УДК 517.9

Н. Р. Банцур (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. П. Трофимчук (Нац. техн. ун-т України „КПІ")

ІСНУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ПЕРІОДИЧНИХ ТА МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З МАКСИМУМАМИ

We investigate the problems of the existence of periodic and almost periodic solutions of the scalar equation $x'(t) = -\delta x(t) + p \max\limits_{u \in [t-h,\, t]} x(u) + f(t)$, where $\delta, p \in R$, with a periodic (almost periodic) perturbation $f(t)$. We establish conditions of the global exponential stability of these solutions and prove the uniqueness theorems for the solutions of this sort.

Досліджуються питання існування періодичних та майже періодичних розв'язків скалярного рівняння $x'(t) = -\delta x(t) + p \max\limits_{u \in [t-h,\, t]} x(u) + f(t)$, де $\delta, p \in R$, з періодичним (майже періодичним) збуренням $f(t)$. Встановлено умови, за яких ці розв'язки глобально експоненціально стійкі, а також доведено теореми єдиності для таких розв'язків.

1. Вступ. Основні позначення. Як новий об'єкт дослідження диференціальні рівняння з максимумами з'явились біля тридцяти років тому в зв'язку з розв'язуванням деяких практичних задач. У 1975 р. в оглядовій роботі [1] А. Д. Мишкіс відмічав цей новий цікавий та мало вивчений розділ теорії фукціонально-диференціальних рівнянь. В останній час знову посилився інтерес до рівнянь, які містять максимуми в правій частині (див., наприклад, [2–6]).

Наприклад, рівняння такого типу виникає при опису регулятора, який підтримує постійну напругу на виході електрогенератора, що підживлює коло із змінним навантаженням. Диференціальне рівняння, яке описує ефект регулятора, має вигляд

$$u'(t) = -\delta u(t) + p \max_{t-h \le s \le t} u(s) + f(t), \tag{1}$$

де величини δ, p — сталі, $u(t)$ — напруга на виході регулятора, $f(t)$ — збурення, яке виникає при зміні навантаження у колі [4]. При цьому регулятор сконструйований так, щоб реагувати на максимальне відхилення напруги на інтервалі $[t-h, t]$.

Рівняння (1) є найпростішим „квазілінійним" рівнянням з максимумами. Воно зберігає деякі властивості лінійного рівняння з запізненням і тому стало предметом інтенсивного дослідження різними методами (див., наприклад, [7, 8]). Зауважимо, що найбільш вивченою є періодична крайова задача для (1), яка навіть у цьому, найбільш простому, випадку не досліджена до кінця.

В даній роботі наведені відповіді на деякі важливі відкриті питання, що пов'язані з рівнянням (1). Зокрема, наші теореми покращують результати двох згаданих вище робіт, даючи їм чітку геометричну інтерпретацію. Так, один із висновків статті говорить про існування T-періодичного розв'язку рівняння (1) з T-періодичною правою частиною при всіх $p \ne \delta$. Цей розв'язок до того ж буде єдиним для всіх достатньо малих та достатньо великих значень $h \ge 0$ (при фіксованій величині періоду T). Додатково досліджуються питання про стійкість та побудову періодичного (або майже періодичного) розв'язку рівняння (1). Результати статті допускають узагальнення і для більш складних систем рівнянь (це зроблено у роботі [9]); тут же ми намагаємось виділити головні ідеї доведень при розгляді наведеного вище скалярного рівняння (1) з постійними коефіцієнтами.

Зауважимо, що багато досліджень, які стосуються рівнянь з максимумами, пов'язані з Київською школою диференціальних рівнянь, очолюваною А. М. Самойленком. При цьому одне з перших досліджень рівняння (1) було виконано чисельно-аналітичним методом А. М. Самойленка (див., [7, 10]).

У подальшому ми будемо використовувати позначення:
$|x|_0 = \sup\limits_t |x(t)|$, $C = C([-h, 0], R)$, $R_{+,t} = (t, +\infty)$, $R_{-,t} = (-\infty, t)$.

В інтегралах вигляду $\int_{R_{\pm,t}} \exp\{-\delta(t-s)\} f(s)ds$ будемо вибирати знак + чи − таким чином, щоб вони були абсолютно збіжними.

2. Допоміжні нерівності. Скористаємось деякими узагальненнями леми Гронуолла – Беллмана. При цьому доведемо лише другу, складнішу лему; першу ж можна вивести безпосередньо з класичної леми Гронуолла – Беллмана чи довести аналогічно лемі 2.

Лема 1. *Нехай неперервна функція* $y(t)\colon [-h, b] \to R_+$ *задовольняє нерівності*

$$y(t) \le \alpha(t) + \int_0^t (p(s)\,y(s) + q(s) \max_{u\in[s-h,\,s]} y(u))ds, \quad t \in [0, b],$$

$$y(t) \le \alpha(t), \quad t \in [-h, 0],$$

де $\alpha(t)\colon [-h, b] \to R_+$ *— неспадна функція та* $p(u), q(u)\colon [-h, b] \to R_+$ *— інтегровні за Лебегом функції. Тоді для всіх* $t \in [0, b]$ *виконується нерівність* $y(t) \le \psi(t)$, *де функція* $\psi(t)$ *є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t (p(u) + q(u)\,\psi(u))du, \quad t \ge 0.$$

Лема 2. *Припустимо, що кусково-неперервні функції* $v(t), w(t)\colon [-h, b] \to \to R_+$ *з розривами першого роду в нулі задовольняють для всіх* $t \in [0, b]$ *систему нерівностей*

$$\begin{aligned} v(t) &\le \alpha + \beta \int_0^t \max_{u\in[\sigma-h,\,\sigma]} w(u)d\sigma, \\ w(t) &\le \gamma + \mu v(t) + \kappa \max_{u\in[t-h,\,t]} w(u), \end{aligned} \tag{2}$$

де α, β, γ, κ *— невід'ємні константи,* $k < 1$ *і* $\mu > 0$. *Припустимо також, що при всіх* $t \in [-h, 0]$ *виконуються умови* $v(t) \le \alpha$, $w(t) \le \gamma$.

Тоді

$$v(t) \le \psi_1(t) = -\frac{\gamma}{\mu} + \left(\alpha + \frac{\gamma}{\mu}\right) e^{\frac{\beta\mu}{1-\kappa}t} \tag{3}$$

для всіх $t \in [0, b]$.

Доведення. Нехай $X = C_{[-h,0]} \oplus C_{[0,b]}$, тоді $(v(t), w(t)) \in X^2$. Оператор $A: X^2 \to X^2$ задамо наступним чином:

$$A(v, w)(t) = (0, 0), \quad \text{якщо} \quad t \in [-h, 0],$$

$$A(v, w)(t) = (\beta \int_0^t \max_{u \in [\sigma - h, \sigma]} w(u) d\sigma, \ \mu v(t) + \kappa \max_{u \in [t-h, t]} w(u)), \text{ якщо } t \in [0, b].$$

Тоді нерівність (2) можна записати у вигляді

$$\omega \le \varepsilon + A\omega, \text{ де } \omega = (v, w), \ \varepsilon = (\alpha, \gamma) \in X^2. \tag{4}$$

Нехай K є конусом невід'ємнозначних функцій із X^2. Очевидно, оператор $A : K \to K$ має наступні властивості: 1) $Aky = kAy$, якщо $k \ge 0$; 2) $A(y+x) \le \le Ay + Ax$; 3) $Ay \le Ax$ при $y \le x$.

Використовуючи їх та ітеруючи (4), одержуємо

$$\omega \le \varepsilon + A\varepsilon + \dots + A^k \varepsilon + A^{k+1} \omega.$$

Оскільки ω визначається кусково-неперервними функціями, то „постійний" елемент $\varepsilon_0 = (|v|_0, |w|_0) \in K$ і $\omega \le \varepsilon_0$. Зауважимо далі, що значення оператора A на константах співпадає із відповідними значеннями лінійного неперервного оператора $I: X^2 \to X^2$,

$$I(v, w)(t) = (0, 0), \qquad t \in [-h, 0],$$

$$I(v, w)(t) = (\beta \int_0^t w(\sigma) d\sigma, \ \mu v(t) + \kappa w(t)), \qquad t \in [0, b].$$

Припустимо, що спектральний радіус оператора I менший за одиницю. Тоді $\varepsilon + + A\varepsilon + \dots + A^k \varepsilon = \varepsilon + I\varepsilon + \dots + I^k \varepsilon \to (E - I)^{-1} \varepsilon$ при $k \to \infty$, а $0 \le A^{k+1} \omega \le \le A^{k+1} \varepsilon_0 = I^{k+1} \varepsilon_0 \to 0$. В результаті $\omega \le (E - I)^{-1} \varepsilon = \psi$, де $\varepsilon = (E - I) \psi = \psi - - I \psi$. Останнє рівняння для визначення $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ можна переписати у вигляді

$$\psi_1(t) = \alpha, \quad \psi_2(t) = \gamma \quad \text{при} \quad t \in [-h, 0],$$

$$\psi_1(t) = \alpha + \beta \int_0^t \psi_2(\sigma) d\sigma, \quad \psi_2(t) = \gamma + \mu \psi_1(t) + \kappa \psi_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, b].$$

Виразивши ψ_2 з другого рівняння, одержимо рівняння для ψ_1 вигляду

$$\psi_1(t) = \alpha + \frac{\beta\gamma}{1-\kappa} t + \frac{\mu\beta}{1-\kappa} \int_0^t \psi_1(\sigma) d\sigma,$$

проінтегрувавши яке, отримаємо $\psi_1(t)$, визначену формулою (3). Для завершення доведення достатньо зауважити, що, за безпосередніми обчисленнями, спектральний радіус оператора I менший за одиницю і дорівнює κ. Лему доведено.

3. Існування періодичних розв'язків. В цьому пункті будемо вважати функцію $f(t)$ T-періодичною, не обумовлюючи це додатково. Визначивши нерухомі точки оператора слідування Пуанкаре Φ для рівняння (1), ми тим самим вкажемо початкові значення для T-періодичних розв'язків. На жаль, лише при $h \le T$ цей оператор буде компактним, що ускладнює застосування теорем про нерухому точку. Цікаво, що, навпаки, при $h \ge T$ дослідження (1) стає набагато простішим.

Лема 3. *Якщо $h \ge T$, $p \ne \delta$, то існує єдиний T-періодичний розв'язок рівняння* (1).

Доведення. Достатньо зауважити, що для T-періодичної функції $\omega(t)$ величина $\max_{s \in [t-h, t]} \omega(s)$ не залежить від t при $h \ge T$. Тому єдиний T-періодичний розв'язок $x^*(t)$ рівняння (1) при $\delta \ne 0$ має вигляд $x^*(t) = \omega(t) + k$, де k — де-яка константа, а $\omega(t)$ — єдиний T-періодичний розв'язок рівняння $y'(t) = -\delta y(t) + f(t)$. Якщо ж $\delta = 0$, то $x^*(t)$ знайдемо у вигляді

$$x^*(t) = k + \int_0^t f(s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s)\,ds.$$

Оскільки питання про існування та єдиність T-періодичного розв'язку рівняння (1) при $h \ge T$ повністю вирішується лемою 3, нам залишається розглянути випадок $h < T$.

Теорема 1. *Нехай $p \ne \delta$. Тоді незалежно від $h < T$ існує хоча б один T-періодичний розв'язок $x^*(t)$ рівняння* (1), *причому*

$$-\nu^* = -(\mu^* + T|f|_0)\,e^{(|\delta|+|p|)T} \le x^*(t) \le \frac{|f|_0}{|\delta - p|} = \mu^*.$$

Доведення. Розглянемо сім'ю T-періодичних рівнянь вигляду

$$y'(t) = -\delta y(t) + \max_{s\in[t-\varepsilon h,\, t]} y(s) + f(t), \quad \varepsilon \in [0, 1]. \tag{5}$$

При $\varepsilon = 1$ рівняння (5) співпадає з (1), а при $\varepsilon = 0$ воно набуває вигляду

$$y'(t) = -(\delta - p)\,y(t) + f(t). \tag{6}$$

Якщо $p \ne \delta$, то, як добре відомо, рівняння (6) має єдиний T-періодичний експоненціально стійкий (або нестійкий, в залежності від знаку $p - \delta$) розв'язок. Неважко довести рівномірну за $\varepsilon \in [0, 1]$ обмеженість зверху всіх періодичних розв'язків сім'ї (5). Справді, нехай $s_{\max}$ — точка абсолютного максимуму T-періодичного розв'язку $x^*(t, \varepsilon)$: $x^*(s_{\max}, \varepsilon) = M$. Тоді $\dfrac{dx^*(s_{\max}, \varepsilon)}{dt} = 0$, $\max\limits_{u\in[s-\varepsilon h,\, s]} x^*(u, \varepsilon) = x^*(s_{\max}, \varepsilon)$ і тому $M = \dfrac{f(s_{\max})}{\delta - p}$, звідки $|M| \le \dfrac{|f(s)|_0}{|\delta - p|}$.
На жаль, подібну техніку не можна застосувати при дослідженні мінімуму. У цьому випадку, якщо точка $s_{\min}$ — точка абсолютного мінімуму, то застосуємо лему 1 до інтегрального рівняння

$$x^*(t, \varepsilon) = x^*(s_{\max}, \varepsilon) + \int_{s_{\max}}^{t} \Big(-\delta x^*(s, \varepsilon) + p \max_{u\in[s-\varepsilon h,\, s]} x^*(u, \varepsilon) + f(s)\Big)\,ds \tag{7}$$

при $t \in [s_{\max} - \varepsilon h, s_{\min}]$, $0 \le s_{\min} - s_{\max} \le \varepsilon T$. Безпосереднє застосування цієї леми ускладнюється тим, що ми не можемо a priori оцінити величину $x^*(s, \varepsilon)$ на інтервалі $[s_{\max} - \varepsilon h, s_{\max}]$. Проте, використовуючи входження max у праву частину (1), можна подолати цю перешкоду, поклавши $x^*(t, \varepsilon) \equiv x^*(s_{\max}, \varepsilon)$, $t \in [s_{\max} - \varepsilon h, s_{\max}]$.

Справді, при розв'язанні інтегрального рівняння (7) будемо враховувати „передісторію" лише в складовій $\max\limits_{u\in[s-\varepsilon h,\, s]} x(u)$, яка дорівнює $x^*(s_{\max}, \varepsilon)$ незалежно від вигляду початкової функції $\varphi(s)$, якщо $\max\limits_{s\in[s_{\max}-\varepsilon h,\, s_{\max}]} \varphi(s) = \varphi(s_{\max}) = x^*(s_{\max}, \varepsilon)$ і $s_{\max} \in [s - \varepsilon h, s]$. В результаті з (7) отримаємо

$$\big|x^*(t, \varepsilon)\big| \le |M| + \int_{s_{\max}}^{t} \Big(|\delta|\big|x^*(s, \varepsilon)\big| + |p| \max_{u\in[t-h,\, t]} \big|x^*(u, \varepsilon)\big|\Big)ds + \varepsilon T|f(s)|_0 \le$$

$$\le (\mu^* + T|f|_0)\,e^{(|\delta|+|p|)T}, \quad \text{де} \quad t \in [s_{\max}, s_{\min}].$$

Таким чином, сім'я T-періодичних функцій $\left|x^*(t,\varepsilon)\right|$ обмежена константою, яка не залежить від $\varepsilon\in[0,1]$.

Як ми відмічали вище, існування T-періодичного розв'язку кожного із рівнянь (5) при $h<T$ зводиться до питання про існування нерухомих точок цілком неперервного відображення Пуанкаре $\Phi(x,\varepsilon)$:

$$\Phi(x,\varepsilon) = x,$$

яке при $\varepsilon=0$ має єдиний розв'язок. Розглянемо кулю $U_k=\{x\in C: |x(t)|\le\kappa\}$, де $\kappa=\max\{\nu^*,\mu^*\}+1$. Відмітимо, що цілком неперервне поле [11] $\Phi(x,\varepsilon)-x$ не має нулів на межі кулі U_k для всіх $\varepsilon\in[0,1]$ в силу першої частини доведення. Тому обертання γ векторних полів $\Phi(x,1)-x$ та $\Phi(x,0)-x$ на U_k співпадають. Оскільки поле $\Phi(x,0)$ лінійне: $\Phi(x,0)=\omega+Lx$, де $\omega\in C$, $Lx = e^{-\sigma(t+T)}x(0)$, $t\in[-h,0]$ і одиниця не є власним значенням оператора L, то

$$\gamma(\Phi(x,0)-x,\ U_k) = \operatorname{ind}(x^*,\ \Phi(x,0)-x) = (-1)^{\beta} \neq 0.$$

Тут x^* — початкове значення єдиного T-періодичного розв'язку рівняння (6), β — сума кратностей дійсних та більших за 1 власних значень оператора L (див. теореми 20.6 та 21.6 із [11]). Оскільки $\Phi(x,\varepsilon)$ неперервне за сукупністю аргументів, то згідно з добре відомими властивостями обертання векторного поля (див. теорему 20.5 із [11]) одержуємо $\gamma(\Phi(x,1)-x,\ U_k) = (-1)^{\beta} \neq 0$, і тому існує хоча б одна особлива точка у відображення $\Phi(x,1)-x$, тобто існує T-періодичний розв'язок рівняння (1). Теорему доведено.

4. Існування та єдиність майже періодичних розв'язків. Вияснимо умови, за яких періодичний (майже періодичний) розв'язок рівняння (1) буде єдиним. Через $C_b^1(R)$, $C_b(R)$ будемо позначати відповідно банахові простори, що складаються з неперервно диференційовних та неперервних функцій $f(t)$: $R\to R$ відповідно з нормами $|x|_1=\max(|x(t)|_0,\ |x'(t)|_0)$ та $|x|_0=\sup\limits_{t\in R} x(t)$.

Теорема 2. 1. *Нехай* $p\neq\delta$, $|p|h<1/2$. *Тоді оператор* $A: C_b^1(R)\to C_b^1(R)$, *заданий формулою*

$$(Ax)(t) = \int\limits_{R_\pm,\,t} e^{-(\delta-p)(t-s)}\big(p\max_{u\in[s-h,\,s]}[x(u)-x(s)]+f(s)\big)ds, \tag{8}$$

є оператором стиску.

2. *Якщо ж* $|p|<|\delta|$, *то оператор* $B: C_b(R)\to C_b(R)$, *де*

$$(Bx)(t) = \int\limits_{R_\pm,\,t} e^{-\delta(t-s)}\big(p\max_{u\in[s-h,\,s]}x(u)+f(s)\big)ds,$$

також є стискуючим.

Доведення. Оскільки друге твердження теореми доводиться дуже просто, то зупинимось лише на доведенні її першого твердження. Зауважимо спочатку, що оператор A буде стискуючим лише при належному перенормуванні. Через $|z|$, $z\in R^2$, позначимо евклідову норму в R^2. Ця норма монотонна: якщо $0\preceq x\preceq y$, то $|x|\le|y|$, де символ $\preceq$ — покомпонентне порівняння векторів.

Матриця

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{|p|h}{|\delta-p|} \\ 0 & 2|p|h \end{pmatrix}$$

має спектральний радіус $r(L)=2|p|h<1$. Тому, згідно з лемою про еквівалентні норми [12, с. 90–92], можна вказати $\varepsilon > 0$ і таку норму $|\cdot|_*$ в R^2, що $|L|_* \le r(L) + \varepsilon < 1$ (лема 2.2 із [12]). А згідно з лемою 2.3 із [12], можна вважати, що норма $|x|_*$ також монотонна, оскільки оператор L залишає конус $K = \{(x, y) : x \ge 0, y \ge 0\}$, порождений відношенням $\preceq$, інваріантним.

Введемо тепер в $C_b^1(R)$ норму $|x|_{*1} = |\bar{x}|_*$, де $\bar{x} = (|x(t)|_0, |x'(t)|_0) \in K$. Норми $|\cdot|_1$ та $|\cdot|_{*1}$ еквівалентні, оскільки такими є норми $|\cdot|$ та $|\cdot|_*$. З (8) випливає

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)|_0 \le \sup_{t \in R} \left[|p| \left| \int_{R_\pm, t} e^{-(\delta - p)(t-s)} \max_{u \in [s-h, s]} (v(u) - v(s)) ds \right| \right] \le$$

$$\le \frac{|p| h}{|\delta - p|} |x'(t) - y'(t)|_0, \quad v(t) = x(t) - y(t).$$

Оскільки

$$(Ax)'(t) = -(\delta - p)(Ax)(t) + p \max_{u \in [t-h, t]} [x(u) - x(t)] + f(t),$$

то

$$|(Ax)'(t) - (Ay)'(t)|_0 \le |\delta - p| |(Ax)(t) - (Ay)(t)|_0 + |p| h |x'(t) - y'(t)|_0 \le$$

$$\le 2 |p| h |x'(t) - y'(t)|_0.$$

В результаті одержуємо

$$\begin{pmatrix} |(Ax)(t) - (Ay)(t)|_0 \\ |(Ax)'(t) - (Ay)'(t)|_0 \end{pmatrix} \le L \begin{pmatrix} |x(t) - y(t)|_0 \\ |x'(t) - y'(t)|_0 \end{pmatrix},$$

або, в скороченому вигляді, $a \le Lb$. Використовуючи монотонність норми $|\cdot|_*$, маємо

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)|_{*1} = |a|_* \le |L|_* |b|_* \le (r + \varepsilon) |x(t) - y(t)|_{*1},$$

тобто оператор A є оператором стиску. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай*: 1) $p \ne \delta$, $|p| h < 1/2$ *або* 2) $|p| < |\delta|$ *і функція* $f(t)$ *в рівнянні* (1) *є майже періодичною (обмеженою) відносно* t.

Тоді існує єдиний майже періодичний (обмежений) розв'язок рівняння (1) *і його можна знайти методом послідовних наближень за допомогою співвідношення* $x_{n+1}(t) = (Ax_n)(t)$ *у першому випадку, чи* $x_{n+1}(t) = (Bx_n)(t)$ — *у другому, тобто* $x_{n+1}(t)$ *є єдиним майже періодичним (обмеженим) розв'язком лінійних неоднорідних рівнянь*

$$x'_{n+1}(t) = -(\delta - p) x_{n+1}(t) + p \max_{s \in [t-h, t]} [x_n(s) - x_n(t)] + f(t),$$

або

$$x'_{n+1}(t) = -\delta x_{n+1}(t) + p \max_{s \in [t-h, t]} x_n(s) + f(t).$$

Доведення. Досить зауважити, що задача про відшукання обмежених розв'язків рівняння (1) еквівалентна розв'язанню рівнянь $x = Ax$ або $x = Bx$. Для розгляду майже періодичного випадку достатньо зауважити, що оператор A переводить майже періодичні функції в майже періодичні.

Зауваження. **1.** Теорема 2 містить результати [7, 8], які є дуже частковими випадками. **2.** Отже, ми довели, що рівняння (1) при всіх $p \ne \delta$ буде мати T-періодичний розв'язок, який буде єдиним при $|p| h < 1/2$, або $|p| < |\delta|$, або ж при $h \ge T$, тобто при всіх малих чи великих h. Природно виникає питання (не розв'язане тут): чи не буде розв'язок єдиним при всіх інших значеннях h?

5. Стійкість розв'язків. Теорема 3. *Якщо* $|p| < \delta e^{-\delta h}$, $f(t) \in C_b(R)$ — *єдиний обмежений розв'язок рівняння* (1), *глобально рівномірно експоненціально стійкий.*

Доведення. Нехай $y(t)$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), існування якого ми встановили в наслідку з теореми 2, і $z(t)$ — довільний інший розв'язок, який визначений при $t \geq -h$. Тоді різниця $w(t) = y(t) - z(t)$ задовольняє рівняння

$$w'(t) = -\delta w(t) + p\Big(\max_{u \in [s-h,\, s]} y(u) - \max_{u \in [t-h,\, t]} z(u)\Big), \quad t \geq 0.$$

Інтегруючи його, одержуємо

$$w(t) = e^{-\delta t} w(0) + p \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \Big(\max_{u \in [s-h,\, s]} y(u) - \max_{u \in [s-h,\, s]} z(u)\Big) ds.$$

Звідси

$$|w(t)| \leq |w(0)| e^{-\delta t} + |p| \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \max_{u \in [s-h,\, s]} |w(u)| ds. \tag{9}$$

Введемо позначення $\omega(t) = e^{\delta t} |w(t)|$. Тоді, домноживши обидві частини (9) на $e^{\delta t}$, одержимо

$$\omega(t) \leq \max_{u \in [-h,\, 0]} |\omega(u)| e^{-\delta t} + |p| e^{\delta h} \int_0^t \max_{u \in [s-h,\, s]} \omega(u)\, ds, \quad t \geq 0$$

та

$$\omega(t) \leq \max_{u \in [-h,\, 0]} \omega(u), \quad t \in [-h, 0].$$

Використавши лему 1, при $t \geq 0$ отримаємо

$$w(t) \leq \psi(t), \quad \psi = \max_{u \in [-h,\, 0]} \omega(u) + |p| e^{\delta s} \int_0^t \psi(u)\, du.$$

Накінець, $\omega(t) = e^{\delta t} |w(t)| \leq \psi(t) = \max\limits_{u \in [-h,\, 0]} \omega(u) \exp\{|p| e^{\delta h} t\}$ і тому

$$|w(t)| \leq \exp\big\{(|p| e^{\delta h} - \delta)t\big\} \max_{u \in [-h,\, 0]} \omega(u),$$

що й доводить теорему.

Теорема 4. *Припустимо, що* $p < \delta$, $w(t) \in C_b(R)$ *та справедлива нерівність*

$$e^{(\delta - p)h} |p| h < 1/2. \tag{10}$$

Тоді єдиний обмежений розв'язок рівняння (1) *глобально рівномірно експоненціально стійкий.*

Доведення. Із (10) випливає, що $|ph| < 1/2$, тому на основі наслідку з теореми 2 існує єдиний обмежений розв'язок $x^*(t)$ рівняння (1). Нехай $y(t)$ — довільний інший розв'язок (1), що визначений при $t \geq -2h$. Тоді при $t \geq 0$

$$x^*(t) - y(t) = e^{-(\delta - p)t}(x^*(0) - y(0)) +$$

$$+\int_0^t pe^{-(\delta-p)(t-\sigma)}\left[\max_{u\in[\sigma-h,\,\sigma]}(x^*(u)-x^*(\sigma))-\max_{u\in[\sigma-h,\,\sigma]}(y(u)-y(\sigma))\right]d\sigma.$$

Звідси

$$|x^*(t)-y(t)| \le$$

$$\le e^{-(\delta-p)t}|x^*(0)-y(0)|+\int_0^t pe^{-(\delta-p)(t-\sigma)}\left[h\max_{u\in[\sigma-h,\,\sigma]}|x^{*\prime}(u)-y'(u)|\right]d\sigma.$$

Поклавши $\delta-p=\nu$, $|x^{*\prime}(t)-y'(t)|\,e^{\nu h}=w(t)$, $|x^*(t)-y(t)|\,e^{\nu h}=v(t)$, при $t\in\in[0,+\infty)$ одержимо

$$v(t)\le v(0)+\int_0^t e^{\nu h}|p|\,h\max_{u\in[\sigma-h,\,\sigma]}w(u)d\sigma,$$

$$w(t)\le \nu v(t)+|p|\,he^{\nu h}\max_{u\in[t-h,\,t]}w(u).$$

Якщо ж $t\in[-h,0]$, то $v(t)\le\alpha=\max_{u\in[-h,\,0]}v(u)$, $w(t)\le\gamma=\max_{u\in[-h,\,0]}w(u)$. Покладемо далі $\kappa=\beta=e^{\nu h}|p|\,h$, $\mu=\nu$ (з умови теореми випливає, що $\kappa=e^{\nu h}|p|\,h<<1/2$). Використовуючи лему 2, одержуємо

$$v(t)\le c_1(\alpha,\gamma,\mu)\,e^{\frac{\beta\mu}{1-\kappa}t},\ \text{або}\ |x^*(t)-y(t)|\le c_1(\alpha,\gamma,\mu)\exp\left\{\left(\frac{\beta\mu}{1-\kappa}\right)-\nu t\right\},\ t\ge0.$$

Таким чином, умова $\dfrac{\beta\mu}{1-\kappa}<\nu$ гарантує глобальну рівномірну експоненціальну стійкість періодичного розв'язку. Теорему доведено.

1. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. – Киев, 1977. – С. 221 – 247.
2. *Магомедов А. Р.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с максимумами // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1993. – №18. – С.3 – 6.
3. *Magomedov A. R.* Existence and uniqueness theorems for solutions of differential equations with maxima that contain a functional parameter // Arch. Math. – 1992. – №3-4. – P. 139 – 154.
4. *Bainov D. D., Kazakova N. G.* A finite-difference method for solving the periodic problem for autonomous differential equations with maxima // Math. J. Toyama Univ. – 1992. – **15**. – P. 1 – 13.
5. *Jankovski T.* Systems of differential equations with maxima // Допов. НАН України. – 1997. – №8. – С.57 – 60.
6. *Xu H., Liz E.* Boundary value problems for differential equations with maxima // Nonlinear Stud. – 1996. – **3**, №2. – P. 231 – 241.
7. *Sarafova G. Kh., Bainov D. D.* Application of A. M. Samoilenko's numerical-analitic method to the investigation of periodic linear differential equations with maxima // Stud. sci. math. hung. – 1982. – **17**. – №1-4. – P. 221 – 228.
8. *Рябов Ю. А., Магомедов А. Р.* О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с максимумами // Мат. физика. – 1978. – Вып. 23. – С.3 – 9.
9. *Самойленко А. М., Трофимчук О. П., Банцур Н. Р.* Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами // Допов. НАН України. – 1998. – №1. – С.47 – 52.
10. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
11. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
12. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.

Одержано 02.10.97