УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

The rate of convergence of the Tayler series is studied for functions from the classes $A^{\Psi}H_p$, $p = 1, \infty$, in uniform and integral metrics.

Досліджується швидкість збіжності ряду Тейлора для функцій із класів $A^{\Psi}H_p$, $p = 1, \infty$, в рівномірній та інтегральних метриках.

1. Нехай A — множина всіх функцій, аналітичних у крузі $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$;

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad z \in D, \tag{1}$$

— розклад в ряд Тейлора функції $f \in A$; $S_n(f; z)$ — частинна сума порядку n ряду (1); $r_n(f; z) = f(z) - S_n(f; z)$ — залишок порядку n ряду (1).

Як завжди, через $B^{(r)}$ (відповідно $H^{(r)}$), $r \in \mathbb{N}$, позначається клас функцій $f \in A$, r-ті похідні яких задовольняють умову

$$\| f^{(r)} \|_{\infty} := \sup_{z \in D} |f^{(r)}(z)| \le 1$$

$$\left(\| f^{(r)} \|_1 := \sup_{0<\rho<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(\rho e^{it})| \, dt \le 1 \right).$$

В роботах [1, 2] досліджено швидкість збіжності рядів Тейлора функцій із класів $B^{(r)}$ і $H^{(r)}$. В даній роботі наводиться один результат, який є узагальненням результатів цих робіт на інші класи функцій, аналітичних у крузі D.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина опуклих, спадних до нуля додатних функцій. Будемо позначати через $A^{\Psi}H_{\infty}$, $\psi = \psi(t) \in \mathfrak{M}$ (відповідно $A^{\Psi}H_1$) множину функцій $f \in A$, з рядом Тейлора (1), для яких ряд

$$f^{\Psi}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} c_k z^k$$

зображає в крузі D функцію простору H_{∞} із скінченною нормою $\| \cdot \|_{\infty}$ (відповідно функцію простору H_1 із скінченною нормою $\| \cdot \|_1$). Таким чином, $f \in A^{\Psi}H_{\infty}$ $(A^{\Psi}H_1)$, якщо

$$\| f^{\Psi} \|_{\infty} < \infty \qquad (\| f^{\Psi} \|_1 < \infty).$$

Якщо ж $\| f^{\Psi} \|_{\infty} \le 1$ $(\| f^{\Psi} \|_1 \le 1)$, то пишемо $f \in H^{\Psi}_{\infty}$ (H^{Ψ}_1).

Розглянемо приклад. Нехай $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$, $r > 0$, де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера. Тоді для кожної функції $f \in H^{\Psi}_{\infty}$ (H^{Ψ}_1) функція

$$g(z) := z^{[r]} f(z) + P_{[r]-1}(z),$$

де $[r]$ — ціла частина числа r, $P_{[r]-1}(z)$ — довільний многочлен степеня $[r]-1$, належить класу $B^{(r)}$ $(H^{(r)})$, в якому під виразом $g^{(r)}(\cdot)$ слід розуміти дробову похідну за Ріманом – Ліувіллем. Таким чином, легко встановлюється зв'язок між класами H_∞^ψ (H_1^ψ) і $B^{(r)}$ $(H^{(r)})$.

Зазначимо, що класи $A^\psi H_\infty$ $(A^\psi H_1)$ є аналогами класів $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ (2π-періодичних функцій), введених О. І. Степанцем [3]. Тому, як і слід було очікувати, результат цієї роботи виявився цілком аналогічним до відомих результатів про збіжність рядів Фур'є на класах $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ [3].

2. Далі будемо використовувати позначення: $D_\rho = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < \rho \}$, $\|f\|_{\infty,\rho} = \sup\limits_{z \in D_\rho} |f(z)|$; $\|f\|_{1,\rho} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|\, dt$;

$$E_n(f)_{p,\rho} = \inf_{P_{n-1}} \|f(\cdot) - P_{n-1}(\cdot)\|_{p,\rho},$$

де $p = 1, \infty$ і нижня грань береться по множині всіх многочленів степеня $\le n-$ -1;

$$R_n(\mathfrak{A})_{p,\rho} = \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho}, \quad p = 1, \infty, \quad \mathfrak{A} \subset A.$$

Згідно з [3] покладемо: $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) =$ $= t/(\eta(t) - t)$;

$$\mathfrak{M}_C = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \; 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 \};$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{ \psi \in \mathfrak{M} : \; \mu(\psi; t) \uparrow \infty, \; t \to \infty \},$$

де K_1, K_2 — константи, які можуть залежати від $\psi(\cdot)$.

Теорема. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$. *Тоді якщо* $f \in A^\psi H_p$, $p = 1, \infty$, *то* $\forall \rho \in [0; 1]$ *при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива нерівність*

$$\|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho} \le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) \psi(n)\, E_n(f^\psi)_{p,\rho}, \tag{2}$$

де $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$, $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* n, f, ρ.

Доведення теореми проводиться методом, розробленим О. І. Степанцем [3, 4] з урахуванням специфіки комплексного випадку.

Наведемо лише схему цього доведення. Спочатку, подібно до того, як отримано рівність (21) в [4], одержуємо зображення залишків $r_n(f; z)$ у вигляді

$$r_n(f; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(ze^{-it})\, \mathcal{J}(\psi; n; t)\, dt + \frac{1}{2} c_n z^n,$$

де

$$\mathcal{J}(\psi; n; t) = \frac{1}{2\pi} \int_n^\infty \psi(v)\, e^{ivt}\, dv;$$

$$\delta_n(z) = f^\psi(z) - P_{n-1}(z);$$

$P_{n-1}(z)$ — довільний многочлен степеня $\le n-1$.

Виходячи з цього зображення, доводимо асимптотичну рівність (аналог рівності (22) в [4])

$$r_n(f;z) = -\frac{\psi(n)}{2\pi i}\int\limits_{|t|\geq a(n)} \delta_n(ze^{-it})\frac{e^{int}}{t}\,dt + O(1)\,\psi(n)\|\delta_n\|_{p,\rho}, \qquad z\in D_\rho,$$

де $a(n) = (\eta(n) - n)^{-1}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n, z, ρ і $f\in A^{\Psi}H_p$, $p=1,\infty$.

Звідси, враховуючи те, що при $a(n)\geq\pi$ [3, с. 110]

$$\left\|\int\limits_{|t|\geq a(n)} \delta_n(\cdot\, e^{-it})\frac{e^{int}}{t}\,dt\right\|_{p,\rho} = O(1)\|\delta_n\|_{p,\rho},$$

одержуємо нерівність

$$\|r_n(f;\cdot)\|_{p,\rho} = \frac{\psi(n)}{2\pi}\left\|\int\limits_{a(n)\leq|t|\leq\pi} \delta_n(\cdot\, e^{-it})\frac{e^{int}}{t}\,dt\right\|_{p,\rho} + O(1)\,\psi(n)\|\delta_n\|_{p,\rho} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\pi}\ln^{+}(\eta(n)-n) + O(1)\right)\psi(n)\|\delta_n\|_{p,\rho}.$$

Нарешті, з цієї нерівності одержуємо (2), якщо $P_{n-1}(z)$ — многочлен, для якого $\|f^{\Psi}(\cdot) - P_{n-1}(\cdot)\|_{p,\rho} = E_n(f^{\Psi})_{p,\rho}$.

В роботах [5, 6] показано, що при кожному $n\in\mathbb{N}$

$$\sup_{\|f\|_\infty\leq 1} E_n(f)_{\infty,\rho} = \sup_{\|f\|_1\leq 1} E_n(f)_{1,\rho} = \rho^n \qquad \forall\,\rho\in[0;1].$$

На основі цих фактів із теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$. *Тоді* $\forall\,\rho\in[0;1]$ *при* $n\to\infty$

$$R_n(H_p^{\psi})_{p,\rho} \leq \frac{1}{\pi}\rho^n\psi(n)\ln^{+}(\eta(n)-n) + O(1)\,\rho^n\psi(n), \qquad p=1,\infty. \tag{3}$$

Якщо ж $\psi\in\mathfrak{M}_C$, *то при* $\rho=1$ *в* (3) *має місце рівність.*

Зазначимо, що в роботі [7] для залишків $r_n(f;z)$, $f\in A^{\Psi}H_\infty$ $(A^{\Psi}H_1)$ отримано оцінку, яка при $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, є гіршою у розумінні порядку, ніж оцінка (2).

1. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 451–472.
2. *Тайков Л. В.* О методах суммирования рядов Тейлора // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 1. – С. 252–254.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 499–510.
5. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631–640.
6. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183–189.
7. *Двейрин М. З.* О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метр. вопросы теории функций и отображений. – 1975. – № 5. – С. 41–54.

Одержано 15.04.98