УДК 519.21

Е. В. Чалых (Биробидж. пед. ин-т, Россия)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ МОДУЛЕМ СКОРОСТИ

For a special class of systems of the Ito stochastic equations with random coefficients, conditions are established under which the module of state vector is not a random variable. Possible ways of the generalization of this problem are considered.

Для спеціального класу системи стохастичних рівнянь Іто з випадковими коефіцієнтами встановлено умови, при виконанні яких модуль вектора стану не є випадковою величиною. Розглядаються можливі шляхи узагальнення даної проблеми.

В работах [1, 2] построено точное решение для стохастического дифференциального уравнения типа Ланжевена вида

$$dv(t) = -\overline{\mu}(t)\, v(t)\, dt + \frac{b(t)}{|v(t)|}\,[\, v(t) \times d\overline{w}(t)\,], \tag{1}$$

где $\overline{\mu}(t) = \mu(t) - b^2(t)|v(t)|^{-2}$, $b(t)$ — детерминированные коэффициенты.

Особенностью такого уравнения является наличие ортогональных воздействий на движущуюся частицу.

Точное решение уравнения (1) имеет вид [1]

$$v(t) = \exp\left\{ \int_0^t \left(\frac{b^2(\tau)}{|v(\tau)|^2} - \mu(\tau) \right) d\tau \right\} \times$$

$$\times \left[I + \frac{\sin\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau)\right)^2\right)^{1/2}} \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right) B_k^0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right)^2 \right)^{1/2}}{\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right)^2} \left(\sum_{k=1}^3 \left(\int_0^t \frac{b(\tau)}{|v(\tau)|}\, dw_k(\tau) \right) B_k^0 \right)^2 \right] v(0). \tag{2}$$

(B_k^0 — матрицы, выбранные согласно с представлением стохастического слагаемого, но только при дополнительном ограничении [2]: $w_k(t) = w(t)$).

Уравнение (1), а также его возможные обобщения, в том числе и на n-мерный случай, имеют и устойчивое сферическое многообразие, а при случайности процесса $v(t)$, процесс $|v(t)|$ оказывается детерминированным. Однако полученные выводы относятся не только к случаю детерминированных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение Ито:

$$dv(t) = -\mu(t) v(t)\, dt + B\,(b_1; b_2; |v(t)|; t)\, d\overline{w}\,(t), \tag{3}$$

где $\mu(t)$ — детерминированный коэффициент, $v \in R^3$; $w_k(t)$ — независимы;

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1998, т. 50, № 7

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v\,(t\,)|;\, t)\, dw(t) =$$

$$= b_1(|\,v\,(t\,)|;\, t)\frac{[v(t)\times dw(t)]}{|v(t)|} + b_2(|\,v(t\,)|;\, t)\; \frac{[v(t)\; \times [v(t)\times dw(t)]]}{|v(t)|^2\;\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Общий вид оператора $B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t)$ имеет вид

$$B(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t) = \frac{b_1(|\,v\,|;t)}{|\,v\,|}\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{b_2(|\,v\,|;t)}{|\,v\,|^2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |v|^2 - v_1^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3 \\ -v_1v_2 & |v|^2 - v_2^2 & -v_2v_3 \\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & |v|^2 - v_3^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Вводя обозначение

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем представление

$$B\,(b_1;\, b_2;\, |v|;\, t\,) = \frac{b_1(|\,v\,|;t)}{|\,v\,|}\, K - \frac{b_2(|\,v\,|;t)}{|\,v\,|^2\sqrt{2}}\, K^2.$$

При этом

$$B\,(b_1;\, b_2\,;\, |v|;\, t)\, B^*(b_1\,;\, b_2\,;\, |v|;\, t) = b^2(|\,v\,|;\, t)/(|\,v\,|^2), \tag{6}$$

где $*$ — знак транспонирования и

$$b^2(|\,v\,|;\, t)/(|\,v\,|^2) = b_1^2(|\,v\,|;\, t)/(|\,v\,|^2) + b_2^2(|v|;\, t)/(2\,|v|^2).$$

Теперь вместо детерминированых коэффициентов $b_1(|v|;\, t)$ и $b_2(|v|;\, t)$ рассмотрим случайные $b_1(|v|;\, t;\, \eta)$ и $b_2(|v|;\, t;\, \eta)$, где η — случайный процесс, и пусть эти коэффициенты имеют вид

$$b_1(|\,v\,|;\, t;\eta) = |\,b_1(|\,v\,|;\, t)|\, \sin f(\eta),$$

$$b_2(|\,v\,|;\, t;\eta) = |\,b_1(|v|;\, t)\;\sqrt{2}\,|\, \cos f(\eta),$$

где $f(\eta)$ — произвольная случайная функция от параметра η, выбранная из класса функций таким образом, чтобы не были нарушены условия существования и единственности решения.

Как видим из выражений (4), (5), подобные изменения не влияют на их вид. При этом выражение (6) преобразуется следующим образом:

$$B\,(b_1;\, b_2\,;\, |v|;\, t)\, B^*(b_1\,;\, b_2\,;\, |v|;\, t) =$$

$$= \frac{b_1^2(|\,v\,|;\, t;\, \eta)}{|\,v\,|^2} + \frac{b_2^2(|\,v\,|;\, t;\, \eta)}{2\,|\,v\,|^2} =$$

$$= \frac{b_1^2(|\,v\,|;\, t\,)}{|\,v\,|^2}\,(\cos^2 f(\eta) + \sin^2 f(\eta)) = \frac{b_1^2(|\,v\,|;\, t\,)}{|\,v\,|^2}, \tag{7}$$

а этот факт означает, что случайность коэффициентов $b_1(|v|;\ t;\eta)$ и $b_2(|v|;\ t;\eta)$ не влияет на поведение решения уравнения (3), подобно (2) и, следовательно, выводы, полученные для броуновской диффузии с детерминированными модулем скорости и коэффициентами, переносятся на уравнение (3) со случайными коэффициентами.

Отметим, что дальнейшее расширение этого класса задач связано с предположением о том, что условие (7) может выполняться только в некоторой области $D(v;t)\subset R_v^3\times[0;\infty)$. Исходя из этого, условие (7) будет выполняться только в некоторой совокупности таких областей (перемежаемой областями стохастической неустойчивости) [3]. Это связано с выводом, основанным на более широком определении первого интеграла [2] как неслучайной функции только в некоторой области D.

1. *Дубко В. А., Чалых Е. В.* Построение аналитического решения для одного класса уравнений типа Ланжевена с ортогональными случайными воздействиями // Укр. мат. журн. – 1998 – **50**, № 4. – С. 558–559.
2. *Дубко В. А.* Интегральные инварианты, первые интегралы и притягивающие многообразия стохастических дифференциальных уравнений // Нелинейные задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 103–106.
3. *Дубко В. А.* Открытые динамические системы // В поисках скрытого порядка. – Владивосток:Дальнаука, 1995, – С. 94–115.

Получено 22.01.98