УДК 517. 5

М. Є. Дудкін (Нац. техн. ун-т України "КПІ")

ІНВАРІАНТНІ СИМЕТРИЧНІ ЗВУЖЕННЯ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА*. II

We give the criterion of invariance and symmetry of the restriction of arbitrary unbounded self-adjoint operator in the space $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ by using the introduced notion of a support of an arbitrary vector and the notion of the capacity of a subspace $N \subset \mathbb{R}^n$.

Наведено критерій інваріантності і симетричності звуження довільного необмеженого самоспряженого оператора в просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ з використанням введеного поняття носія довільного вектора та поняття ємності підмножини $N \subset \mathbb{R}^n$.

Настоящая статья является второй частью работы с аналогичным названием, поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем, формул и т. д.

5. Критерій інваріантності і симетричності звужень самоспряжених операторів. Розглянемо в просторі $\mathcal{H}$ нормальний оператор S. Із оператором S пов'язане оснащення:

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supset D. \tag{20}$$

Використовуючи це оснащення, оператор S можна розкласти за узагальненими власними векторами, тобто існує операторнозначна функція $P(\lambda)$, слабко вимірна і визначена майже для кожного λ із $\sigma(S)$ (в сенсі спектральної міри ρ), значення якої — невід'ємні оператори із $\mathfrak{H}_+$ в $\mathfrak{H}_-$ і $|||P(\lambda)||| \le \operatorname{Tr}(P(\lambda)) = 1$. На підставі цього оператор S можна зобразити у вигляді

$$Su = \left(\int\limits_{\sigma(S)} \lambda P(\lambda)\, d\rho(\lambda) \right) u \quad \forall u \in \mathcal{D}(S) \cap \mathfrak{H}_+, \tag{21}$$

де $|||\cdot|||$ позначає норму Гільберта – Шмідта, а $\operatorname{Tr}(\cdot)$ — слід відповідного оператора. Область значень $\Re(P(\lambda)) \subseteq \mathfrak{H}_-$ складається з узагальнених власних векторів ω_λ, яким відповідають узагальнені власні значення $\lambda \in \sigma(S)$ оператора S. Відзначимо, що $\operatorname{supp}(\rho) = \sigma(S)$. Доведення цих фактів можна знайти, наприклад, у роботах [1 – 4].

Відповідне до оператора S, пов'язаного із оснащенням (20), узагальнене перетворення Фур'є [1 – 4] має вигляд

$$\mathfrak{H}_+ \ni f \to \hat{f}(\lambda) = \left(\hat{f}_1(\lambda), \hat{f}_2(\lambda), \ldots\right) \in l_2(N(\lambda)),$$

$$\hat{f}_i(\lambda) = \left\langle \omega_{\lambda_i}, f \right\rangle_{\mathfrak{H}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N(\lambda), \quad \forall f \in \mathfrak{H}_+,$$

де $N(\lambda)$ — кратність точки спектра λ. Використовуючи це узагальнене перетворення Фур'є, можна записати рівність Парсеваля:

$$(f, g) = \int\limits_{\sigma(S)} \left(\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)_{l_2(N(\lambda))} d\rho(\lambda) \quad \forall f, g \in \mathfrak{H}_+ \tag{22}$$

де $(\cdot,\cdot)_{l_2(N(\lambda))}$ — скалярний добуток у просторі $l_2(N(\lambda))$. За неперервністю рівність (22) можна розширити до будь-яких $f, g \in \mathcal{H}$.

В подальшому будемо використовувати поняття узагальненого перетворення Фур'є та рівності Парсеваля за умови, що узагальнений спектр $\sigma(S)$ оператора

* Частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій (проект № 1/238 "Оператор").

S збігається з цілком узагальненим спектром $\tilde{\sigma}(S)$, тобто $\tilde{\sigma}(S) = \sigma(S)$, і, більше того, є простим. Вираз (22) в даному випадку має спрощений вигляд

$$(f, g) = \int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda), \overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\rho(\lambda) \qquad \forall f, g \in \mathfrak{H}_+.$$

Введемо для довільного вектора $f \in \mathcal{H}$ поняття його носія, використовуючи цілком узагальнений спектр $\tilde{\sigma}(S)$ оператора S.

Означення 4. *Носієм вектора $f \in \mathcal{H}$ називається множина*

$$\operatorname{supp}(f) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, \forall O_{\lambda,\varepsilon}, \exists\, \psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda)):$$

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda,\varepsilon} \;\; i \int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) \neq 0 \Big\},$$

де $O_{\lambda,\varepsilon}$ — ε-окіл точки λ.

Зрозуміло, що $\operatorname{supp}(f) \subseteq \sigma(S)$. Зауважимо, що носій вектора — множина замкнена. Якщо, наприклад, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, dx)$ і $\hat{f}$ — звичайне перетворення Фур'є вектора f, то наведене вище поняття носія збігається з поняттям носія для $\hat{f}$ в сенсі узагальнених функцій.

Введемо носій довільної лінійної підмножини векторів $F \subset \mathcal{H}$:

$$\operatorname{supp}(F) := \bigcup_{f \in F} \operatorname{supp}(f).$$

Зрозуміло також, що $\operatorname{supp}(F) \subseteq \sigma(S)$.

Введемо поняття множини нулів для довільного вектора $f \in \mathcal{H}$, використовуючи спектр $\sigma(S)$:

$$\ker(f) := \Big\{ \lambda \in \sigma(S) \,\Big|\, \exists O_{\lambda,\varepsilon}, \forall\, \psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda)):$$

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda,\varepsilon} \;\; i \int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda), \psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0 \Big\}.$$

Введемо множину нулів довільної лінійної підмножини векторів $F \subset \mathcal{H}$:

$$\ker(F) := \bigcap_{f \in F} \ker(f).$$

Очевидно, що $\ker(f) \equiv \sigma(S) \setminus \operatorname{supp}(f)$ і $\ker(F) \equiv \sigma(S) \setminus \operatorname{supp}(F)$.

Розглянемо конкретну реалізацію сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$, а саме, покладемо $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, dx)$. Нехай $A = A^*$ — необмежений самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ із областю визначення $\mathcal{D}(A)$.

Побудуємо по оператору A білінійну форму:

$$\gamma_A(f, g) = (Af, Ag), \quad f, g \in \mathcal{D}(\gamma_A) \equiv \mathcal{D}(A).$$

Форма γ_A — замкнена додатна і симетрична в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$. Для деякої вимірної множини $N \subset \mathbb{R}^n$ та σ-скінченної міри $k(x)$, $\operatorname{supp}(k) \subseteq N$, можна визначити форму

$$\gamma(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dk(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{D}(\gamma) := C_0(\mathbb{R}^n)$$

та

$$\tilde{\gamma}_A(f, g) = \gamma_A(f, g) + \gamma(f, g) \qquad \forall f, g \in \mathcal{D}(\tilde{\gamma}_A),$$

де $\mathcal{D}(\tilde{\gamma}_A) := \mathcal{D}(\gamma_A) \cap \mathcal{D}(\gamma)$.

Позначимо $\gamma_A[f] = \gamma_A(f, f)$ і аналогічно $\gamma[f] = \gamma(f, f)$. У випадку $\operatorname{supp}(k) = \mathbb{R}^n$ і $k(x) \equiv 1$ позначимо $\gamma_{A+1}[f] = \gamma_A[f] + \gamma[f]$.

Припустимо, що в $\mathcal{D}(\gamma_A)$ існує лінійна підмножина Φ така, що:

1) множина Φ є ядром форми γ_A, тобто $\overline{\gamma_A \restriction \Phi} = \gamma_A$;

2) для будь-яких $f_1, f_2 \in \Phi$ маємо $f_1 f_2 \in \Phi$, тобто підмножина Φ замкнена відносно операції множення;

3) для будь-якої обмеженої множини $T \subset \mathbb{R}^n$ знайдеться вектор $f \in \Phi$ такий, що $f(x) = 1$ м.с. (майже скрізь за мірою dx) на T;

4) для будь-якої $f \in \Phi$ $\operatorname{supp}(f)$ — обмежений (носій $f \in \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ розуміється в сенсі узагальнених функцій).

Означення 5. *Ємністю множини $N \subset \mathbb{R}^n$, якщо N — компакт, називається величина*

$$\operatorname{Cap}(N) := \inf\{\gamma_{A+1}[f] \mid f \in \Phi,\ f(x) = 1 \ \text{м. с. на } N\},$$

і для довільної множини N

$$\operatorname{Cap}(N) := \sup\{\operatorname{Cap}(G) \mid \forall\, G \subset N,\ G \text{ — компакт}\}.$$

Можна використовувати інше означення ємності.

Означення 6. *Ємністю* cap *множини $N \subset \mathbb{R}^n$, якщо N — компакт, називається величина*

$$\operatorname{cap}(N) := \inf\{\gamma_{A+1}[f] \mid f \in \Phi,\ f(x) \geq 1 \ \text{м. с. на } N\},$$

і для довільної множини N

$$\operatorname{cap}(N) := \sup\{\operatorname{cap}(G) \mid \forall\, G \subset N,\ G \text{ — компакт}\}.$$

Очевидно, що $\operatorname{cap}(N) \leq \operatorname{Cap}(N)$ $\forall N \subset \mathbb{R}^n$. Наступне твердження, доведення якого можна знайти, наприклад, у роботі [5], описує ситуацію, коли $\operatorname{cap}(N) = \operatorname{Cap}(N)$ $\forall N \subset \mathbb{R}^n$. Якщо $\mathcal{H} = L_p(\Omega, dx)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, а $A = \nabla_l \equiv D^\alpha = \left\{D_{x_1}^{\alpha_1}, \ldots, D_{x_n}^{\alpha_n}\right\}$, $l = |\alpha| = \sum_j \alpha_j$, і γ_{A+1} — поповнення $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою γ_{A+1}, то $\operatorname{cap}(N) = \operatorname{Cap}(N)$ $\forall N \subset \Omega$.

Припустимо, що в просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ існує оператор S, який задовольняє умови:

5) простір $\mathcal{H}_+$ — S-інваріантний (де, нагадаємо, $\mathcal{H}_+$ — простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_+ = (Af, Ag)$, $\forall f, g \in \mathcal{D}(A)$;

6) стандартно пов'язане з оператором S оснащення (20) таке, що:

a) $\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно із $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$;

b) узагальнений спектр $\sigma(S)$ оператора S, породжений оснащенням (20), простий і збігається з цілком узагальненим: $\sigma(S) = \tilde{\sigma}(S)$.

Розглянемо звуження оператора A на підмножини

$$\Phi(N_0^c) = \{ f \in \Phi \,|\, f(x) = 0 \text{ м. с. } x \in N \},$$

де N — замкнена в $\mathbb{R}^n$ підмножина, та

$$\Phi(N^c) = \{ f \in \Phi \,|\, \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \},$$

де N — відкрита в $\mathbb{R}^n$ підмножина.

Наступний критерій містить в собі один із основних результатів роботи.

Теорема 5. *Нехай в* $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ *задано необмежений самоспряжений оператор* A *і підмножину* $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$, *яка задовольняє умови* 1 – 4. *Припустимо, що в просторі* $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ *існує оператор* S, *який задовольняє умови* 5, 6.

Оператор $\dot{A} = A \restriction \Phi(N_0^c) \vee \Phi(N^c)$ *є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і* S*-інваріантною областю визначення тоді і тільки тоді, коли*

$$\rho(\Lambda) = 0, \tag{23}$$

$$\operatorname{Cap}(N) \neq 0, \tag{24}$$

де Λ — *підмножина цілком узагальненого спектра* $\tilde{\sigma}(S)$ *оператора* S, *яка відповідає звуженню* $\dot{A}$ *за правилом* (12), *згідно з яким*

$$\mathcal{D}_\Lambda \equiv \mathcal{D}(\dot{A}) = \{ f \in \mathcal{H}_+ \,|\, \langle \omega_\lambda, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \ \forall \lambda \in \Lambda \subset \sigma(S) \}. \tag{25}$$

Множини N *і* Λ *знаходяться у взаємно однозначній відповідності.*

6. Доведення критерію. Доведемо теорему 5. Для цього використовуватимемо окремі твердження. Деякі з цих тверджень будуть наведені в більш загальному вигляді, аніж це вимагає теорема 5.

Розглянемо звуження оператора A: $A^{\restriction} := A \restriction \mathcal{D}(A^{\restriction})$ і розіб'ємо їх на класи, які не перетинаються:

1) $A^{\restriction} \in \hat{\mathcal{A}}$, якщо $\overline{A^{\restriction}} = A$, тобто оператор $A^{\restriction}$ — істотно самоспряжений;

2) $A^{\restriction} \in \dot{\mathcal{A}}$, якщо $A^{\restriction}$ — щільно визначений симетричний оператор з ненульовими індексами дефекту;

3) $A^{\restriction} \in \mathring{\mathcal{A}}$, якщо $A^{\restriction}$ — не щільно визначений замкнений симетричний оператор. Такі оператори будемо називати ермітовими.

Позначатимемо оператори $\hat{A}, \dot{A}, \mathring{A}$, якщо $\hat{A} \in \hat{\mathcal{A}}$, $\dot{A} \in \dot{\mathcal{A}}$, $\mathring{A} \in \mathring{\mathcal{A}}$.

Доведення розіб'ємо на дві частини. В першій частині покажемо, що

$$\hat{A} = A \restriction \Phi(N_0^c) \vee \Phi(N^c) \in \hat{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \operatorname{Cap}(N) = 0, \tag{26}$$

або, інакше кажучи, $A^{\restriction} \notin \dot{\mathcal{A}}$ і $A^{\restriction} \notin \mathring{\mathcal{A}}$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Cap}(N) = 0$, що еквівалентне умові (24).

В другій частині покажемо, що

$$\mathring{\mathcal{A}} = A \restriction \mathcal{D}_\Lambda \Leftrightarrow \rho(\Lambda) \neq 0, \tag{27}$$

або, інакше кажучи, $A^{\restriction} \notin \hat{\mathcal{A}}$ і $A^{\restriction} \notin \mathring{\mathcal{A}}$ тоді і тільки тоді, коли $\rho(\Lambda) = 0$, що еквівалентне умові (23).

Доведемо два твердження, які мають допоміжний характер при подальших міркуваннях [6].

Твердження 5. *Нехай N — замкнена підмножина в $\mathbb{R}^n$. Множина*

$$\Phi(N_0^c) = \{ f \in \Phi \mid f(x) = 0 \text{ м. с. } x \in N \}$$

є ядром форми γ_A тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Cap}(N) = 0$. При цьому форма $\tilde{\gamma}_A$ не має замикання, якщо $\Phi \subset \mathcal{D}(\gamma)$ і $k(x) \neq 0$, $\operatorname{supp}(x) \subseteq N$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $f \in \Phi$, тоді $\operatorname{supp}(f) \cap N$ — компакт. Виберемо послідовність $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Phi$ таку, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $g_n = 1$ м. с. на $T = \operatorname{supp}(f) \cap N$ та $\gamma_{A+1}[g_n] \to 0$ при $n \to \infty$. Покладемо $h_n = f - fg_n \in \in \Phi$, $n = \overline{1, \infty}$. Очевидно, що $h_n = 0$ м. с. на N.

Покажемо, що $\gamma_{A+1}[f - h_n] \to 0$, коли $n \to \infty$. Дійсно, $\gamma_{A+1}[f - h_n] = = \gamma_{A+1}[fg_n]$. За умовою (3) $fg_n \in \Phi$. Покажемо, що $\gamma_{A+1}[fg_n] \to 0$, коли $n \to \to \infty$. Зауважимо, що множина Φ (після факторизації, якщо це потрібно) утворює нормоване кільце з нормою $\gamma_{A+1}[\,\cdot\,]$. За відомою теоремою (див. [7]) для кожного нормованого кільця (позначимо його також $\gamma_{A+1}[\,\cdot\,]$) можна знайти топологічно і алгебраїчно ізоморфне йому кільце $\gamma'_{A+1}[\,\cdot\,]$, яке має властивість

$$\gamma'_{A+1}[fg_n] \leq \gamma'_{A+1}[f]\,\gamma'_{A+1}[g_n]. \tag{28}$$

Оскільки $\gamma_{A+1}[g_n] \to 0$ при $n \to \infty$, то і $\gamma'_{A+1}[g_n] \to 0$ при $n \to \infty$. За нерівністю (28) $\gamma'_{A+1}[fg_n] \to 0$ при $n \to \infty$. Зробивши зворотний перехід, отримуємо $\gamma_{A+1}[fg_n] \to 0$, $n \to \infty$. Використовуючи умову (1), переконуємось, що $\Phi(N_0^c)$ є ядром форми γ_A.

Достатність. Нехай Φ є ядром форми γ_A. Покажемо, що $\operatorname{Cap}(N) = 0$. Дійсно, для будь-якого $f \in \mathcal{D}(\gamma_A)$ такого, що $f(x) = 1$ м. с., $x \in N$, знайдеться послідовність $f_n \in \Phi(N_0^c)$ така, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$. Покладемо $g_n := f_n - f$. Очевидно, що $g_n \to 0$ при $n \to \infty$ і $g_n \in \Phi(N_0^c)$, тобто $\operatorname{Cap}(N) = 0$.

Нехай $k(x) \neq 0$. Тоді форма $\tilde{\gamma}_A$ є розширенням форми $\gamma_A \restriction \Phi(N_0^c)$. Якби форма $\tilde{\gamma}_A$ була замкнена, то тоді її замикання було б розширенням замикання $\gamma_A \restriction \Phi(N_0^c)$, і ми мали б $\tilde{\gamma}_A = \gamma_A$ на Φ. Але це неможливо, оскільки $k(x) \neq 0$, тобто форма $\tilde{\gamma}_A$ не має замикання. Твердження доведено.

Аналогічно до твердження 5 можна довести твердження для відкритої підмножини $N \subset \mathbb{R}^n$.

Твердження 6. *Нехай N — відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$. Множина*

$$\Phi(N^c) = \{ f \in \Phi \mid \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \}$$

є ядром γ_A тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Cap}(N) = 0$. При цьому форма $\tilde{\gamma}_A$ не має замикання, якщо $\Phi \subset \mathcal{D}(\gamma)$ і $k(x) \neq 0$, $\operatorname{supp}(k) \subseteq N$.

За наслідком 1 із першої частини роботи, для якого потрібні умови (5), (6), знаходимо, що множині $\Phi(N_0^c)$ або $\Phi(N^c)$ відповідає за правилом (25) підмножина $\Lambda \subset \sigma(S)$, де $\mathcal{D} \equiv \Phi(N_0^c) \vee \Phi(N^c)$. Але наслідок 1 доведено в припущенні, що множина Λ не більш ніж зчисленна. Далі буде показано, що множину Λ можна брати і не зчисленну, аби вона задовольняла умову (23).

Наступне твердження дає критерій щільності лінійної підмножини простору $\mathcal{H}$, якщо вона задовольняє деяку умову.

Твердження 7. *Якщо деяка лінійна підмножина F сепарабельного гільбертового простору $\mathcal{H}$ задовольняє умову*

$$f \in \mathcal{H}\colon\ \operatorname{supp}(f) \subset \operatorname{supp}(F) \ \Rightarrow f \in F, \tag{29}$$

то F щільна в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{supp}(F)$ є множиною повної міри ρ.

Доведення. *Достатність.* Покажемо, що $\rho(\operatorname{supp}(F)) \neq \rho(\mathbb{C}) \Rightarrow \overline{F} \neq \mathcal{H}$.

Якщо $\rho(\operatorname{supp}(F)) \neq \rho(\mathbb{C})$, то знайдеться підмножина τ така, що $\rho(\tau) > 0$ і $\rho(\tau \cap \operatorname{supp}(F)) = 0$. Завжди можна вибрати $f(\lambda) \in L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ так, щоб $\operatorname{supp}(f) \subseteq \tau$. Таким чином, для будь-якого $g \in F$

$$\int_{\sigma(S)} f(\lambda)\hat{g}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0$$

і тому $(\check{f}, F) = 0$ де $\check{f}$ — зворотне перетворення Фур'є, тобто $\overline{F} \neq \mathcal{H}$.

Необхідність. Покажемо, що $\overline{F} \neq \mathcal{H} \Rightarrow \rho(\operatorname{supp}(F)) \neq \rho(\mathbb{C})$.

Припустимо протилежне, тобто існує $f \in \mathfrak{H}_+$ такий, що $0 \neq f \perp F$, тобто $(f, F) = 0$. Очевидно, що $\rho(\operatorname{supp}(f)) \neq 0$ і

$$\int_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0 \qquad \forall\, g(\lambda) \in F.$$

Покладемо $\tau := \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(F)$. Із рівності нулю інтеграла випливає $\rho(\tau) = 0$ і тому $\rho(\operatorname{supp}(F)) \neq \rho(\sigma(S))$. Якби $\rho(\tau) \neq 0$, то за означенням носія для будь-якого $O_{\lambda,\varepsilon} \subset \tau$ існує $\psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ така, що $\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda,\varepsilon}$ і

$$\int_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) \neq 0$$

і за умовою теореми $\psi \in F$, тобто $f \not\perp F$.

Твердження доведено.

Зазначимо, що умова (29) твердження 7 використана тільки для доведення необхідності.

Встановимо зв'язок між носієм $\operatorname{supp}(\mathcal{D})$ підмножини $\mathcal{D}$ простору $\mathcal{H}$, яка задовольняє умову (29), та підмножиною $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\Lambda$, що отримана за правилом (25). Наступне твердження доводить, що якщо множина $\mathcal{D}_\Lambda$ була побудована за правилом (25), то Λ — множина її нулів.

Твердження 8. *Нехай $\Lambda \in \tilde{\sigma}(S)$. Припустимо, що $\tilde{\sigma}(S) = \sigma(S)$. Тоді множина нулів підмножини $\mathcal{D}_\Lambda$, що побудована за правилом (25), збігається з множиною Λ:*

$$\ker(\mathcal{D}_\Lambda) \equiv \Lambda.$$

Доведення. Розглянемо два випадки: $\rho(\Lambda) > 0$ та $\rho(\Lambda) = 0$.

I. Нехай $\rho(\Lambda) > 0$. Позначимо $\tilde{\Lambda} := \ker(\mathcal{D}_\Lambda)$.

1. Покажемо, що для будь-якого фіксованого $\lambda \in \Lambda$ випливає $\lambda \in \tilde{\Lambda}$. Дійсно, нехай $\lambda_0 \in \Lambda$ з ε-околом $O_{\lambda_0,\varepsilon}$ точки λ_0, і тоді для будь-якої функції $\psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ такої, що $\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda_0,\varepsilon}$, виконується

$$\int_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{O_{\lambda_0,\varepsilon}} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0,$$

тому що $\hat{f}(\lambda) \equiv 0\ \forall\, \lambda \in \Lambda$, тобто $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}$.

2. Навпаки, нехай $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}$. Покажемо, що $\lambda_0 \in \Lambda$, тобто для будь-якого $f \in \mathcal{D}$ $\left\langle \omega_{\lambda_0}, f \right\rangle_{\mathfrak{H}} = 0$.

Дійсно, існує ε-окіл $O_{\lambda_0, \varepsilon}$ такий, що для будь-якої функції $\psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ такої, що $\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda_0, \varepsilon}$, виконується

$$\int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int\limits_{\tilde{\Lambda}} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0.$$

Таким чином, $\hat{f}(\lambda_0) = \left\langle \omega_{\lambda_0}, f \right\rangle_{\mathfrak{H}} = 0$, оскільки ψ — довільна функція на множині $\tilde{\Lambda}$.

II. Нехай $\rho(\Lambda) = 0$. Позначимо $\tilde{\Lambda} := \ker(\mathcal{D})$, $\tilde{\Lambda}^{\perp} := \operatorname{supp}(\mathcal{D})$.

1. Покажемо, що для будь-якого $\lambda \in (\sigma(S) \setminus \Lambda)$ випливає $\lambda \in \tilde{\Lambda}^{\perp}$. Дійсно, для будь-якого фіксованого $\lambda_0 \in \sigma(S) \setminus \Lambda$ знайдеться вектор $f \in \mathcal{D}$ такий, що $0 \neq \left\langle \omega_{\lambda_0}, f \right\rangle_{\mathfrak{H}} = f(\lambda_0)$, а тому і для будь-якого $O_{\lambda_0, \varepsilon} \in (\sigma(S) \setminus \Lambda)$ випливає $0 \neq \langle \omega_{\lambda}, f \rangle = f(\lambda)$. Тоді знайдеться функція $\psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ така, що $\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda_0, \varepsilon}$, і виконується

$$\int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) \neq 0.$$

Таким чином, $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}^{\perp}$.

2. Навпаки, покажемо, що для будь-якого $\lambda \in \tilde{\Lambda}^{\perp}$ випливає $\lambda \in \in (\sigma(S) \setminus \Lambda)$. Візьмемо деяке фіксоване значення $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}^{\perp}$. За означенням носія підмножини $\mathcal{D}_{\Lambda}$ знайдеться вектор $f \in \mathcal{D}$ такий, що для будь-якого $O_{\lambda_0, \varepsilon}$ існує $\psi \in C_0(\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{C}, d\rho(\lambda))$ така, що $\operatorname{supp}(\psi) \subset O_{\lambda, \varepsilon}$ і

$$\int\limits_{\sigma(S)} \hat{f}(\lambda)\psi(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0,$$

тому $\hat{f}(\lambda) = \langle \omega_{\lambda}, f \rangle_{\mathfrak{H}} \neq 0$ $\forall \lambda \in O_{\lambda_0, \varepsilon}$, а отже, і для $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, тобто $\lambda \in \tilde{\Lambda}^{\perp}$.

Твердження доведено.

Таким чином, поєднуючи твердження 7 та 8, отримуємо критерій щільності множини $\mathcal{D}_{\Lambda}$, яка побудована за правилом (25) за набором Λ узагальнених власних значень $\sigma(S)$ оператора S.

Теорема 6. *Підмножина $\mathcal{D}_{\Lambda} \in \mathcal{H}$, що побудована за правилом* (25), *щільна в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{supp}(\mathcal{D}_{\Lambda})$ є множиною повної міри ρ.*

Зрозуміло, що кожне звуження довільного самоспряженого оператора A в просторі $\mathcal{H}$ на множину $\mathcal{D}_{\Lambda}$, де $\rho(\Lambda) = 0$, буде симетричним, або істотно самоспряженим оператором із S-інваріантною областю визначення.

Нарешті поєднуючи (26) та (27), завершуємо доведення теореми 5.

7. Наслідки та приклади. Твердження 5 і 6, наведені у попередньому пункті, мають численні наслідки. Якщо, наприклад, у цих твердженнях $\Phi := := \chi(\mathbb{R}^n)$ — множина простих функцій із компактними носіями, і ми покладаємо, що $\chi(\mathbb{R}^n)$ є ядром форми γ_A, то згідно з твердженнями 5 і 6 множина

$$\Phi(N_0^c) = \{ f \in \Phi \mid f(x) = 0 \ \text{м. с.}\ x \in N \}$$

і відповідно

$$\Phi(N^c) = \{ f \in \Phi \mid \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \}$$

є ядром форми γ_A, оскільки множина $\chi(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови 2 – 4. При цьому якщо $\chi(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\gamma)$, то форма $\tilde{\gamma}_A$ не має замикання в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$.

Якщо припустити, що множина $\Phi := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ є ядром форми γ_A, то твердження 5 і 6 виконуються повністю, тому що множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови 2 – 4.

Як приклад можна розглянути класичну форму Діріхле

$$\gamma_A(f, g) := \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x) \nabla g(x)\, dx; \quad f(x),\ g(x) \in \mathcal{D}(\gamma_A) := W_2^1, \tag{30}$$

де W_2^1 — простір Соболева.

Нехай N — замкнена (відкрита) підмножина в $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\inf\{ \gamma_{A+1}[f] \mid f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ f(x) = 1 \text{ м. с. на } T \} = 0$$

для будь-якого компакта T на N. Тоді множина

$$C_0^\infty\big(\mathbb{R}^n(N_0^c)\big) := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \}$$

є ядром форми γ_A і, більше того, форма $\tilde{\gamma}_A$ не замикальна, якщо $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \subset \mathcal{D}(\gamma)$ і $k(x) \neq 0$, $\operatorname{supp}(k) \subseteq N$.

Для того щоб переконатися в цьому, досить звернутися до відомого факту, що множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ є ядром форми γ_A.

Наведемо деякі наслідки із теореми 5. Розглянемо звуження оператора A на підмножини

$$C_0^\infty\big(N_0^c\big) := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(x) = 0 \text{ м. с. } x \in N \},$$

де N — замкнена в $\mathbb{R}^n$ підмножина, та

$$C_0^\infty\big(N^c\big) := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \},$$

де N — відкрита в $\mathbb{R}^n$ підмножина.

Наслідок 2. *Нехай $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ задано необмежений самоспряжений оператор A і підмножина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(A)$ є ядром форми γ_A. Нехай S — оператор множення в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ на функцію $\xi(x)$ від незалежної змінної $x \in \mathbb{R}^n$ такої, що $\xi(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Оператор $A := A \restriction C_0^\infty\big(N_0^c\big) \vee C_0^\infty\big(N^c\big)$ є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і S-інваріантною областю визначення тоді і тільки тоді, коли

$$\rho(\Lambda) = 0, \qquad \operatorname{Cap}(N) \neq 0,$$

де Λ — підмножина цілком узагальненого спектра $\tilde{\sigma}(S)$ оператора S, яка відповідає звуженню A за правилом (25). *Множини N і Λ знаходяться у взаємно однозначній відповідності.*

Доведення. Зазначимо, що множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови 2 – 4, а оператор множення в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ на функцію $\xi(x)$ від незалежної змінної $x \in \mathbb{R}^n$ такої, що $\xi(x) \neq 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}^n$, задовольняє умови 5, 6.

Як оператор A використаємо оператор диференціювання $\nabla_l = i\dfrac{d}{dx}$ і сформулюємо найбільш простий варіант теореми 5.

Наслідок 3. *Нехай в* $L_2(\mathbb{R}, dx)$ *задано оператор* ∇_l.

Оператор $\dot{\nabla}_l := \nabla_l \restriction C_0^\infty\left(N^c\right)$ *є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і областю визначення, інваріантною відносно оператора множення на незалежну змінну тоді і тільки тоді, коли*

$$|N| = 0, \quad \operatorname{cap}(N) \neq 0,$$

де $|N|$ *— міра Лебега підмножини* $N \subset \mathbb{R}$, *яка відповідає звуженню* $\dot{\nabla}_l$ *за правилом* (25):

$$\mathcal{D}_\Lambda \equiv \mathcal{D}_\Lambda(\dot{\nabla}_l) := \{ f \in C_0^\infty\left(N^c\right) \mid \hat{f}(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda \subset \sigma(S) \};$$

тут $\Lambda = N$, $\hat{f}(\lambda)$ *— перетворення Фур'є функції* f.

Доведення. Очевидно, що множина $C_0^\infty\left(N_0^c\right)$ або $C_0^\infty\left(N^c\right)$ дійсно не є щільною в $L_2(\mathbb{R}, dx)$, якщо $|N| \neq 0$. І ще зауважимо, що для ∇_l в $L_2(\mathbb{R}, dx)$, $\operatorname{cap}(N) = \operatorname{Cap}(N) \ \forall N \subset \mathbb{R}$.

Зазначимо, що теорема 2 є синтезом відомих тверджень із [8 – 10].

Наступне твердження, що належить Йоргенсону, може бути також прикладом до теореми 5.

Твердження 9. *Нехай* $\dot{x}$ *— симетричне звуження оператора множення на незалежну змінну в просторі* $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ *таке, що його область визначення* $\mathfrak{D}(\dot{x})$ *є трансляційно інваріантною, тобто інваріантною відносно зсувів функції уздовж прямої:* $f(x) \in \mathfrak{D}(\dot{x}) \Rightarrow f(x+t) \in \mathfrak{D}(\dot{x}) \ \ \forall t \in \mathbb{R}^1$. *Тоді область визначення оператора* $\dot{x}$ *має вигляд*

$$\mathfrak{D}(\dot{x}) = \{ f \in \mathfrak{D}(x) \mid \hat{f}(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda \},$$

де $\hat{f}$ *— звичайне перетворення Фур'є вектора* f *в* $L_2(\mathbb{R}^1, dx)$, *а множина* Λ *лебегової міри нуль визначається виразом*

$$\Lambda := \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{D}(\dot{x}) \},$$

і навпаки, кожна множина λ *лебегової міри нуль визначає симетричне звуження із трансляційно інваріантною областю визначення.*

8. Класифікація цілком узагальненого спектра. Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений необмежений оператор $T = T^*$ з областю визначення $\mathcal{D}(T)$. Побудуємо по оператору T шкалу гільбертових просторів:

$$E' \supset \ldots \supset \mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2} \supset \ldots \supset E, \tag{31}$$

де $\mathcal{H}_{+n} = \mathcal{D}(T^n)$ з нормою $\|N\|_{+n} := \sqrt{(T^n u, T^n v)} \ \ \forall u, v \in \mathcal{D}(T^n)$ а $\mathcal{H}_{-n}$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_{-n} := \|T^{-n}\cdot\|$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$; $E := \operatorname{pr} - \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{H}_{+n}$ та $E' := \operatorname{ind} - \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{H}_{-n}$ — проективна та індуктивна границі гільбертових просторів. Нехай $\langle \omega, \varphi \rangle$ позначає спарення в шкалі (31), де $\omega \in \mathcal{H}_{-n}$, $\varphi \in \mathcal{H}_{+n}$.

Розглянемо в $\mathcal{H}$ інший самоспряжений оператор S.

Припустимо, що оснащення простору $\mathcal{H}$

$$E' \supset \mathcal{H} \supset E \tag{32}$$

задовольняє вимоги розкладу (21) і простір E як підмножина в $\mathcal{H}$ є S-інваріантним.

Нагадаємо, що ненульовий вектор $\omega_\lambda \in E'$ називається узагальненим власним вектором оператора S з відповідним узагальненим власним значенням $\lambda \in \mathbb{C}$ в стандартно пов'язаному оснащенні (32), якщо $\langle \omega_\lambda, Sf \rangle = \lambda \langle \omega_\lambda, f \rangle \quad \forall f \in E$, а сукупність $\sigma(S)$ усіх узагальнених власних значень λ називається узагальненим спектром оператора S [1 – 3].

Розглянемо множини:

$$\begin{gathered} \sigma_i(S) := \{ \lambda \in \sigma(S) \,|\, \omega_\lambda \in \mathcal{H}_{-i} \setminus \mathcal{H}_{1-i} \}, \qquad i = 1, 2, \dots, \\ \sigma_0(S) := \sigma_{pp}(S) \text{ — точковий спектр оператора } S, \end{gathered} \tag{33}$$

де $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}$. Очевидно, що $\sigma(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i(S)$.

За відомою теоремою про спектральний розклад самоспряженого оператора T, простір $\mathcal{H}$ ізоморфний простору $L_2(M, d\rho(\lambda))$. Позначимо цей ізоморфізм $U\colon \forall f \in \mathcal{H},\ Uf = f(x) \in L_2(M, d\rho(\lambda))$. При цьому ізоморфізмі оператор S переходить в оператор множення не незалежну змінну x в просторі M, а узагальнені власні вектори ω_λ переходять в δ-функції Дірака: $U\omega_\lambda = \delta_\xi$, що засереджена в точці $\xi \in M$: $\xi = \operatorname{supp}(\delta_\xi)$. Таким чином, множині $\Lambda \in \sigma(S)$ співставляється у відповідність при ізоморфізмі U множина $N \subset M$:

$$N := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{supp}(U\omega_\lambda). \tag{34}$$

Позначимо

$$\Phi := UE', \quad W_{-i} := U\mathcal{H}_{-i}, \quad W_{+i} := U\mathcal{H}_{+i}, \quad \Phi := UE, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Оператор T при ізоморфізмі U перейде в оператор $A := UTU^{-1}$. Таким чином, створено нову шкалу просторів, яка разом із шкалою (31) утворює наступну схему:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d] & \supset \dots \supset & \mathcal{H}_{-2} \arrow[d] & \supset & \mathcal{H}_{-1} \arrow[d] & \supset & \mathcal{H} \arrow[d, "U"] & \supset & \mathcal{H}_{+1} \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "T"'] & \supset & \mathcal{H}_{+2} \arrow[d] & \supset \dots \supset & E \arrow[d] \\
\Phi' & \supset \dots \supset & W_{-2} & \supset & W_{-1} & \supset & L_2(M, d\rho(\lambda)) & \supset & W_{+1} \arrow[ll, bend left, "A"] & \supset & W_{+2} & \supset \dots \supset & \Phi
\end{tikzcd}$$

Припустимо, що множина Φ задовольняє умови 1 – 4 п. 5. Тоді справедлива така теорема.

Теорема 7. *Для підмножини Λ цілком узагальненого спектра $\sigma(S)$ опе-*

ратора S *та множини* N, *визначеної в* (34), *справджуються наступні твердження*:

$$\Lambda \subset \sigma_0(S) \Leftrightarrow \rho(N) \neq 0, \tag{35}$$

$$\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i(S) \Leftrightarrow \rho(N) = 0, \tag{36}$$

$$\Lambda \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} \sigma_i(S) \Leftrightarrow \mathrm{Cap}\,(N) = 0, \tag{37}$$

$$\Lambda \subset \sigma_1(S) \Leftrightarrow \rho(N) = 0 \quad i \quad \mathrm{Cap}\,(N) = 0. \tag{38}$$

Доведення. Вирази (35), (36) випливають із теореми 6, вираз (37) — із тверджень 5 та 6. Вираз (38) є наслідком теореми 5.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
2. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 800 с.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
4. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ: Курс лекций. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
6. *Дудкін М. Є.* Ермітові інваріантні звуження самоспряжених операторів. – Київ, 1994. – 20 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; № 94.31).
7. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960. – 316 с.
8. *Albeverio S., Brasche J. F., Röckner M.* Dirichlet forms and generalized Schrödinger Operators / Eds. H. Holden, A. Jensen. – Schrödinger Operators // Lect. Notes Phys. – 1989. – **345.** – P. 1 – 42.
9. *Jørgensen P. E. T.* A uniqueness theorem for the Heisenberg – Weyl commutation relations with non-selfadjoint position operator // Amer. J. Math. – 1980. – **103,** № 2. – P. 273 – 287.
10. *Кочубей А. Н.* Эллиптические операторы с граничными условиями на подпространствах меры нуль // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – **16,** вып. 9. – С. 74 – 75.

Одержано 24.04.96