УДК 319.55+530.145

Ю. П. Вирченко (Ин-т монокристаллов НАН Украины, Харьков)

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕШЕТОЧНОГО ГАЗА

We consider models of statistical mechanics of the type of lattice gas with attracting interaction of the most general kind. We suggest the method for obtaining inequalities which connect multipoint correlation functions of different orders. This method allows, on the one hand, to strengthen similar inequalities which may be obtained within the framework of FKG method and, on the other hand, to obtain new inequalities. We introduce a notion of duality for models of the lattice gas. We show that if, under the transformation $p \Rightarrow 1-p$, the correlation inequalities for a model with attraction turn to inequalities which are also satisfied, then the correlation functions of dual model is subordinated to the inequalities of this sort.

Розглядаються моделі статистичної механіки типу граткового газу із взаємодією притягання загального типу. Запропоновано метод одержання нерівностей, що пов'язують багатоточкові кореляційні функції різних порядків. Цей метод дозволяє, з одного боку, посилити аналогічні нерівності, які можуть бути отримані у рамках методу FKG, а з іншого — одержати нові нерівності. Вводиться поняття дуальності для моделей граткового газу. Показано, що коли кореляційні нерівності для моделі з притяганням при перетворенні $p \Rightarrow 1-p$ переходять у відповідні нерівності, які також виконуються, то останнім підкоряються і кореляційні функції дуальної моделі.

1. Модель решеточного газа с притягивающим взаимодействием между частицами, изоморфная модели Изинга, является простейшей нетривиальной моделью, которая описывается случайным гиббсовским полем на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d = 2, 3$, имеющим свойство неустойчивости по отношению к малым изменениям определяющего его гамильтониана [1]. Именно, будучи заданным на каждом конечном подмножестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ посредством гиббсовского распределения вероятностей, связанного с определенным гамильтонианом H_Λ, который является функционалом от сужения на Λ случайных реализаций, это случайное поле имеет предельное распределение вероятностей на всей решетке $\mathbb{Z}^d$, разрывным образом зависящее от параметров гамильтониана. Эта разрывная зависимость проявляется в разрывной зависимости некоторых математических ожиданий, что с физической точки зрения интерпретируется как проявление фазового перехода в описываемой статистической системе. В частности, модель решеточного газа описывает таким образом фазовый переход жидкость-газ. Для качественного анализа, позволяющего установить наличие указанной неустойчивости, оказываются очень важными различные априорные неравенства, которым подчинены многоточечные условные математические ожидания по распределению вероятностей случайного поля. В физической терминологии, которой мы будем придерживаться, эти математические ожидания называются корреляционными функциями системы. В работах [2, 3] Р. Б. Гриффитсом в рамках модели Изинга получен набор неравенств для многоточечных спиновых корреляционных функций, а затем в работе [4] справедливость неравенств Гриффитса была доказана для всех возможных спиновых моделей с гамильтонианом так называемого ферромагнитного типа. Эти неравенства оказались очень полезными для исследования характера зависимости корреляционных функций от параметров гамильтониана, определяющего случайное поле с ферромагнитным взаимодействием. В дальнейшем техника получения „корреляционных" неравенств была усовершенствована и обобщена в работе [5] (см. также монографию [6] и обзор [7]), в связи с чем возник термин FKG-неравенства.

В настоящей работе рассматриваются случайные поля, связанные со статистическими моделями, родственными моделям Изинга ферромагнитного типа, которые будем называть решеточными газами с притяжением между частицами. Предлагается простой метод, который позволяет получить неравенства, усиливающие аналогичные неравенства для корреляционных функций, которые получаются для рассматриваемого класса моделей на основе схемы FKG.

2. Пусть $\{\rho(r)\}$ — случайное поле с реализациями $\rho(r)$, $r \in \Lambda$, принимающими значения $0, 1$, где подмножество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ конечно. Здесь и далее символ $\subset$ обозначает отношение точного включения в отличие от используемого далее символа $\subseteq$. Точки $\mathbb{Z}^d$ будем называть узлами решетки, а число d — ее размерностью. Пусть для каждого конечного подмножества $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ задано число $\mathcal{J}(\Delta)$ ($\mathcal{J}(\varnothing) = 0$), которое является положительным, если число узлов $\nu(\Delta)$ в множестве Δ больше 1. (Если для некоторого Δ выполняется $\mathcal{J}(\Delta) = 0$, $\nu(\Delta) > 1$, то основной результат статьи также имеет место ввиду возможности предельного перехода $\mathcal{J}(\Delta) \to 0$ для этого Δ.) Функционал

$$H_\Lambda = - \sum_{\Delta:\, \Delta \subseteq \Lambda} \mathcal{J}(\Delta)\, \rho(\Delta),$$

где

$$\rho(\Delta) = \prod_{r \in \Delta} \rho(r), \qquad \rho(\{r\}) = p(r),$$

определенный на сужениях на Λ реализаций случайного поля, будем называть гамильтонианом решеточного газа с притягивающим взаимодействием.

Распределение вероятностей гиббсовского случайного поля с гамильтонианом H_Λ определяется в два этапа. Сначала на основе гамильтониана H_Λ определяется распределение вероятностей

$$P_\Lambda[\rho] = \mathbb{P}\{\rho(r);\ r \in \Lambda\} = Z^{-1}_{\Lambda, H} \exp(-H_\Lambda),$$

$$Z_{\Lambda, H} = \sum_{\{\rho(r);\, r \in \Lambda\}} \exp(-H_\Lambda),$$

затем вероятности измеримых случайных событий $\mathfrak{A}$ определяются как пределы

$$\mathbb{P}\{\mathfrak{A}\} = \lim_{\Lambda \to \mathbb{Z}^d} P_\Lambda\{\mathfrak{A} \cap \Omega_\Lambda\},$$

где Ω_Λ — множество реализаций поля на Λ. Далее будем обозначать математические ожидания, связанные с распределением вероятностей $\mathbb{P}$, угловыми скобками, т. е. для любого функционала $F[\rho]$ по определению имеем $\mathbb{E}\, F[\rho] = \langle F[\rho] \rangle$. Корреляционные функции случайного поля $\{\rho(r)\}$ определим равенствами

$$\langle \rho(\Delta) \rangle = \mathbb{P}\{\rho:\ \rho(r) = 1,\ r \in \Delta\}.$$

Наряду с введенными таким образом корреляционными функциями введем также функции

$$\langle \overline{\rho}(\Delta) \rangle = \mathbb{P}\{\rho:\ \rho(r) = 0,\ r \in \Delta\},$$

где

$$\overline{\rho}(\Delta) = \prod_{r \in \Delta} (1 - \rho(r)).$$

3. Сформулируем теперь основное утверждение настоящей работы.

Теорема 1. *Корреляционные функции* $\langle \rho(\Delta) \rangle$, $\langle \overline{\rho}(\Delta) \rangle$ *гиббсовского случайного поля решеточного газа с гамильтонианом* H_Λ *удовлетворяют неравенствам*

$$\langle \rho(\Delta \cup \Delta') \rangle \langle \rho(\Delta \cap \Delta') \rangle \geq \langle \rho(\Delta) \rangle \langle \rho(\Delta') \rangle, \tag{1}$$

$$\langle \overline{\rho}(\Delta \cup \Delta') \rangle \langle \overline{\rho}(\Delta \cap \Delta') \rangle \geq \langle \overline{\rho}(\Delta) \rangle \langle \overline{\rho}(\Delta') \rangle. \tag{2}$$

(Неравенство (1) без множителя $\langle \rho(\Delta \cap \Delta') \rangle$ может быть также получено из неравенства FKG для гиббсовской меры, определяемой гамильтонианом H_Λ.)

Доказательство. 1. Введем сначала обозначения

$$\zeta\{\rho\} = \prod_{r:\, \rho(r)=1} \zeta_r, \qquad \zeta_r = \exp \mathcal{I}(\{r\}),$$

и положим

$$P_\Lambda\{\rho\} = Z_{\Lambda,H}^{-1} \zeta\{\rho\} \exp\left[\sum_{\Delta \subseteq \Lambda} I(\Delta)\rho(\Delta)\right], \tag{3}$$

$$Z_{\Lambda,H} = \sum_{\{\rho(r)\}} \zeta\{\rho\} \exp\left[\sum_{\Delta \subseteq \Lambda} I(\Delta)\rho(\Delta)\right], \tag{4}$$

где $I(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta)$ при $v(\Delta) \geq 2$ и $I(\Delta) = 0$ при $v(\Delta) = 0, 1$. Кроме того, здесь и далее под реализациями $\rho(r)$ подразумеваются их сужения на Λ, т. е. элементы множества Ω_Λ. Введем теперь суммы

$$Z(\Delta) = \left[\prod_{r \in \Lambda} (1+\zeta_r)\right]^{-1} \sum_{\{\rho(r)\}} \rho(\Delta)\zeta\{\rho\} \exp\left[\sum_{\Gamma \subseteq \Lambda} I(\Gamma)\rho(\Gamma)\right].$$

Очевидно, что неравенство (1) до перехода к пределу $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ эквивалентно следующему неравенству:

$$Z(\Delta \cap \Delta') Z(\Delta \cup \Delta') \geq Z(\Delta) Z(\Delta'). \tag{5}$$

Воспользовавшись разложением экспоненты в выражении $\exp\left[\sum_{\Gamma \subseteq \Lambda} I(\Gamma)\rho(\Gamma)\right]$ в ряд, представим $Z(\Delta)$ в виде

$$Z(\Delta) = \left[\prod_{r \in \Lambda} (1+\zeta_r)\right]^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_l)} \prod_{i=1}^{l} I(\Gamma_i) \sum_{\{\rho(r)\}} \rho(\Delta \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_l)\zeta\{\rho\},$$

где использовано тождество

$$\rho(\Gamma)\rho(\Gamma') = \rho(\Gamma \cup \Gamma').$$

Суммирование $\sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_l)}$ в последней формуле выполняется по всем возможным упорядоченным наборам $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$ подмножеств множества Λ. Выполним суммирование по реализациям $\rho(r) \in \Omega_\Lambda$ с помощью формулы

$$\sum_{\{\rho(r)\}} \rho(\Upsilon)\zeta\{\rho\} = \left(\prod_{r\in\Upsilon}\zeta_r\right)\left(\prod_{r\in\Lambda\setminus\Upsilon}(1+\zeta_r)\right),$$

которая связана с тем, что слагаемые, у которых $\rho(r) = 0$, хотя бы в одном узле $r \in \Upsilon$ равны нулю. В результате суммирования получим

$$Z(\Delta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_l)}\left(\prod_{i=1}^{l} I(\Gamma_i)\right)\xi\left\{\bigcup_{i=1}^{l}(\Gamma_i\cup\Delta)\right\}, \tag{6}$$

где

$$\xi\{\Gamma\} = \prod_{r\in\Gamma}\xi_r,\ \xi_r = \zeta_r(1+\zeta_r)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m)}\left(\prod_{i=1}^{m} I(\Gamma_i)\right)\sum_{a\subseteq E_m}\xi\left\{\bigcup_{i\in a}(\Gamma_i\cup\Delta)\right\}\xi\left\{\bigcup_{i\in E_m\setminus a}(\Gamma_i\cup\Delta')\right\}, \tag{7}$$

$$E_m = (1, \ldots, m).$$

Переставляя суммы $\sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m)}$, $\sum_{a\subseteq E_m}$ и переобозначая подмножества Γ_i, по которым производится суммирование, по правилу $(\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_l}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$, $(i_1, \ldots, i_l) = a$, и $(\Gamma_{i'_1}, \ldots, \Gamma_{i'_{m-l}}) \Rightarrow (\Gamma_{l+1}, \ldots, \Gamma_m)$, $(i'_1, \ldots$ $\ldots, i'_{m-l}) = E_m \setminus a$ для каждого фиксированного набора a индексов из E_m, получаем, что сумма (7) есть не что иное как произведение $Z(\Delta)Z(\Delta')$, где функции $Z(\Delta)$ и $Z(\Delta')$ представлены рядами (6). Заменяя в полученном таким образом тождестве $\Delta' \Rightarrow \Delta\bigcup\Delta'$ и $\Delta \Rightarrow \Delta\bigcap\Delta'$, находим, что справедливо тождество

$$Z(\Delta\cap\Delta')Z(\Delta\cup\Delta') = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m)}\left(\prod_{i=1}^{m} I(\Gamma_i)\right)\times$$

$$\times\sum_{a\subseteq E_m}\xi\left\{\bigcup_{i\in a}\Gamma_i\cup(\Delta\cap\Delta')\right\}\xi\left\{\bigcup_{i\in E_m\setminus a}(\Gamma_i\cup\Delta\cup\Delta')\right\}. \tag{8}$$

Сравнивая теперь (7) и (8) и учитывая условие $I(\Gamma) > 0$, видим, что для доказательства (5) достаточно убедиться в справедливости при любом m и любом наборе подмножеств $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$ следующего неравенства:

$$\sum_{a\subseteq E_m}\xi\{\Gamma(a)\cup(\Delta\cap\Delta')\}\xi\{\overline{\Gamma}(a)\cup\Delta\cup\Delta'\} \geq$$

$$\geq \sum_{a\subseteq E_m}\xi\{\Gamma(a)\cup\Delta\}\xi\{\overline{\Gamma}(a)\}\cup\Delta'\}, \tag{9}$$

где $\Gamma(a) = \bigcup_{i \in a} \Gamma_i$, $\overline{\Gamma}(a) = \bigcup_{i \in E_m \setminus a} \Gamma_i$.

Неравенство (9) мы докажем индукцией по числу точек в $\left(\bigcup_{i \in E_m} \Gamma_i\right)$. Если все Γ_i пусты, то (9) превращается в тождество

$$\xi\{\Delta \cup \Delta'\}\xi\{\Delta \cap \Delta'\} = \xi\{\Delta\}\xi\{\Delta'\}.$$

Предположив справедливость (9) при $v\left(\bigcup_{i \in E_m} \Gamma_i\right) \le n$, построим индукционный шаг к случаю $v\left(\bigcup_{i \in E_m} \Gamma_i\right) = n + 1$. Для построения индукционного шага достаточно рассмотреть случай, когда пересечение множества $\left(\bigcup_{i \in E_m} \Gamma_i\right)$ с Δ, либо с Δ' не пусто, так как в противном случае (9) делением на $\xi\{\Delta\}\xi\{\Delta'\}$ сводится к равенству. Далее, если $\Delta = \Delta'$, то (1) есть точное равенство. Тогда достаточно рассмотреть случай, когда множество $(\Delta \setminus \Delta') \cup (\Delta' \setminus \Delta) = \varnothing$ и найдется точка r из этого множества такая, что множество индексов $c = \{i : r \in \in \Gamma_i\}$ не пусто. При этом для определенности положим $r \in \Delta'$. Тогда перепишем (9) в эквивалентном виде, выделив явно зависимость от ξ_r и разделив на ξ_r:

$$\sum_{a \subseteq E_m \setminus c} \xi\{\Gamma^{(r)}(a) \cup (\Delta^{(r)} \cap \Delta'^{(r)})\}\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a) \cup \Delta^{(r)} \cup \Delta'^{(r)}\} +$$

$$+ \xi_r \sum_{b:\, \varnothing \ne b \subset c} \sum_{a \subseteq E_m \setminus c} \left(\xi\{\Gamma^{(r)}(a \cup b) \cup (\Delta^{(r)} \cap \Delta'^{(r)})\} \times\right.$$

$$\left.\times\, \xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a \cup b) \cup \Delta^{(r)} \cup \Delta'^{(r)}\}\right) \ge$$

$$\ge \sum_{a \subseteq E_m \setminus c} \xi\{\Gamma^{(r)}(a) \cup \Delta^{(r)}\}\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a) \cup \Delta'^{(r)}\} +$$

$$+ \xi_r \sum_{b:\, \varnothing \ne b \subset c} \sum_{a \subseteq E_m \setminus c} \xi\{\Gamma^{(r)}(a \cup b) \cup \Delta^{(r)}\}\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a \cup b) \cup \Delta'^{(r)}\}, \qquad (10)$$

где $\Delta^{(r)} = \Delta \setminus \{r\}$, $\Delta'^{(r)} = \Delta' \setminus \{r\}$, $\Gamma_i^{(r)} = \Gamma_i \setminus \{r\}$, $i = 1, \ldots, m$, $\Gamma^{(r)}(a) = \bigcup_{i \in a} \Gamma_i^{(r)}$. Обе части неравенства (10) линейны по ξ_r. Тогда для доказательства его справедливости достаточно убедиться, что оно выполняется на концах отрезка изменения переменной ξ_r, т. е. в точках $\xi_r = 0, 1$. При $\xi_r = 0$ получаем неравенство (9), в котором набор подмножеств Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, заменен на набор $\Gamma_i^{(r)}$, $i \in E_m \setminus c$, Δ' заменено на $\Delta'^{(r)} \cup \Gamma^{(r)}(c)$, а Δ — на $\Delta^{(r)}$. Полученное таким образом неравенство выполняется по предположению индукции, так как $v\left(\bigcup_{i \in E_m \setminus c} \Gamma_i^{(r)}\right) \le n$. При $\xi_r = 1$ неравенство (10) имеет вид неравенства (9), в котором Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, Δ, Δ' заменены соответственно на $\Gamma_i^{(r)}$, $\Delta^{(r)}$, $\Delta'^{(r)}$ и которое также справедливо по предположению индукции, так как $v(\Gamma^{(r)}(E_m)) = n$. Этим построение индукционного шага завершается и, таким образом, справедливость неравенства (9), а вместе с тем и неравенства (1) доказана.

2. Доказательство неравенства (2) проводим по той же схеме, что и доказательство неравенства (1). Определив функцию

$$\bar{Z}(\Delta) = \left[\prod_{r \in \Lambda \setminus \Delta} (1 + \zeta_r)\right]^{-1} \sum_{\{\rho(r)\}} \bar{\rho}(\Delta)\zeta\{\rho\} \exp\left[\sum_{\Gamma \subseteq \Lambda} I(\Gamma)\rho(\Gamma)\right], \qquad (11)$$

и воспользовавшись определениями (3), (4), представим неравенство (2) в виде

$$\bar{Z}(\Delta \cup \Delta')\,\bar{Z}(\Delta \cap \Delta') \geq \bar{Z}(\Delta)\,\bar{Z}(\Delta'). \qquad (12)$$

Представив экспоненту в (11) в виде ряда и выполнив суммирование по реализациям $\rho(r) \in \Omega_\Lambda$ с учетом условия $\rho(r)(1 - \rho(r)) = 0$, получим

$$\bar{Z}(\Delta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)} \left(\prod_{i=1}^{l} I(\Gamma_i)\right) \xi\left\{\left(\bigcup_{i=1}^{l} \Gamma_i\right) \setminus \Delta\right\} \chi_\Delta\left(\bigcup_{i=1}^{l} \Gamma_i\right), \qquad (13)$$

где индикаторная функция $\chi_\Delta(\Gamma)$ определяется равенством

$$\chi_\Delta(\Gamma) = \begin{cases} 1, & \Gamma \cap \Delta = \varnothing; \\ 0, & \Gamma \cap \Delta \neq \varnothing. \end{cases}$$

На основе выражения (13) для произведения $\bar{Z}(\Delta)\,\bar{Z}(\Delta')$, как и в п. 1, получаем представление

$$\bar{Z}(\Delta)\,\bar{Z}(\Delta') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)} \left(\prod_{i=1}^{m} I(\Gamma_i)\right) \times$$

$$\times \sum_{a \subseteq E_m} \xi\{\Gamma(a) \setminus \Delta\}\, \xi\{\bar{\Gamma}(a) \setminus \Delta'\}\, \chi_\Delta(\Gamma(a))\, \chi_{\Delta'}(\bar{\Gamma}(a)).$$

Следовательно, воспользовавшись аналогичным представлением произведения $\bar{Z}(\Delta \cup \Delta')\,\bar{Z}(\Delta \cap \Delta')$, ввиду неотрицательности функции $I(\Gamma)$, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\sum_{a \subseteq E_m} \xi\{\Gamma(a) \setminus \Delta\}\, \xi\{\bar{\Gamma}(a) \setminus \Delta'\}\, \chi_\Delta(\Gamma(a))\, \chi_{\Delta'}(\bar{\Gamma}(a)) \leq$$

$$\leq \sum_{a \subseteq E_m} \xi\{\Gamma(a) \setminus (\Delta \cup \Delta')\}\, \xi\{\bar{\Gamma}(a) \setminus (\Delta \cap \Delta')\}\, \chi_{\Delta \cup \Delta'}(\Gamma(a))\, \chi_{\Delta \cap \Delta'}(\bar{\Gamma}(a)) \qquad (14)$$

для любого $m \geq 1$ и любых Δ, $\Delta' \subseteq \Lambda$.

Доказательство неравенства (14) проводим индукцией по числу $\upsilon(K)$, где $K = (\Gamma(E_m) \setminus (\Delta \cup \Delta')) \cup ((\Delta \cup \Delta') \setminus \Gamma(E_m))$.

При $\upsilon(K) = 0$ имеем $\Delta \cup \Delta' = \Gamma(E_m)$ и, следовательно, неравенство (14) имеет вид $(\Gamma(\varnothing) = \varnothing,\ \xi(\varnothing) = 1)$

$$\xi\{\Gamma(E_m) \setminus (\Delta \cap \Delta')\}\, \chi_{\Delta \cap \Delta'}(\Gamma(E_m)) \geq$$

$$\geq \sum_{a \subseteq E_m} \xi\{\Gamma(a) \setminus \Delta\}\, \xi\{\bar{\Gamma}(a) \setminus \Delta'\}\, \chi_\Delta(\Gamma(a))\, \chi_{\Delta'}(\bar{\Gamma}(a)). \qquad (15)$$

Если $\Gamma(E_m)\bigcap\Delta\bigcap\Delta' \neq \varnothing$, т. е. левая часть неравенства обращается в нуль, то существует такое $r \in \Delta\bigcap\Delta'$, что для него найдется Γ_i, для которого $r\in \Gamma_i$. Так как индекс i находится либо в a, либо в $E_m \backslash a$, то выполняется либо $\chi_\Delta(\Gamma(a)) = 0$, либо $\chi_{\Delta'}(\overline{\Gamma}(a)) = 0$, и, следовательно, правая часть (15) также обращается в нуль. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\Gamma(E_m)\bigcap\Delta\bigcap\Delta' = \varnothing$. Более того, можно считать, что для каждого $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$ либо $\Gamma_j\bigcap\Delta = \varnothing$, либо $\Gamma_j\bigcap\Delta' = \varnothing$. В противном случае в правой части неравенства все слагаемые равны нулю, так как $\chi_\Delta(\Gamma_j) = \chi_{\Delta'}(\Gamma_j) = 0$ для некоторого j и либо $\chi_\Delta(\Gamma(a)) = 0$, либо $\chi_{\Delta'}(\overline{\Gamma}(a)) = 0$. Если для каждого j выполняется либо $\Gamma_j \subseteq \Delta$, либо $\Gamma_j \subseteq \Delta'$, то для множества индексов $a = \{j\colon \Gamma_j \subseteq \Delta'\}$ выполняется $E_l \backslash a = \{j\colon \Gamma_j \subseteq \Delta\}$. Это множество a определяет то единственное слагаемое в правой части (15), которое не равно нулю. Таким образом, неравенство (15) представимо в виде

$$\xi\{\Gamma(E_m)\backslash(\Delta\bigcap\Delta')\} \geq \xi\{\Gamma(a)\backslash\Delta\}\,\xi\{\overline{\Gamma}(a)\backslash\Delta'\},$$

которое выполняется очевидним образом, так как $\Gamma(E_m)\backslash(\Delta\bigcup\Delta') = (\Gamma(a)\backslash\Delta)\bigcup(\overline{\Gamma}(a)\backslash\Delta')$ и $\xi_r \leq 1$.

Положим теперь, что неравенство (14) выполняется при $v(K) \leq n$ и построим индукционный шаг к случаю $v(K) = n+1$. Если множество $(\Delta\bigcup\Delta')\backslash\Gamma(E_m)$ не пусто, то, выбрав точку r из этого множества, получим, что неравенство (14) при замене $\Delta \Rightarrow \Delta\backslash\{r\}$, $\Delta' \Rightarrow \Delta'\backslash\{r\}$ выполняется в силу предположения индукции. Если же $(\Delta\bigcup\Delta')\backslash\Gamma(E_m)$ пусто, то выберем точку r из $\Gamma(E_m)\backslash(\Delta\bigcup\Delta')$ и определим $\Gamma_i^{(r)} = \Gamma_i\backslash\{r\}$. Тогда, вводя множество индексов $c = \{j\colon r\in\Gamma_j\}$ и поступая так же, как и при получении неравенства (9), записываем

$$\left[\sum_{a\subseteq E_m\backslash c} + \sum_{a:\,c\subseteq a}\right]\xi\{\Gamma^{(r)}(a)\backslash(\Delta\bigcup\Delta')\}\,\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a)\backslash(\Delta\bigcap\Delta')\}\times$$
$$\times\chi_{\Delta\bigcup\Delta'}(\Gamma^{(r)}(a))\,\chi_{\Delta\bigcap\Delta'}(\overline{\Gamma}^{(r)}(a)) +$$
$$+\ \xi_r\sum_{b:\,\varnothing\neq b\subset c}\ \sum_{a\subseteq E_m\backslash c}\xi\{\Gamma^{(r)}(a\bigcup b)\backslash(\Delta\bigcup\Delta')\}\,\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a\bigcup b)\backslash(\Delta\bigcap\Delta')\}\times$$
$$\times\chi_{\Delta\bigcup\Delta'}(\Gamma^{(r)}(a\bigcup b))\,\chi_{\Delta\bigcap\Delta'}(\overline{\Gamma}^{(r)}(a\bigcup b)) \geq$$
$$\geq\left[\sum_{a\subseteq E_m\backslash c} + \sum_{a:\,c\subseteq a}\right]\xi\{\Gamma^{(r)}(a)\backslash\Delta\}\,\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a)\backslash\Delta'\}\,\chi_\Delta(\Gamma^{(r)}(a))\,\chi_{\Delta'}(\overline{\Gamma}^{(r)}(a)) +$$
$$+\ \xi_r\sum_{b:\,\varnothing\neq b\subset c}\ \sum_{a\subseteq E_m\backslash c}\xi\{\Gamma^{(r)}(a\bigcup b)\backslash\Delta\}\,\xi\{\overline{\Gamma}^{(r)}(a\bigcup b)\backslash\Delta'\}\times$$
$$\times\chi_\Delta(\Gamma^{(r)}(a\bigcup b))\,\chi_{\Delta'}(\overline{\Gamma}^{(r)}(a\bigcup b)). \qquad (16)$$

Полученное неравенство справедливо, так как на концах отрезка изменения ξ_r в точках $\xi_r = 0, 1$ оно выполняется по предположению индукции. Действительно, в точке $\xi_r = 1$ неравенство (16) сводится к неравенству (14), в котором Γ_j заменено на $\Gamma_j^{(r)}$ и при этом $\upsilon(\Gamma^{(r)}(E_m)) = n$. В точке $\xi_r = 0$ неравенство (16) принимает вид (14) с множеством индексов E_l, $l = m - \upsilon(c) + 1$, после переобозначений $\{\Gamma_j^{(r)};\ j \in E_m \setminus c\} \Rightarrow \{\Gamma_j;\ j = 1, \ldots, l-1\}$, выполненных в произвольной последовательности, и замены $\Gamma^{(r)}(c) \Rightarrow \Gamma_l$. Так как

$$\upsilon(\Gamma(E_m)) - 1 = \upsilon(\Gamma^{(r)}(E_m)) = \upsilon(\Gamma^{(r)}(E_m \setminus c) \cup \Gamma^{(r)}(c)),$$

то для построенного таким образом набора $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ соответствующее множество K имеет мощность $\upsilon(K) = n$. Теорема доказана.

4. Пусть модель решеточного газа определяется гамильтонианом

$$H_\Lambda^* = -\sum_{\Gamma:\ \varnothing \neq \Gamma \subseteq \Lambda} \left(\sum_{\Delta:\ \Gamma \subseteq \Delta \subseteq \Lambda} (-1)^{\upsilon(\Gamma)} I(\Delta) \right) \rho(\Gamma) =$$
$$= -\sum_{\Delta:\ \Delta \subseteq \Lambda} I(\Delta) \overline{\rho}(\Delta) + C,$$

где $I(\Delta) \geq 0$ и $C = \sum_{\Delta \subseteq \Lambda} I(\Delta)$. Эту модель назовем дуальной по отношению к модели, определяемой гамильтонианом H_Λ. Если гамильтониан H_Λ является гамильтонианом парного взаимодействия, т. е. $I(\Delta) = 0$ при $\upsilon(\Delta) > 2$, то гамильтониан H_Λ^* отличается от H_Λ только слагаемыми с $\upsilon(\Delta) = 1$ и, следовательно, имеет притягивающее взаимодействие, как только такое свойство имеет гамильтониан H_Λ. Если же H_Λ имеет какие-либо ненулевые слагаемые с $\upsilon(\Delta) > 2$, то гамильтониан H_Λ^* дуальной модели не является притягивающим. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для корреляционных функций гиббсовского случайного поля любой модели, дуальной некоторой модели с притягивающим взаимодействием, выполняются неравенства* (1), (2).

Доказательство. Сформулированное утверждение следует непосредственно из теоремы 1. Достаточно всюду в определениях гиббсовской меры и корреляционных функций выполнить замену $\rho(r) \Rightarrow 1 - \rho(r)$, при которой гамильтониан H_Λ^* перейдет в H_Λ.

В заключение заметим, что если ввести смешанные корреляционные функции

$$\langle \overline{\rho}(\Delta') \rho(\Delta) \rangle = \mathbb{P}\{\rho:\ \rho(r) = 1,\ r \in \Delta;\ \rho(r) = 0,\ r \in \Delta'\},$$

то для них будет справедливо неравенство, аналогичное неравенствам FKG „наоборот",

$$\langle \overline{\rho}(\Delta') \rho(\Delta) \rangle \leq \langle \overline{\rho}(\Delta') \rangle \langle \rho(\Delta) \rangle,$$

которые могут быть доказаны по той же схеме, что и неравенства (1), (2), однако, это неравенство является также и непосредственным следствием неравенств FKG [6]

$$\langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle,$$

для гиббсовской вероятностной меры, определяемой гамильтонианом H_Λ при подходящем выборе функций f и g от случайных реализаций $\rho(r)$, а именно $f = \rho(\Delta)$, $g = 1 - \overline{\rho}(\Delta')$.

5. В заключение укажем, что полученные в настоящей работе неравенства, по-видимому, допускают обобщение, подобно тому как неравенства Гриффитса обобщаются на основе метода FKG на более широкий класс вероятностных мер, определенных на произвольных частично упорядоченных множествах. Тогда можно предположить, что существует метод получения корреляционных неравенств, обобщающих как технику вывода неравенств FKG, так и метод настоящей работы, и справедливо неравенство, которое содержит неравенства, доказанные в настоящей работе, и неравенства FKG [5] как частные случаи.

1. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 367 с.
2. *Griffiths R. B.* Correlations in Ising ferromagnets. I // J. Math. Phys. – 1967. – **8**, № 3. – P. 478–483.
3. *Griffiths R. B.* Correlations in Ising ferromagnets. II. External magnetic fields // Ibid. – 1967. – **8**, № 3. – P. 484–489.
4. *Kelly D. G., Sherman S.* General Griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets // Ibid. – 1968. – **9**, № 3. – P. 466–484.
5. *Fortuin C., Kastelyn P., Ginibre G.* Correlation inequalities on some partially ordered sets // Communs Math. Phys. – 1971. – **22**. – P. 89–103.
6. *Simon B.* The $P(\phi)_2$ euclidians (quantum) field theory. – Princeton: Univ. press, 1974. – 358 p.
7. *Шлосман С. Б.* Корреляционные неравенства и их приложения // Теория вероятностей и мат. статистика / ВИНИТИ. – 1983. – № 1. – С. 5–37.

Получено 09.04.96