\rangle = D(t);$$

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) \mid \zeta(t) = \theta_k \right\rangle P\{\zeta(t) = \theta_k\} = D_k(t), \quad k = 1, \ldots, q. \qquad (7)$$

Используем частные математические ожидания

$$\left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_k \right\rangle P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Вычислим значение матрицы

$$D_k(t+dt) = \left\langle \tilde{X}(t+dt)\,\tilde{X}^*(t+dt),\ \zeta(t+dt) = \theta_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \left\langle \left(\tilde{X}(t) + d\tilde{X}(t)\right)\left(\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}^*(t)\right).\ \zeta(t+dt) = \theta_k,\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \left\langle \left(\tilde{X}(t) + d\tilde{X}(t)\right)\left(\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}^*(t)\right),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle P\left\{\zeta(t+dt) = \theta_k \mid \zeta(t) = \theta_s\right\} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} (\delta_{ks} + \alpha_{ks}(t)\,dt) \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + d\tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + \tilde{X}(t)\,d\tilde{X}^*(t) + \right. \\ \left. + d\tilde{X}(t)\,d\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle. \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$A_s(t) \equiv A(t,\theta_s); \quad B_s(t) \equiv B(t,\theta_s); \quad H_s(t) \equiv H(t,\theta_s);$$
$$G_s(t) \equiv G(t,\theta_s), \quad s = 1, \ldots, q.$$

Из системы уравнений (8) находим асимптотические при $dt \to 0$ равенства

$$D_k(t+dt) = \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t) + (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,\tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t)\,dt + \right. \\ + B_k(t)\,dW(t)\,\tilde{X}^*(t) - K_k(t)\,G_k(t)\,dV(t)\,\tilde{X}^*(t) + \\ + \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t)(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t))\,dt + \tilde{X}(t)\,dW^*(t)\,B_k^*(t) - \\ - \tilde{X}(t)\,dV^*(t)\,G_k^*(t)\,K_k^*(t) + B_k(t)\,dW(t)\,dW^*(t)\,B_k^*(t) + \\ \left. + K_k(t)\,G_k(t)\,dV(t)\,dV^*(t)\,G_k^*(t)\,K_k(t),\ \zeta(t) = \theta_k \right\rangle + \\ + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,dt \left\langle \tilde{X}(t)\,\tilde{X}^*(t),\ \zeta(t) = \theta_s \right\rangle + O(dt^2), \quad k = 1, \ldots, q,$$

которые можно переписать в виде

$$D_k(t+dt) = D_k(t) + (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,D_k(t)\,dt + \\ + D_k(t)\left(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t)\right)dt + B_k(t)\,p_k(t)\,R\,B_k^*(t) + \\ + K_k(t)\,G_k(t)\,p_k(t)\,S\,G_k^*(t)\,K_k^*(t)\,dt + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,D_s(t)\,dt + O(dt^2), \quad k = 1, \ldots, q.$$

При $dt \to 0$ приходим к системе матричных дифферениальных уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = (A_k(t) - K_k(t)\,H_k(t))\,D_k(t) + D_k(t)\left(A_k^*(t) - H_k^*(t)\,K_k^*(t)\right) + \\ + B_k(t)\,p_k(t)\,R\,B_k(t) + K_k(t)\,G_k(t)\,p_k(t)\,S\,G_k^*(t)\,K_k^*(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\,D_s(t), \qquad (9)$$
$$k = 1, \ldots, q.$$

При этом выполнено равенство

$$\left\langle \tilde{X}(t)\, \tilde{X}^*(t) \right\rangle = D(t) = \sum_{k=1}^{q} D_k(t).$$

3. Построение оптимального наблюдателя. Чтобы минимизировать матрицу $D(t)$, минимизируем правые части системы уравнений, используя матрицы $K_k(t)$. Необходимые условия минимума имеют вид

$$-D_k(t)\, H_k^*(t)\, \delta K_k^*(t) + p_k(t)\, K_k(t)\, G_k(t)\, S G_k^*(t)\, \delta K_k^*(t) = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{10}$$

откуда находим выражения для матриц

$$K_k(t) = D_k(t)\, H_k^*(t) \left(G_k(t)\, p_k(t)\, S G_k^*(t) \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{11}$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (9), получаем систему уравнений Риккати

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)\, D_k(t) + D_k(t)\, A_k^*(t) + p_k(t)\, B_k(t)\, R B_k^*(t) -$$

$$- D_k(t)\, H_k(t) \left(G_k(t)\, p_k(t) S G_k^*(t) \right)^{-1} H_k(t)\, D_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\, D_s(t), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{12}$$

которая определяет изменение матриц вторых частных моментов $D_k(t)$. Для системы уравнений (12) можно использовать начальные значения $D_k(0) = D(0) p_k(0)$, $k = 1, \ldots, q$.

Интегрируя систему уравнений (12), находим явное выражение для матриц $K_k(t)$, $k = 1, \ldots, q$, входящих в систему стохастических дифференциальных уравнений (5).

4. Задача оптимальной фильтрации для стационарных систем. Рассмотрим стационарный случай, когда система уравнений (1), (4) имеет вид

$$dX(t) = A(\zeta(t))\, X(t)\, dt + B(\zeta(t))\, dW(t); \tag{13}$$

$$dY(t) = H(\zeta(t))\, X(t)\, dt + G(\zeta(t))\, dV(t). \tag{14}$$

Полагаем $A_s = A(\theta_s)$; $B_s = B(\theta_s)$; $H_s = H(\theta_s)$; $G_s = G(\theta_s)$, $s = 1, \ldots, q$.

Предполагаем, что $\zeta(t)$ — однородный марковский процесс, определяемый системой уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, p_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{15}$$

Предполагаем также эргодичность марковского процесса $\zeta(t)$, т. е. существование пределов

$$p_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{16}$$

не зависящих от начальных значений $p_k(t)$, $k = 1, \ldots, q$.

Система уравнений (11), (12) принимает вид

$$K_k(t) = D_k(t)\, H_k^*(t) \left(p_k\, G_k\, S\, G_k^* \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, q; \tag{17}$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)\, D_k(t) + D_k(t)\, A_k^* + p_k\, B_k\, R\, B_k^* -$$

$$- D_k(t)\, H_k(t) \left(G_k\, p_k\, S\, G_k^* \right)^{-1} H_k\, D_k + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}\, D_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{18}$$

Пусть существуют пределы

$$D_k = \lim_{r \to +\infty} D_k(t), \qquad D_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, q. \tag{19}$$

Эти матрицы удовлетворяют системе матричных алгебраических уравнений второго порядка:

$$A_k D_k + D_k A_k^* + p_k B_k R B_k^* - D_k H_k \left(p_k G_k S G_k^* \right) H_k D_k + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_k = 0.$$

При этом можно выбрать постоянные матрицы $K_k = D_k H_k^* \left(p_k G_k S G_k^* \right)^{-1}$, $k = 1, \dots, q$, в системе дифференциальных уравнений (5)

$$d\hat{X}(t) = A(\zeta(t)) \hat{X}(t) dt + K(\zeta(t)) (dY(t) - H(\zeta(t))) \hat{X}(t) dt.$$

5. Асимптотическое поведение исследуемых процессов. Рассмотрим систему уравнений (6) при $K(t, \zeta(t)) \equiv 0$

$$d\hat{X}(t) = A(t, \zeta(t)) \tilde{X}(t) dt + B(t, \zeta(t)) dW(t). \tag{20}$$

Эта система совпадает с системой уравнений (1). При этом из (9) находим математическое ожидание

$$D(t) = \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} D_k(t),$$

где матрицы $D_k(t)$ определяются системой матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t) D_k(t) + D_k(t) A_k^*(t) + p_k B_k(t) R B_k^*(t) + \\ + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) D_s(t), \quad k = 1, \dots, q. \tag{21}$$

Систему уравнений (21) можно использовать для изучения системы линейных дифференциальных уравнений со случайными марковскими коэфициентами и случайным входом. В стационарном случае получим систему уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k(t) A_k^* + p_k B_k R B_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s(t), \qquad k = 1, \dots, q. \tag{22}$$

В случае асимптотической устойчивости решений системы уравнений

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k(t) A_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s(t), \quad k = 1, \dots, q,$$

для предельных значений D_k, $k = 1, \dots, q$ (19), получим систему матричных уравнений

$$A_k D_k + D_k A_k^* + p_k B_k R B_k^* + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} D_s = 0;$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle = D = \sum_{k=1}^{q} D_k. \tag{23}$$

Эту систему уравнений можно использовать для синтеза оптимального управления [2].

1. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
2. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 260 с.

Получено 26.02.97