УДК 517. 9

И. А. Джалладова (Киев. нац. экон. ун - т)

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

A system of moment equations is constructed for a system of linear differential equations with periodic coefficients.

Побудовано систему моментних рівнянь для системи лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \mu A(t,\xi(t))\,X(t,\mu), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — марковский конечнозначный случайный процесс, принимающий значения $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ с вероятностями $p_k(t) = P\{\xi(t) = \Theta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} p_s(t), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Предположим, что:

1) частные значения матрицы коэффициентов $A_k(t) \equiv A_k(t, \Theta_k)$ являются ограниченными интегрируемыми периодическими с периодом 2π функциями:

$$A_k(t+2\pi) = A_k(t), \quad k = 1,\ 2, \ldots, n;$$

2) марковский случайный процесс $\xi(t)$ является эргодическим, т. е. независимо от начальных значений $p_s(0)$ таких, что

$$p_s(0) \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n} p_s(0) = 1, \quad s = 1, \ldots, n,$$

выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} p_s(t) = p_s = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица $A = \| a_{ks} \|_{k,s=1}^{n}$ имела простое собственное число $\lambda(A) = 0$ [1].

Пусть $f(t, x)$ — плотность распределения случайного решения $X(t, \mu)$ системы (1).

Введем математическое ожидание

$$M(t,\mu) \equiv \langle X(t,\mu) \rangle = \int\limits_{E_m} X f(t, X, \xi)\, dX,$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^*$, $dX = dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, E_m — m-мерное пространство переменных X с евклидовой нормой. Как известно [2], плотность распределения дискретно-непрерывной системы случайных величин $(\xi(t), X(t))$ можно описать функцией

$$f(t,\xi,X) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(t,x)\,\delta(\xi - \Theta_k).$$

Здесь $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, $f_k(t, X)$, $k = 1, 2, \dots, n$, — частные плотности распределения.

В работе [3] доказаны теоремы, обосновывающие существование и единственность периодической системы моментных уравнений

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu)\, M(t,\mu). \tag{3}$$

Эти теоремы можно использовать для построения матрицы коэффициентов $G(t,\mu)$ системы уравнений (3) в виде рядов по степеням параметра μ. Идея построения основана на методе малого параметра [4].

2. Алгоритм построения системы уравнений (3). Полагаем

$$X(t,\mu) = \left(E + \mu\Psi_1(t,\xi(t)) + \mu^2\Psi_2(t,\xi(t)) + \dots\right) M(t,\mu), \tag{4}$$

где $\Psi_k(t,\xi(t))$, $k = 1, 2, \dots$, — матрицы, зависящие от случайного процесса $\xi(t)$. Подставляя (4) при $\Psi_0(t,\xi(t)) \equiv E$ в систему уравнений (3), получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{d\Psi_k(t,\xi(t))}{dt} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\, \Psi_k(t,\xi(t)) \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, G_k(t) =$$

$$= \mu A(t,\xi(t)) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\, \Psi_k(t,\xi(t)). \tag{5}$$

Из равенства (4) следует, что выполнены условия $\langle \Psi_k(t,\xi(t)) \rangle \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ в (5), получаем бесконечную систему матричных уравнений:

$$\frac{d\Psi_1(t,\xi(t))}{dt} + G_1(t) = A(t,\xi(t)), \tag{6}$$

$$\frac{d\Psi_2(t,\xi(t))}{dt} + G_2(t) + \Psi_1(t,\xi(t))\, G_1(t) = A(t,\xi(t))\, \Psi_1(t,\xi(t)), \tag{7}$$

. . . .

$$\frac{d\Psi_k(t,\xi(t))}{dt} + G_k(t) + \sum_{s=1}^{k-1} \Psi_s(t,\xi(t))\, G_{k-s}(t) =$$

$$= A(t,\xi(t))\, \Psi_{k-1}(t,\xi(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

В первом приближении для матрицы $G_1(t)$ находим

$$G_1(t) = \langle A(t,\xi(t)) \rangle.$$

Используя эргодичность процесса $\xi(t)$, находим в явном виде матрицу $G_1(t)$:

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, p_k, \qquad G_1(t+2\pi) = G_1(t).$$

Здесь p_k, $k = 1, 2, \dots, n$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} p_s\, a_{ks} = 0, \quad \sum_{s=1}^{n} p_s = 1.$$

Из уравнения (6) находим

$$\Psi_1(t, t_0, \xi(t)) = \int_{t_0}^{t} \left(A(\tau,\xi(\tau)) - G_1(\tau)\right) d\tau.$$

Тогда из уравнения (7) для матрицы $G_2(t)$ имеем

$$G_2(t, t_0) = \langle A(t, \xi(t))\, \Psi_1(t, t_0, \xi(t)) \rangle =$$

$$= \left\langle A(t, \xi(t)) \int\limits_{t_0}^{t} \left(A(\tau, \xi(\tau)) - G_1(\tau) \right) d\tau \right\rangle. \tag{8}$$

Для вычисления математического ожидания вводим стохастическую матрицу

$$\Pi(t) = e^{At}, \quad A = \| a_{ks} \|_1^n, \quad \Pi(t) = \| \pi_{ks}(t) \|_1^n.$$

При этом получаем

$$\langle A(t, \xi(t))\, A(\tau, \xi(\tau)) \rangle = \sum_{k,s=1}^{n} A_k(t)\, A_s(\tau)\, p_k(t-\tau)\, p_s(\tau). \tag{9}$$

В силу эргодичности процесса $\xi(t)$ существует предел

$$\lim_{t \to +\infty} \Pi(t) = \Pi = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & p_n & \cdots & p_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

С учетом (9), (10) из (8) для матрицы $G_2(t)$ находим выражение

$$G_2(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k,s=1}^{n} A_k(t) \left[A_s(\tau) - \sum_{j=1}^{n} p_j A_j(\tau) \right] p_{ks}(t-\tau)\, p_s\, d\tau.$$

При $t - \tau \to +\infty$ имеем предельное соотношение

$$\lim_{t-\tau \to +\infty} \sum_{k,s=1}^{n} A_k(t) \left[A_s(\tau) - \sum_{j=1}^{n} p_j A_j(\tau) \right] p_{ks}(t-\tau)\, p_s =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} A_k(t)\, p_k \left[\sum_{s=1}^{n} p_s A_s(\tau) - \sum_{j=1}^{n} p_j A_j(\tau) \right] = 0. \tag{11}$$

В силу (11) сходится несобственный интеграл

$$\lim_{t_0 \to -\infty} G_2(t, t_0) = G_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \sum_{k,s=1}^{n} A_k(t) \left[A_s(\tau) - \sum_{j=1}^{n} p_j A_j(\tau) \right] p_{ks}(t-\tau)\, p_s\, d\tau.$$

Аналогично строятся матрицы $G_3(t)$, $G_4(t)$, … в зависимости от порядка приближения и требуемой точности исследований.

В [3] доказано, что матрицы G_k, $k = 2, \ldots$, периодические с периодом 2π и верно следующее представление для функции $G(t, \mu)$ в первом приближении:

$$G(t, \mu) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, p_k(t) +$$

$$+ \mu \int\limits_{-\infty}^{t} \sum_{k,s}^{n} A_s(t) \left[A_s(t) - \sum_{j=1}^{n} p_j A_j(t) \right] p_{ks}(t-\tau)\, p_s\, d\tau + O(\mu^2),$$

а также при достаточно малом μ сходится ряд

$$\mu G(t,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k G_k(t), \quad G_k(t) \equiv G_k(t+2\pi), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Другой способ построения моментных уравнений состоит в использовании моментных уравнений [2, 5]

$$\frac{dM_k(t,\mu)}{dt} = \mu A_k(t) M_k(t,\mu) + \sum_{s=1}^{n} a_{ks} M_s(t,\mu), \tag{12}$$

$$M(t,\mu) = \sum_{k=1}^{n} M_k(t,\mu). \tag{13}$$

Будем искать интегральное многообразие решений системы уравнений (12) в виде

$$M_k(t,\mu) = H_k(t,\mu) M(t,\mu),$$

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu) M(t,\mu).$$

Дифференцируя $M_k(t,\mu)$, $k = \overline{1,n}$, и исключая $M(t,\mu)$, получаем систему дифференциальных уравнений для матрицы $H_k(t,\mu)$:

$$G(t,\mu) = \sum_{s=1}^{n} A_s(t) H_s(t,\mu),$$

$$\frac{dH_k(t,\mu)}{dt} = \mu A_k(t) H_k(t,\mu) - \mu H_k(t,\mu) G(t,\mu) + \sum_{s=1}^{n} a_{ks} H_s(t,\mu), \quad k = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Из уравнения (13) следует, что будет справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(t,\mu) \equiv E.$$

Разложим матрицы $H_k(t,\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, в ряд по степеням параметра μ:

$$H_k(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s H_{ks}(t), \quad H_{ks}(t+2\pi) = H_{ks}(t), \quad k, s = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Сходимость рядов (15) доказана в [3].

Подставляя ряды (15) в систему уравнений (14), получаем систему матричных уравнений

$$\frac{dH_{k0}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ks} H_{s0}(t), \quad \sum_{k=1}^{n} H_{k0}(t) = E, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t) H_{k0}(t). \tag{17}$$

Из уравнения (16) находим

$$H_{k0}(t) = Ep_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Тогда

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t) p_k.$$

При $s = 1, 2, \ldots$ получим бесконечную систему матричных уравнений

$$\frac{dH_{ks}(t)}{dt} - \sum_{k=1}^{n} a_{kj} H_{js}(t) = A_k(t) H_{k,s-1}(t) - \sum_{j=1}^{s} H_{k,s-j}(t) G_j(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{n} H_{ks}(t) \equiv 0, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Систему уравнений (19) при дополнительном условии (18) можно последовательно решать и определять матрицы

$$G_{s+1}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t) H_{ks}(t), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Докажем, что матрицы $H_{ks}(t)$, $G_{s+1}(t)$, $k = 1, \ldots, n$; $s = 0, 1, 2, \ldots$, существуют и определены однозначно.

Обозначим через F_{ks} правую часть уравнения (19):

$$F_{ks} \equiv A_k(t) H_{k,s-1}(t) - \sum_{j=1}^{s} H_{k,s-j}(t) G_j(t), \quad k = 1, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Тогда систему уравнений (19) можно записать в виде

$$\frac{dH_{ks}(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} H_{kj}(t) = F_{ks}(t). \tag{22}$$

Как известно [6], линейная однородная периодическая система

$$\frac{dU}{dt} = A(t) U(t)$$

имеет нетривиальное решение периода ω тогда и только тогда, когда по меньшей мере одно из собственных чисел матрицы A равно 0. В этом случае неоднородная система

$$\frac{dU}{dt} = A(t) U(t) + F(t), \quad F(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_r e^{-irt}$$

имеет периодическое решение

$$U(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} U_r e^{irt} \tag{23}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие ортогональности:

$$\int_{0}^{\infty} (\Psi_s(t), F(t)) dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{24}$$

Здесь Ψ_s — решение сопряженной системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = -A^*(t)\zeta.$$

Решение системы (22) ищем в виде ряда (23). После подстановки ряда (23) в систему (22) имеем

$$U_r = (Eir - A)^{-1} F_r, \quad \det(Eir - A) \neq 0.$$

Так как при $r=0$ определитель матрицы $A=\|a_{ks}\|_{k,s=1}$ равен 0 (процесс $\zeta(t)$ — эргодический), то из соотношения (24) имеем

$$-A\,U_0=F_0, \quad U_0=(p_1p_2\ldots p_n)^*.$$

Для разрешимости системы (22), как следует из (24), необходимо выполнение условий

$$YF_0=0, \quad F_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}F(t)dt, \tag{25}$$

$Y=(1,1,\ldots,1)$ — левый собственный вектор матрицы A.

В этом случае система уравнений (22) имеет решение

$$U(t) = \sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}U_r+U_0.$$

Справедливо соотношение

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n}F_k(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k(t)\,H_{k,s-1}(t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s}H_{k,s-j}(t)\,G_j(t)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[A_j(t)\,A_{j,s-1}(t)\right]-G_s(t) \equiv 0.$$

Таким образом, условие разрешимости (25) выполнено и система уравнений (21) имеет решение

$$H_{ks}=U_{ks}+p_sC_s, \quad k=1,\ldots,n; \quad s=1,\,2,\ldots,$$

где U_{ks} — периодические функции, C_s — постоянные.

Постоянные C_s найдем из условия (20). Для этого сложим уравнения системы (19). В результате получим

$$\frac{d\sum\limits_{k=1}^{n}H_{ks}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}F_{ks}(t) = F(t). \tag{26}$$

С учетом (25) из (26) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}H_{ks}(t) = \bar{c} = \text{const}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{n}U_{ks}(t) = \bar{c} = \text{const}, \quad s=1,\,2,\ldots.$$

Окончательно из (2), (20), (25) определим постоянные C_s: $C_s=\bar{c}$, $s=1$, $2,\ldots$.

Следовательно, периодические матрицы $H_{s+1,k}(t)$, $G_{s+1}(t)$ определены однозначно с точностью до периода 2π.

Пример. Рассмотрим систему уравнений (1), где коэффициенты зависят от марковского случайного процесса $\xi(t)$, принимающего состояния Θ_1, Θ_2 с вероятностями p_1 и p_2, удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda p_1 + \lambda p_2,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 + \lambda p_2.$$

Построим периодическую систему моментных уравнений (3).

В рассматриваемом случае система уравнений (19) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dH_{11}(t)}{dt} &= -\lambda H_{11} + \lambda H_{12} + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{4}A_2, \\ \frac{dH_{12}(t)}{dt} &= \lambda H_{11} - \lambda H_{12} + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{4}A_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Из условия (20) имеем соотношение для начальных условий:

$$H_{11} + H_{12} = 0. \tag{28}$$

С учетом (28) первое из уравнений (27) запишем в виде

$$\frac{dH_{11}}{dt} = -2\lambda H_{11} + \frac{1}{4}(A_1 - A_2). \tag{29}$$

Уравнение (29) имеет решение

$$H_{11}(t) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda(t-\tau)}[A_1(\tau) - A_2(\tau)]d\tau, \quad H_{12} = -H_{11}.$$

Для матрицы $G_2(t)$ получаем

$$G_2(t) = A_1(t)H_{11}(t) + A_2(t)H_{12}(t) =$$

$$= \frac{1}{4}[A_1(t) - A_2(t)]\int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda(t-\tau)}[A_1(\tau) - A_2(\tau)]d\tau.$$

Система уравнений (3) во втором приближении принимает вид

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} =$$

$$= \left[\mu\frac{A_1(t) + A_2(t)}{2} + \mu^2\frac{A_1(t) - A_2(t)}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda(t-\tau)}\frac{A_1(\tau) - A_2(\tau)}{2}d\tau + (\mu)^3\right]M(t,\mu).$$

1. *Валеев К. Г.* Расщепление спектра матрицы. – Киев: Выща шк., 1986. – 250 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов М. И.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Валеев К. Г., Джалладова И. А.* Об одном обобщении метода усреднения // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №7. – С. 906 – 911.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986. – 43 с.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 471 с.

Получено 08.07.97