УДК 514.774.8, 514.752.7

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т України „КПІ")

КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛЕЙ ЯКОБИ НА МНОГООБРАЗИИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

On a Riemann manifold with negative curvature, we obtain estimates of covariant derivatives of the Jacobi fields along geodesic.

На рімановому многовиді від'ємної кривизни одержано оцінки коваріантних похідних полів Якобі вздовж геодезичної.

1. Постановка задачи. Пусть M — полное односвязное n-мерное риманово многообразие неположительной кривизны с метрическим тензором $g_{jk}(x)$ и метрикой $\rho(x, y)$. При решении ряда задач нетривиальной (в силу непараллелизуемости) является проблема выбора ортонормированного базиса касательных пространств в окрестности точки $x \in M$. Например, пусть $A(x)$ — гладкое поле симметричных операторов (поле тензоров $(1\,;1)$), т. е. при каждом $x \in M$ $A(x)$ — симметричный линейный оператор в T_xM, а $f(x) = \operatorname{tr} A(x)$. Для вычисления градиента

$$(\operatorname{grad} f(x), u) = \sum_{k}^{u} [(\nabla_u(A(x)e_k(x)), e_k(x)) - (A(x)e_k(x), \nabla_u e_k)]$$

необходимо определить поля ортов $e_k(x)$ в окрестности точки x. Естественным представляется выбор полугеодезического ортобазиса, т. е. $e_1(x) = \dot\gamma(\rho)$, где геодезическая γ исходит из фиксированной точки $y = \gamma(0)$, $x = \gamma(\rho(x, y))$, а для $k > 1$ $e_k(x)$ есть значения полей Якоби вдоль γ [1]. В данной работе рассмотрен именно такой способ построения ортобазиса (его элементы образуют гладкие поля всюду, кроме точки y) и получены представления для ковариантных производных этих полей и их оценки.

2. Обозначения, определения, условия. Скалярное произведение и норму в T_xM обозначим соответственно $(\ ,\ )$ и $\|\ \|$. Пусть

$$R(x)(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y} Z$$

— форма кривизны многообразия M (X, Y, Z — векторные поля). Тензор Риччи и скалярная кривизна определяются соотношениями

$$\operatorname{Ric}(x)(X, Y) = \sum_k (R(x)(x, e_k)Y, e_k), \qquad r(x) = \sum_k \operatorname{Ric}(x)(e_k, e_k),$$

где $\{e_k\}$ — произвольный ортобазис в T_xM. Заметим, что эти определения отличаются знаком от общепринятых [2]. Сформулируем условия на тензор кривизны:

1) $(R(x)(U, V)U, V) \ge 0$ для любой $x \in M$ и произвольных векторных полей U, V, т. е. M — многообразие неположительной кривизны;

2) $\sum_k |R(x)(X, e_k)Y, \varphi_k| < c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X, X)\operatorname{Ric}(x)(Y, Y)}$, где константа c не зависит от x;

3) для любой геодезической γ

$$\int_0^\infty s\, r(\gamma(s))\, ds < c,$$

где c не зависит от γ.

***Замечание* 1.** Из условия 1 в силу теоремы Картана – Адамара следует диффеоморфность при каждом $x \in M$ экспоненциального отображения

$$\operatorname{Exp}_x U = \gamma(\|U\|), \qquad \operatorname{Exp}_x^{-1} y = \rho(x, y)\,\dot\gamma(0),$$

где γ — геодезическая; $\gamma(0) = x$; $\dot\gamma(0) = \dfrac{U}{\|U\|}$.

Из условия 2 следует оценка для нормы

$$\|R(x)(X, Y)Z\|^2 \le (B(x)Y, Y),$$

где $B(x)$ — положительный оператор в T_xM,

$$\operatorname{tr} B(x) < c^2 \operatorname{Ric}(x)(X, X) \operatorname{Ric}(x)(Y, Y),$$

а также неравенство

$$\sum_k \|R(x)(A(x)e_k, U)\varphi_k\| \le \sigma^2(A(x))\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U, U)\, r(x)},$$

где σ^2 — норма Гильберта – Шмидта.

Условие 3 гарантирует стохастическую полноту M [3]. Пусть γ — геодезическая, а поле $X(s) \equiv X(\gamma(s))$ определено вдоль γ. Обозначим $\nabla_{\dot\gamma(s)} X(s)$ через $X'(s)$, а оператор параллельного переноса вдоль γ из $T_{\gamma(s)}M$ в $T_{\gamma(t)}M$ через $\Phi(t, s)$.

Определение 1. *Пусть γ — геодезическая, $Z(s)$ — поле Якоби вдоль γ, т. е. решение уравнения Якоби*

$$Z''(s) = R(\gamma(x))(\dot\gamma(s), Z(s)\,\dot\gamma(s)). \tag{1}$$

Определим эволюционные операторы $\mathcal{U}_{jk}(s, s_0)$ равенствами

$$Z(s) = \mathcal{U}_{11}(s, s_0) Z(s_0) + \mathcal{U}_{12}(s, s_0) Z'(s_0),$$

$$Z'(s) = \mathcal{U}_{21}(s, s_0) Z(s_0) + \mathcal{U}_{22}(s, s_0) Z'(s_0)$$

(если $s_0 = 0$, то $\mathcal{U}_{jk}(s, s_0) = \mathcal{U}_{jk}(s)$).

***Замечание* 2.** Если кривизна M вдоль γ нулевая, то $\mathcal{U}_{12}(s, s_0) = (s - s_0)\Phi(s, s_0)$, $\mathcal{U}_{22}(s, s_0) = \Phi(s, s_0)$. Если $Z(0) = 0$, то $Z(s) = \mathcal{U}_{12}(s) Z'(0)$, $Z'(s) = \mathcal{U}_{22}(s) Z'(0)$. В частности, $\mathcal{U}_{12}(s)\,\dot\gamma(0) = s\,\dot\gamma(s)$.

Определение 2. *Базисными полями Якоби вдоль геодезической γ, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$ называются n решений $Z_1(s), \ldots, Z_n(s)$ уравнения* (1) *такие, что $Z_k(0) = 0$, $Z_k(\rho)$ образуют в T_xM полугеодезический ортобазис* $\Big($*т. е.* $Z_1(s) = \dfrac{s}{\rho}\dot\gamma(s)$, $Z_k(s) \perp \dot\gamma(s)\Big)$.

***Замечание* 3.** Вообще говоря, краевая задача для уравнения второго порядка (1) не всегда однозначно разрешима: достаточным условием однозначной разрешимости является неположительность кривизны.

***Замечание* 4.** Для $0 < s < \rho$ базисные поля Якоби образуют базис в $T_{\gamma(s)}M$.

3. Оценки скорости роста полей Якоби. Излагаемые здесь результаты являются следствием уравнения Якоби (1). Пусть $Z(s)$ — поле Якоби вдоль γ, $Z(0) = 0$.

Из неположительности кривизны многообразия следует выпуклость вниз функции $\|Z(s)\|$, т. е. справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если M удовлетворяет условию* 1 *и* $Z(0) = 0$, *то выполняются неравенства*

$$\|Z'(0)\| \le \frac{\|Z(\tau)\|}{\tau} \le \frac{\|Z(s)\|}{s}, \qquad 0 < \tau < s,$$

$$s^2 |Z'(s)|^2 \ge s^2 (Z'(s), Z(s)) \ge \|Z(s)\|^2$$

или в терминах норм эволюционных операторов

$$1 \le \frac{\|\mathcal{U}_{12}(\tau)\|}{\tau} \le \frac{\|\mathcal{U}_{12}(s)\|}{s} \le \|\mathcal{U}_{22}(s)\|, \qquad \|\mathcal{U}_{12}(\tau)\,\mathcal{U}_{12}^{-1}(s)\| \le \frac{\tau}{s}.$$

Следствие. *В условиях утверждения* 1 *справедливы неравенства*

$$|Z'(s)| \le \|Z'(0)\| \exp\left\{\int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau\right\}.$$

Доказательство. Из уравнения Якоби следует цепочка

$$\frac{d}{ds}\|Z'(s)\|^2 = 2(R(\gamma(s))(\dot\gamma, Z(s))\dot\gamma, Z'(s)) \le$$

$$\le 2\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\|Z(s)\|\,\|Z'(s)\| \le 2s\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\,\|Z'(s)\|^2.$$

Интегрирование полученного неравенства завершает доказательство.

Замечание 5. Если выполнено условие 3, то $\|Z'(s)\|$ ограничена.

Следующий результат устанавливает оценку $\|Z'(s)\|$ при заданных краевых условиях для уравнения Якоби.

Лемма 1. *Пусть $Z(s)$ — поле Якоби вдоль γ, $Z(0) = 0$ и выполнено условие* 1. *Тогда для $s \le \rho$ выполняется неравенство*

$$\|Z'(s)\| \le \frac{\|Z(\rho)\|}{\rho}\left(1 + \int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau\right),$$

или в терминах эволюционных операторов

$$\left\|\mathcal{U}_{22}(s)\left(\frac{\mathcal{U}_{12}(\rho)}{\rho}\right)^{-1}\right\| \le 1 + \int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство. Из уравнения Якоби следует равенство

$$Z'(s) = \frac{Z(s)}{s} + \int_0^s \frac{\tau}{s}\Phi(s,\tau)\, R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), Z(\tau))\,\dot\gamma(\tau)\, d\tau,$$

откуда

$$\|Z'(s)\| \le \frac{\|Z(s)\|}{s} + \int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\frac{\|Z(\tau)\|}{\tau}\, d\tau \le$$

$$\le \frac{\|Z(s)\|}{s}\left(1 + \int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau\right).$$

Применение неравенства $\dfrac{\|Z(s)\|}{s} \le \dfrac{\|Z(\rho)\|}{\rho}$ завершает доказательство.

***Замечание* 6.** Если выполнено условие 3, то $\| Z'(s) \| \le c \frac{\|Z(\rho)\|}{\rho}$.

Сейчас уже заметна роль, которую играет оператор $\frac{\mathcal{U}_{12}(s)}{s}$. Положим

$$K(s) = \frac{1}{s} \Phi(0, s)\, \mathcal{U}_{12}(s), \qquad K(0) = I.$$

В случае нулевой кривизны $K(s) = I$.

Теорема 1. *Если выполнено условие* 1, *то*

$$1 \le |\det K(s)| \le \exp\left\{ \int_0^s \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau \right\}.$$

Доказательство. Левое неравенство следует из утверждения 1.

Запишем тождество

$$K(s) = F(s)\, \Phi(0, s)\, \mathcal{U}_{22}(s),$$

где $F(s) = K(s)\, \mathcal{U}_{22}^{-1}(s)\, \Phi(s, 0)$ — оператор в $T_{\gamma(0)}M$.

Покажем, что $F(s)$ симметричен, положителен и $F(s) < I$. Пусть $X(s)$, $Y(s)$ — поля Якоби вдоль γ, $X(0) = Y(0) = 0$. Тогда, полагая

$$V(s) = \Phi(0, s) X'(s), \qquad W(s) = \Phi(0, s)\, Y'(s),$$

получаем

$$(F(s)\, V(s), W(s)) = \frac{1}{s}(X(s), Y'(s)) = \frac{1}{s}(X'(s), Y(s)) = (V(s), F(s)\, W(s))$$

и аналогично

$$(F(s)\, V(s), V(s)) = \frac{(X'(s), X(s))}{s} \le (X'(s), X'(s)) = (V(s), V(s)).$$

Из доказанного следует, что $0 < \det F(s) < 1$, т. е.

$$|\det K(s)| < |\det \Phi(0, s)\, \mathcal{U}_{22}(s)|.$$

С другой стороны, уравнение Якоби

$$(Z')'(s) = s R(\gamma(s))\left(\dot\gamma(s), \frac{Z(s)}{s}\right) \dot\gamma(s) \equiv C(s) \frac{Z(s)}{s}$$

в терминах функции $H(s) = \Phi(0, s)\, F'(s) \in T_{\gamma(0)}M$ принимает вид

$$\dot H(s) = \Phi(0, s)\, C(s)\, \Phi(s, 0)\, F(s)\, H(s), \qquad H(0) = Z'(0).$$

Эволюционным оператором этого уравнения является $\Phi(0, s)\, \mathcal{U}_{22}(s)$, и по формуле Лиувилля

$$|\det \Phi(0, s)\, \mathcal{U}_{22}(s)| = \exp\left\{ \int_0^s \tau \operatorname{tr} \Phi(0, \tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau, 0)\, F(\tau)\, d\tau \right\}$$

оценка показателя из условия $\| F(\tau) \| < 1$ и завершает доказательство теоремы.

Пусть геодезическая γ соединяет точки x и y. Обозначим через $e(x, y)$ единичный касательный к $\gamma(x)$ вектор, направленный к y.

Следствие. *Пусть* M *дополнительно удовлетворяет условию* 3. *Рас-*

смотрим $\int_M f(y)\sigma(dy)$, *где* σ *— объем на многообразии,* f *— интегрируемая на* M *функция. Тогда замена*

$$y = \mathrm{Exp}_x u, \qquad u = \rho(x, y) e(x, y)$$

приводит к равенству

$$\int_M f(y)\sigma(dy) = \int_{T_x M} f(\mathrm{Exp}_x u) J(x, u)\sigma_x(du),$$

где σ_x *— объем на* $T_x M$, *а якобиан*

$$1 \le J(x, u) \le |\det K(\|u\|)| < c.$$

Доказать нужно лишь равенство. По общему правилу вычисления плотности мер при преобразованиях

$$J(x, u) = \sqrt{\frac{\det G(\mathrm{Exp}_x u)}{\det G(x)}}\left|\det \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Exp}_x u\right|,$$

G — метрический тензор. В свою очередь, дифференциал

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Exp}_x u\right) V = \frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{Exp}_x(u + \varepsilon V)\Big|_{\varepsilon = 0} = Z(\|u\|) + (\dot\gamma(0), V)\dot\gamma(\|u\|),$$

где γ — геодезическая; $\gamma(0) = x$, $\gamma(\|u\|) = y$, а поле Якоби порождено вариацией $\varphi(s, \varepsilon)$,

$$\varphi(0, \varepsilon) = x, \qquad \dot\varphi(0, \varepsilon) = \frac{u + \varepsilon V}{\|u + \varepsilon V\|},$$

т. е. $Z(0) = 0$, $Z'(0) = \dfrac{1}{\|u\|}\left(V - (\dot\gamma(0), V)\dot\gamma(0)\right)$.

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Exp}_x u\right) V = \frac{1}{\|u\|}\mathcal{U}_{12}(\|u\|) V.$$

Отношение определителей легко выражается через коэффициенты связности $\Gamma(x)$ из соотношения $\nabla G(x) = 0$:

$$\det G(\gamma(s)) = \det G(x)\exp\left\{2\int_0^s \operatorname{tr}\Gamma(\gamma(\tau))\dot\gamma(\tau)\, d\tau\right\} = |\det\Phi(0, s)|,$$

так что

$$J(x, u) = \left|\det\frac{1}{\|u\|}\Phi(0, \|u\|)\,\mathcal{U}_{12}(\|u\|)\right| = |\det K(\|u\|)|.$$

4. Некоторые геометрические следствия. Аппарат полей Якоби позволяет получить формулу, связывающую параметры многообразия M в разных метризациях. Пусть M наделено еще одной метрикой $d(x, y)$, порожденной метрическим тензором $\tilde g_{jk}(x)$. Обозначим через $\langle U, V\rangle$ и $|U|$ соответственно скалярное произведение и норму в $T_x M$; φ — геодезические; $\widetilde{\mathrm{Exp}}_x$ — экспоненциальное отображение; $\tilde\Phi$ — оператор параллельного переноса в новой метризации. Рассмотрим в $T_x M$ отображение S, заданное равенством

$$S(U) = \widetilde{\mathrm{Exp}}_x^{-1}\mathrm{Exp}_x U = d(x, y)\dot\varphi(0),$$

где $y = \operatorname{Exp}_x U$, $\rho(x, y) = \| U \|$, $d(x, y) = | U |$.

Теорема 2. *Если в обеих метризациях кривизна M неположительна, то производная*

$$S'(u) = \left(\frac{\tilde{\mathcal{U}}_{12}(d)}{d} \right)^{-1} \frac{\mathcal{U}_{12}(\rho)}{\rho},$$

где $\mathcal{U}_{12}$ и $\tilde{\mathcal{U}}_{12}$ — эволюционные операторы уравнений Якоби вдоль γ и φ соответственно.

Доказательство. Выясним геометрический смысл соотношения

$$S'(U)\,V = \frac{d}{d\varepsilon} S(U + \varepsilon V)\Big|_{\varepsilon = 0}.$$

Варьируя геодезическую γ, получаем

$$\operatorname{Exp}_x(U + \varepsilon V) = \gamma(\| U + \varepsilon V \|, \varepsilon) \equiv y_\varepsilon,$$

$$\gamma(0, \varepsilon) = x, \qquad \dot{\gamma}(0, \varepsilon) = \frac{U + \varepsilon V}{\|U + \varepsilon V\|}$$

и для соответствующего поля Якоби $Z(s)$ вдоль γ

$$Z'(0) = \frac{1}{\|U\|}\left(V - (\dot{\gamma}(0), V)\,\dot{\gamma}(0)\right).$$

Соединим x и y_ε вариацией геодезической φ:

$$\gamma(\| U + \varepsilon V \|, \varepsilon) = \varphi\left(d(x, y_\varepsilon), \varepsilon\right)$$

и продифференцируем это равенство по ε. Обозначив через X поле Якоби вдоль φ, получим

$$(\dot{\gamma}(0), V)\,\dot{\gamma}(\rho) + Z(\rho) =$$
$$= \langle \dot{\varphi}(d), \dot{\gamma}(\rho) \rangle (\dot{\gamma}(0), V)\,\dot{\varphi}(d) + \langle \dot{\varphi}(d), Z(\rho) \rangle\,\dot{\varphi}(d) + X(d). \tag{2}$$

Так как

$$S(U + \varepsilon V) = d(x, y_\varepsilon)\,\dot{\varphi}(0, \varepsilon),$$

то

$$S'(U)\,V = \langle \dot{\varphi}(d), \dot{\gamma}(\rho) \rangle (\dot{\gamma}(0), V)\,\dot{\varphi}(0) + \langle \dot{\varphi}(d), Z(\rho) \rangle\,\dot{\varphi}(0) + d(x, y)\,X'(0),$$

и для получения утверждения теоремы в последнее равенство надо подставить

$$X'(0) = \tilde{\mathcal{U}}_{12}^{-1}(d)\,X(d), \qquad Z(\rho) = \mathcal{U}_{12}(\rho)\,Z'(0),$$

где $X(d)$ определено равенством (2).

Следствие. *Пусть M — линейное пространство, $\tilde{G}(x) = I$. Тогда*

$$y - x = \frac{\rho(x, y)}{|y - x|} \int_0^{|y-x|} \tilde{\Phi}(0, s)\,\dot{\gamma}\left(\frac{s\,\rho(x, y)}{|y - x|}\right) ds,$$

т. е. вектор $y - x$ есть результат суммирования векторов, касательных к геодезической γ, параллельно перенесенных вдоль хорд в точку x.

Доказательство. Полагая $V = U = \|U\|\,\dot{\gamma}(0)$, получаем

$$S(U) = \|U\| \int_0^1 \left(\frac{\tilde{\mathcal{U}}_{12}(\tau|U|)}{\tau|U|} \right)^{-1} \frac{\mathcal{U}_{12}(\tau\|U\|)}{\tau\|U\|}\,\dot{\gamma}(0)\,d\tau.$$

Так как $\dfrac{\mathcal{U}_{12}(t)}{t}\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(t)$, $\dfrac{\tilde{\mathcal{U}}_{12}(t)}{t} = \tilde{\Phi}(t,0)$, $S(U) = y - x$, $d(x,y) = |y-x|$, то

$$y - x = \|U\| \int_0^1 \tilde{\Phi}(0, \tau|U|)\,\dot{\gamma}(\tau\|U\|)\,d\tau,$$

и, используя замену $\tau|U| = s$, получаем нужный результат.

5. Дифференцирование полей Якоби вдоль направлений, ортогональных к геодезической. Пусть $X(s)$, $Z(s)$ — два поля Якоби вдоль геодезической γ; $\gamma(0) = y$; $\gamma(\rho(x,y)) = x$. Дифференцируя уравнение (1) вдоль поля Z $X(s)$, получаем

$$(\nabla_X Z)''(s) = R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \nabla_X Z(s))\,\dot{\gamma}(s) + f(s, X(s), Z(s)), \tag{3}$$

где

$$f(s, X(s), Z(s)) =$$
$$= 2R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), X(s))\,Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z(s))\,X'(s) +$$
$$+ (\nabla_{\dot{\gamma}} R)(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), X(s))\,Z(s) + (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z(s))\,\dot{\gamma}(s). \tag{4}$$

Из тождеств для тензора кривизны следует $f(s, X, Z) = f(s, Z, X)$.

Утверждение 2. *Пусть многообразие M удовлетворяет условию* 1; $X(0) = Z(0) = 0$, $\nabla_X Z(\rho) = \nabla_Z X(\rho)$. *Тогда* $\nabla_X Z(s) = \nabla_Z X(s)$ $\forall s$.

Доказательство следует из совпадения уравнений и краевых условий для $\nabla_X Z$ и $\nabla_Z X$.

Теорема 3. *Пусть на многообразии неположительной кривизны поля Якоби* $X(s) \perp \dot{\gamma}(s)$, $Z(s) \perp \dot{\gamma}(s)$, $X(0) = Z(0) = 0$, $\|Z(\rho)\| = 1$. *Тогда верно представление*

$$\nabla_X Z(s) = -(X'(s), Z(\rho))\,\dot{\gamma}(s) + H(s), \qquad H(s) \perp \dot{\gamma}(s),$$

и справедлива оценка

$$\|H(s)\| \le (\rho - s)\int_0^\rho \|f(\tau, X(\tau)), Z(\tau)\|\,d\tau.$$

Доказательство. Определим краевое условие $\nabla_X Z(\rho)$ следующим образом. Проведем геодезическую $\sigma(\varepsilon)$, $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(0) = X(\rho)$ и определим вариацию $\varphi(s, \varepsilon)$ геодезической γ равенствами

$$\varphi(\rho(x, \sigma(\varepsilon)), \varepsilon) = \sigma(\varepsilon), \qquad \varphi(0, \varepsilon) = y.$$

Вдоль каждой геодезической $\varphi(s, \varepsilon)$ определены поля Якоби

$$\tilde{X}(s, \varepsilon) = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}(s, \varepsilon), \qquad \tilde{X}(0, \varepsilon) = 0, \qquad \tilde{X}(s, 0) = X(s),$$

удовлетворяющие уравнению

$$\nabla^2_{\dot{\gamma}} \tilde{X} = R(\varphi)(\dot{\varphi}, \tilde{X})\,\dot{\varphi}. \tag{5}$$

Полагая вдоль кривой $\alpha(\varepsilon) = \varphi(\rho(x, y), \varepsilon)$:

$$\tilde{X}(\rho, \varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\,X(\rho) - (\Psi(\varepsilon)\,X(\rho), \dot{\varphi}(\rho, \varepsilon))\,\dot{\varphi}(\rho, \varepsilon),$$

где $\Psi(\varepsilon)$ — параллельный перенос вдоль α, определяем тем самым второе краевое условие для $\tilde{X}(s,\varepsilon)\perp\dot{\varphi}(s,\varepsilon)$.

Аналогично, положив вдоль $\alpha(\varepsilon)$

$$\tilde{Z}(\rho,\varepsilon) = \frac{\Psi(\varepsilon)\,Z(\rho) - (\Psi(\varepsilon)\,Z(\rho),\dot{\varphi}(\rho,\varepsilon))\,\dot{\varphi}(\rho,\varepsilon)}{\|\Psi(\varepsilon)\,Z(\rho) - (\Psi(\varepsilon)\,Z(\rho),\dot{\varphi}(\rho,\varepsilon))\,\dot{\varphi}(\rho,\varepsilon)\|},$$

получим

$$\nabla_{X(\rho)}\tilde{Z}(\rho,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -(Z(\rho),X'(\rho))\,\dot{\gamma}(\rho) = -(Z'(\rho),X(\rho))\,\dot{\gamma}(\rho).$$

Таким образом, для указанных в условии теоремы полей Якоби поле $\nabla_X Z(s)$ есть решение уравнения (3) с краевыми условиями $\nabla_X Z(0) = 0$, $\nabla_X Z(\rho) = -(X'(\rho),Z(\rho))\,\dot{\gamma}(\rho)$.

Доказательство представления для $\nabla_X Z(s)$ состоит в проверке равенства

$$(\nabla_X Z(s),\dot{\gamma}(s)) = -(X'(s),Z(s)),$$

для чего достаточно показать, что $-(X'(s),Z(s))$ удовлетворяет уравнению (3), скалярно умноженному на $\dot{\gamma}(s)$. Тогда ортогональная составляющая удовлетворяет уравнению

$$H''(s) = R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s),H(s))\,\dot{\gamma}(s) + f^{\perp}(s,X(s),Z(s)), \tag{6}$$

где $f^{\perp} = f - (f,\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}$.

Для получения нужной оценки разложим $H(s)$ по базисным полям Якоби Y_k, $k=2,\dots,n$:

$$H(s) = \alpha^k(s)\,Y_k(s).$$

Подставляя это разложение в (6), получаем уравнение

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha}^k(s)Y_k(s) + 2\dot{\alpha}^k(s)Y_k'(s) = f^{\perp}(s,X(s),Z(s)),\\ \alpha^k(\rho) = 0, \qquad \dot{\alpha}^k(0) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Полагая $g_{kj}(s) = (Y_k(s),Y_j(s))$, легко записать решение уравнения (7), откуда

$$H(s) = -\int_s^{\rho} g^{kj}(t)\int_0^t (f(\tau,X(\tau),Z(\tau)),Y_j(\tau))\,d\tau\,dt\,Y_k(s). \tag{8}$$

Оценивание $\|H(s)\|$ основано на полученных ранее неравенствах для $\|Z(s)\|$ и $\|Z'(s)\|$. Определим на $T_{\gamma(s)}M$ оператор

$$C(s) = \mathcal{U}_{12}(s)\,\mathcal{U}_{12}^{-1}(\rho)\,\Phi(\rho,s)$$

и рассмотрим в этом касательном пространстве полугеодезический ортобазис $e_1(s) = \dot{\gamma}(s)$, $e_k(s) = \Phi(s,\rho)\,Y_k(\rho)$. Обозначим через $c_k^r(s)$ матрицу $C(s)$ в этом базисе, а через $d_k^j(s)$ матрицу обратного оператора $C^{-1}(s)$:

$$C^{-1}(s)\,e_k(s) = d_k^r(s)e_r(s) = \Phi(s,\rho)\,V_k(\rho),$$

где V_k — поля Якоби; $V_k(0) = 0$; $V_k(s) = e_k(s)$. Используя в (8) равенства

$$g^{kj}(t) = \sum_p d_p^k(t)\,d_p^j(t), \qquad Y_k(s) = C(s)\,e_k(s),$$

приведем его к виду

$$H(s) = -\sum_p \int_s^{\rho} d_p^k(t)\, d_p^j(t) \int_0^t (f(\tau, X(\tau), Z(\tau)), C(\tau)\, e_j(\tau))\, d\tau\, dt\, C(s)\, e_k(s),$$

или в терминах полей Якоби V_k:

$$H(s) = -\sum_p \int_s^{\rho} \int_0^t (f(\tau, X(\tau), Z(\tau)), V_p(\tau))\, d\tau\, dt\, V_p(s).$$

Так как $\| V_p(t) \|$ — возрастающая и выпуклая вниз функция, $\tau \le t$, $s \le t$, то $\| V_p(\tau) \| \le \dfrac{\tau}{t} \le 1$, $\| V_p(s) \| \le \dfrac{s}{t} \le 1$ и

$$\| H(s) \| \le \int_s^{\rho} \int_0^t \| f(\tau, X(\tau), Z(\tau)) \|\, d\tau\, dt \le (\rho - s) \int_0^{\rho} \| f(\tau, X(\tau), Z(\tau)) \|\, d\tau.$$

6. Приложение. Полученные результаты позволяют, в частности, оценить лапласианы некоторых функций. Рассмотрим, например, функцию

$$a(x, y) = \operatorname{tr}\left(\mathcal{U}_{22}(\rho) \left(\frac{\mathcal{U}_{12}(\rho)}{\rho} \right)^{-1} - I \right) \equiv \operatorname{tr}(T(\rho) - I) =$$

$$= \sum_k (\rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)),$$

где Z_k — базисные поля Якоби, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$.

Если выполнено условие 1, то

$$0 \le a(x, y) \le \int_0^{\rho} \tau \operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\, d\tau.$$

Несложно получить выражение

$$\Delta a(x, y) = \rho \sum_{t,k} [(\nabla_{\dot\gamma} \nabla_{X_i}^2 Z_k(\rho), Z_k(\rho)) - (\nabla_{X_i}^2 Z_k(\rho), Z_k'(\rho))] +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(T(\rho) - T^2(\rho)) \sum_i (X_i'(\rho), X_i(\rho)) +$$

$$+ 2 \operatorname{Ric}(x)(\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)) + \rho \nabla_{\dot\gamma(\rho)} \operatorname{Ric}(x)(\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)), \tag{9}$$

где X_i — базисные поля Якоби вдоль γ.

Если предположить, что в условиях 2 и 3 константы не зависят от размерности многообразия и постулировать дополнительные условия на тензор кривизны, можно доказать, что $\Delta a(x, y)$ ограничен не зависящей от размерности константой.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 – 3 (c *не зависит от* n) *и пусть* γ — *геодезическая*; $\{ e_k(s) \}$, $\{ \varphi_k(s) \}$ — *произвольные ортобазисы в* $T_{\gamma(s)}M$. *Рассмотрим выражения*

4.1) $\displaystyle\sum_k \|(\nabla_{e_k(s)} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \varphi_k(s))\, \dot\gamma(s)\| = f_1(s)$;

4.2) $\displaystyle\sum_k \|(\nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))(e_k(s), \dot\gamma(s))\, \varphi_k(s)\| = f_2(s)$;

4.3) $\sum_{j,k} \|(\nabla_{e_k(s)} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), e_j(s))\dot\gamma(s)\|^2 = f_3^2(s)$;

4.4) $\sum_{j,k} \|(\nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))(e_j(s), \dot\gamma(s))e_k(s)\|^2 = f_4^2(s)$;

4.5) $\sum_{j,k} |((\nabla_{e_k(s)} R)(\gamma(s))(\varphi_j(s), \dot\gamma(s))e_j(s), e_k(s))| = f_5(s)$;

4.6) $\sum_{j,k} |((\nabla_{e_k(s)} \nabla_{e_j(s)} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), e_j(s))\dot\gamma(s), e_k(s))| = f_6(s)$;

4.7) $\sum_{j,k} |((\nabla_{e_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} R)(\gamma(s))(e_j(s), \dot\gamma(s))e_j(s), e_k(s))| = f_7(s)$,

где функции f_k *таковы, что*

$$\int_0^\infty s^2 f_j(s)\,ds < c, \quad j = 1, 2; \qquad \int_0^\infty s f_j(s)\,ds < c, \quad j = 3, \ldots, 7,$$

и константа c *не зависит от* γ *и от размерности.*

Тогда $|\Delta a(x, y)| < c$, *где* c *не зависит от размерности.*

Доказательство. Векторное поле $\nabla_X^2 Z(s)$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_X^2 Z(s))'' = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \nabla_X^2 Z(s))\dot\gamma(s) + F(s, X(s))Z(s),$$

где

$$F = (\nabla_{\dot\gamma} R)(\dot\gamma, X)\nabla_X Z + R(\dot\gamma, X)\nabla_X Z + R(X', \nabla_X Z)\dot\gamma +$$
$$+ R(\dot\gamma, \nabla_X Z)X' + (\nabla_X R)(\dot\gamma, \nabla_X Z)\dot\gamma + \nabla_X f,$$

векторное поле f определено равенством (4). Отсюда следует, что подынтегральную функцию в (9) можно записать в виде

$$\sum_{j,k} \int_s^\rho (F(\tau, X_i(\tau), Z_k(\tau)), Z_k(\tau))\,d\tau.$$

Кроме того, в виде такого же интеграла следует записать второе слагаемое (два последних слагаемых в (9) ограничены). При оценивании подынтегральной функции надо воспользоваться приведенными выше результатами (в частности, теоремой 3). В результате подынтегральная функция оценивается выражением вида $\frac{s^2}{\rho} f(s)$, где $\int_0^\infty s f(s)\,ds$ ограничен, откуда и следует утверждение теоремы.

1. *Молчанов С. А.* Диффузионные процессы и риманова геометрия // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 1. – С. 3–59.
2. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, 1971. – 343 с.
3. *Григорьян А. А.* Стохастически полные многообразия и суммируемые гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 1102–1108.

Получено 14.11.96