УДК 514

В. Ф. Игнатенко (Симферопол. ун-т)

ДИАМЕТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ. II

We systematically explain the basic principles of the constructed geometric theory of invariants of infinite groups generated by skew reflections with respect to hyperplanes in the real Euclidean space.

Дається систематичний виклад початків побудованої автором геометричної теорії інваріантів нескінченних груп, породжених косими віддзеркаленнями відносно гіперплощин, в дійсному евклідовому просторі.

Введение. Пусть F_n есть $(m-1)$-мерная алгебраическая поверхность порядка n в вещественном евклидовом пространстве E^m. Диаметральная теория поверхностей F_n рассмотрена в статье [1]. Она имеет разнообразные приложения. Истоки ее применения для изучения поверхностей F_n с плоскостями симметрии находятся в работах итальянских геометров Пьяццола-Белок, Розина и др. [2 – 4]. Их результаты подсказывают возможность использования диаметральной теории для изучения строения поверхностей F_n с бесконечными группами G_μ, порожденными косыми (в частности, ортогональными) отражениями относительно плоскостей. Эти группы задают группы симметрий в псевдоевклидовых пространствах, их построение дает возможность рассматривать, в частности, задачи теоретической физики, связанные с указанной выше симметрией [5].

Несколько настораживает, может быть, сложность теории алгебр инвариантов J^{G_μ} групп G_μ: существуют несвободные J^{G_μ} (А. Е. Залесский [6]); конструкция примера Нагаты применима для нахождения бесконечнопорожденной алгебры J^{G_μ} (А. Е. Велесько [7]). С другой стороны, эти примеры усиливают намерение выяснить строение групп G_μ и алгебр их инвариантов.

Основы геометрической теории инвариантов групп G_μ построены автором. Систематическому изложению ее начал посвящена данная статья.

1. Лемма Розина. Пусть плоская кривая C_n ($C_n = F_n$ в E^2) инвариантна относительно бесконечной группы G_2 $(\mu = 2)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 (Розина [3]). *Если кривая C_n, $n > 2$, инвариантная относительно группы G_2, не состоит из параллельных прямых, то она распадается над полем комплексных чисел на коники с общей симметрией. При этом в уравнении мнимой коники можно считать невещественным коэффициентом только свободный член.*

В работе [3] для доказательства леммы использована диаметральная теория алгебраических кривых (см. также [4]). Дадим другое доказательство этого утверждения [8] (оно будет использовано в дальнейшем).

Доказательство. Так как C_n не распадается на параллельные прямые, то каждому направлению симметрии соответствует одна ось. Число $n = 2s$ четно, поскольку существуют неасимптотические для C_n направления симметрии [1]. Пусть a, b — взаимно не сопряженные оси симметрии C_n; s_a и s_b — отражения относительно них. Если $A = a \cap b$, то $s_a s_b$ будет эллиптическим или гиперболическим поворотом вокруг точки A. В силу бесконечности G_2 число несобственных точек кривой C_n равно двум (они s-кратны). Поэтому старшая форма уравнения C_n в декартовых координатах имеет вид $c(x_1^2 - z^2 x_2^2)^s$; комплексное число $z = \alpha + \beta\varepsilon$ $(\alpha^2 + \beta^2 > 0,\ \alpha\beta = 0,\ \varepsilon = \sqrt{-1})$. Коника κ с уравнением $x_1^2 - z^2 x_2^2 = c_0$ инвариантна относительно группы G_2', изоморфной G_2; направления симметрии параллельных осей кривых κ и C_n совпадают.

Будем считать начало координат $O \neq A$ и $0 \neq c_0 = \tilde{x}_1^2 - z^2 \tilde{x}_2^2$, где точка $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in C_n$. Если s_a и s_b порождают бесконечную группу (это, в частности, будет при $\beta = 0$), то кривые κ и C_n имеют больше $2n$ общих точек. Согласно теореме Безу коника κ входит в состав C_n. Если же a и b задают стенки камеры для конечной (диэдральной) группы $[N]$ порядка $2N$, то $N > 2$, $\alpha = 0$ и коника κ является эллипсом, поскольку a и b взаимно не сопряжены. Некоторое центроаффинное преобразование f эллипс κ переводит в окружность. При этом G_2' переходит в группу, порожденную ортогональными отражениями; $f(C_n)$ имеет только оси ортогональной симметрии, которые обязаны проходить через одну точку O $(G_2 = G_2')$. Снова в силу теоремы Безу кривая $f(C_n)$, а значит, и C_n распадаются на коники эллиптического типа с общей симметрией.

В случае $a \parallel b$ преобразование $s_a s_b$ — параболический поворот. Орбита точки $b \in C_n$ относительно G_2 и парабола $\kappa \ni B$ с осями a, b содержат бесконечное множество общих точек, $\kappa \in C_n$.

Диаметры каждой коники (компоненты C_n) определяют вещественные коэффициенты ее уравнения, кроме свободного члена. Отметим, что кривая C_n может не иметь вещественных точек. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Инвариантность относительно G_2 неприводимой над полем комплексных чисел вещественной алгебраической кривой — характеристическое свойство коники (эллипса, гиперболы или параболы).*

При доказательстве леммы 1 использована идея доказательства равенства [9], основанная на теореме Безу. К новым применениям теоремы Безу относится работа И. Х. Сабитова [10], в которой описывается алгоритм проверки изгибаемости многогранника.

2. Строение орбиты направлений симметрии. Бесконечному множеству B_μ плоскостей симметрии поверхности F_n с группой G_μ соответствует множество N_μ направлений симметрии. Пусть $N_\lambda \subseteq N_\mu$ — бесконечная $G_\mu(\vec{u})$-орбита вектора $\vec{u} \in N_\mu$ (впервые это понятие введено в [11]). В декартовой системе координат Ox_i, $i = \overline{1, m}$, λ-плоскость $\Pi^\lambda(x_k) \subseteq \Pi^\mu(x_r)$, $k = \overline{1, \lambda}$, $r = \overline{1, \mu}$. Ей соответствует множество $B_\lambda \subseteq B_\mu$; отражения относительно плоскостей B_λ определяют группу $G_\lambda \subseteq G_\mu$. Строение множества N_λ определяет следующая лемма.

Лемма 2 [12]. *Линейная оболочка Π^λ множества N_λ поверхности F_n является суммой таких 2-плоскостей, что каждая 2-плоскость, параллельная любой 2-плоскости этой суммы и не лежащая на F_n, пересекают ее по вещественным и, может быть, мнимым коникам с общей симметрией.*

Доказательство. Пусть поверхность F_n задана уравнением

$$\sum_{s=0}^{n} \varphi_{n-s}(\vec{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi_{n-s}(\vec{x})$ — формы степеней $n-s$ от координат вектора $\vec{x} = (x_i)$. Асимптотический конус K_n поверхности F_n без параллельных плоскостей симметрии инвариантен относительно группы $\tilde{G}_\lambda$, изоморфной G_λ. Возьмем сходящуюся последовательность направлений симметрии $\vec{u}_t \to \vec{u}_0$ при $t \to \infty$. Если конус K_n является мнимым, то заведомо $\varphi_n(\vec{u}_0) \neq 0$; векторам $\vec{u}_h$ $(h = 0$ или $t)$ сопряжены диаметральные плоскости $D_{\vec{u}_h}$ поверхности F_n. Согласно (1) уравнения $D_{\vec{u}_h}$ имеют вид

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{\vec{x} = \vec{u}_h} x_i + \varphi_{n-1}(\vec{u}_h) = 0. \tag{2}$$

Пусть точки X_h симметричны точке $X \in F_n$ по направлениям $\vec{u}_h$ относительно $D_{\vec{u}_h}$ $(D_{\vec{u}_t} \in B_\lambda)$. На основании (2) $D_{\vec{u}_t} \to D_{\vec{u}_0}$ $(t \to \infty)$, поэтому $X_t \to$ $\to X_0$. Так как F_n содержит свои предельные точки, то $X_0 \in F_n$ и, значит, $D_{\vec{u}_0} \in B_\lambda$, $\vec{u}_0 \in N_\lambda$, т. е. множество N_λ является совершенным. Обозначим через g такое аффинное преобразование, что $\vec{v} = g(\vec{u}_0) \perp D_{\vec{v}}$. Тогда найдутся $\vec{w} \in g(N_\lambda)$, бесконечно малые $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, для которых $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} < \varepsilon_1$, $\widehat{(D_{\vec{v}}, D_{\vec{w}})} < \varepsilon_2$. При этом векторы $\vec{v}$ и $\vec{w}$ определяют больше n направлений симметрии, параллельных 2-плоскости $\Pi^2(\vec{v}, \vec{w})$. Следовательно, каждая 2-плоскость, параллельная Π^2, пересекает F_n по коникам эллиптического типа с общей симметрией (лемма 1).

Диаметральные поверхности $D_k(\vec{u})$ [1] применимы для выяснения строения F_n, имеющей вещественные асимптотические направления. Предположим, что любые два направления симметрии определяют конечную группу; она изоморфна группе, порожденной ортогональными отражениями [13]. В λ-плоскости $\Pi^\lambda(x_k)$, $k = \overline{1, \lambda}$, на единичной $(\lambda-1)$-сфере $S^{\lambda-1}$ с центром O, диаметрально противоположные точки которой отождествлены, N_λ задает множество $S^{\lambda-1}(N_\lambda)$ — сферическое изображение N_λ; $S^{\lambda-1}(K_n) = K_n \cap S^{\lambda-1}$. Согласно N_λ, $S^{\lambda-1}(N_\lambda) \cap S^{\lambda-1}(K_n) = \varnothing$ или $S^{\lambda-1}(N_\lambda) \subseteq S^{\lambda-1}(K_n)$.

В первом случае выберем λ линейно независимых точек $S^{\lambda-1}(N_\lambda)$, которые являются вершинами сферического λ-симплекса T^λ, причем $T^\lambda \cap$ $\cap S^{\lambda-1}(K_n) = \varnothing$. Если все внутренние точки T^λ принадлежат камере для некоторой конечной группы $G'_\lambda \subset \tilde{G}_\lambda$, то 2-плоскость, проходящая через O и любые две вершины T^λ, параллельна направлениям симметрии, множество которых бесконечно. Поэтому $T^\lambda \cap S^{\lambda-1}(N_\lambda)$ бесконечно; существует последовательность направлений симметрии $\vec{u}_t \to \vec{u}_0$ при $t \to \infty$ $(\varphi_n(\vec{u}_h) \neq 0)$, что снова дает 2-плоскость, пересекающую F_n по центральным коникам с общей симметрией.

Во втором случае Π^λ может лежать на асимптотическом конусе K_n. Пересечем его λ-плоскостью, определяемой, например, уравнениями $x_{\lambda+1} = 1, \ldots$ $\ldots, x_m = 1$. Старшая форма $\psi_p(x_r)$ многочлена $\varphi_n(x_r, 1, \ldots, 1)$ имеет степень $p \leq n$. Обозначим через A множество всех асимптотических направлений кратности $q > 1$ для $(\lambda-1)$-конуса с уравнением $\psi_p(x_r) = 0$ в Π^λ. Если A конечно, то получаем ситуацию группы G'_λ. Бесконечное A приводит к схеме случая $\varphi_n(\vec{u}_h) = 0$, $h = 0$ или t.

Если направлениям симметрии $\vec{u}$, $\vec{v}$ соответствуют параллельные плоскости симметрии поверхности F_n, то на основании теоремы Безу 2-плоскость, параллельная $\vec{u}$ и $\vec{v}$, пересекает F_n по параболам. Лемма доказана.

А. Е. Залесский [14] доказал лемму 2 для конуса K_n (независимо от [12]), если G_λ — приводимая неразложимая группа.

3. Типы поверхностей с параллельными плоскостями симметрии. Пусть множество B_λ содержит параллельные плоскости. Установим его строение.

Рассмотрим случай, когда плоскости симметрии являются диаметральными плоскостями поверхности F_n (B_λ состоит из диаметральных плоскостей симметрии, $B_\lambda = B_\lambda^c$).

Лемма 3 [12]. *Пусть множество B_λ^c поверхности F_n содержит параллельные плоскости; h — наибольшая размерность их общего векторного пространства. Тогда $h = m - \lambda + 1$; поверхность F_n можно задать уравнением*

$$\sum_{j=0}^{s} A_j(x_\gamma)(a_1 x_1^2 + \ldots + a_{\lambda-1} x_{\lambda-1}^2 + c x_\lambda)^{s-j} = 0,$$

где $n = 2s$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. Плоскости симметрии по направлениям векторов N_λ^c являются диаметральными плоскостями квадрики с уравнением $a_1 x_1^2 + \ldots$ $\ldots + a_{\lambda-1} x_{\lambda-1}^2 + c x_\lambda = 0$.

Доказательство. Зададим поверхность F_n уравнением (1). Пусть множество B_λ^c содержит параллельные плоскости по направлениям симметрии $\vec{u}$ и $\vec{v}$ с уравнениями

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\right)_{\vec{x} = \vec{p}} x_1 + \varphi_{n-1}(\vec{u}) = 0; \tag{3}$$

вектор $\vec{p} = \vec{u}$ или $\vec{v}$. Обозначим через Π^2 2-плоскость, параллельную $\vec{u}$, $\vec{v}$. Будем считать $Ox_1 \| \vec{u}$, $Ox_2 \| \Pi^2$; тогда $x_\alpha = c_\alpha$, $\alpha = \overline{3, m}$, — уравнения Π^2, вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, 0, \ldots, 0)$. Согласно лемме 1 кривая $C_n = \Pi^2 \cap F_n$ распадается на параболы с общей симметрией $(n = 2s)$. Поэтому в Π^2 ее задает уравнение

$$\sum_j a_j f^{s-j} = 0, \tag{4}$$

где многочлен $f = x_1^2 + a x_2^2 + b$ $(a \neq 0)$, a_j — вещественные числа, $f^0 = 1$. Диаметр C_n, сопряженный вектору $\vec{v}$, определяется уравнением (3) при $\vec{p} = \vec{v}$. Согласно (4) его уравнение принимает вид

$$2 v_1 x_1 + a v_2 = 0. \tag{5}$$

На основании (4) уравнение F_n запишем так:

$$\sum_j A_j(x_\alpha) \psi^{s-j} = 0, \tag{6}$$

многочлен $\psi = x_1^2 + \psi_1(x_\alpha)x_2 + \psi_2(x_\alpha)$, $\deg A_j \le 2j$, $A_0 = a_0$, $\deg\psi_1 \le 1$, $\deg\psi_2 \le 2$. Уравнение (6) показывает, что в (5) число a зависит от c_α, если $\deg\psi_1 = 1$. Но уравнение (3), не содержащее x_α, исключает этот случай; поэтому $\psi_1 = a$.

Согласно (6) все диаметральные плоскости поверхности F_n параллельны оси Ox_2. Значит, на этой оси лежит несобственная фундаментальная точка F_n [1]. Любой вектор Π^2, не параллельный Ox_2, задает направление симметрии поверхности F_n. Ему сопряжена диаметральная плоскость F_n с уравнением вида (3).

При $\lambda > 2$ существует плоскость симметрии $\pi \nparallel \Pi^2$ $(O \in \pi)$ по направлению симметрии $\vec{w} \nparallel \Pi^2$ $(\vec{w} \parallel \Pi_c^\lambda)$. Так как π является диаметральной плоскостью F_n, то $Ox_2 \parallel \pi$. Если $\Pi_0^2 = \sigma(\Pi^2)$, где $\sigma \in G_\lambda^c$ — отражение относительно π, то кривая $\sigma(C_n) \in \Pi_0^2$ состоит из парабол (как и C_n). Несобственная точка кривой $\sigma(C_n)$ лежит на оси Ox_2. При соответствующем выборе оси $Ox_3 \parallel \Pi_0^2$ получим следующее уравнение поверхности F_n:

$$\sum_j B_j(x_\beta)\chi^{s-j} = 0, \tag{7}$$

где $\chi = x_3^2 + a' x_2 + \chi_1(x_\beta)$, $\deg B_j \le 2j$, $B_0 = c$, $\deg\chi_1 \le 2$, $\chi^0 = \psi^0 = 1$, $\beta = 1, 4, \ldots, m$.

Из (6), (7) находим, что многочлен ψ_2 содержит $c' x_3^2$. Это дает строение многочлена ψ_2 (и χ_1), определяемое множеством B_λ^c. Если $\lambda > 2$, то $\psi_2 = d_0 x_3^2 + \ldots + d_{\lambda-3} x_\lambda^2 + \psi_3(x_\gamma)$, $A_j = A_j(\chi_\gamma)$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. Лемма доказана.

Пусть теперь направления N_λ являются асимптотическими для поверхности F_n [1]. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4 [12]. *Если множество B_λ поверхности F_n содержит параллельные плоскости с асимптотическими для нее направлениями симметрии, то F_n можно задать уравнением*

$$\sum_{j=0}^{s} B_j(x_\gamma)(b_1 x_1^2 + \ldots + b_{\lambda-1} x_{\lambda-1}^2 + c x_\lambda)^{s-j} = 0,$$

где $2s < n$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. Плоскости B_λ не являются вырожденными диаметральными плоскостями $V_{\vec{u}}$, $\vec{u} \in N_\lambda$.

Доказательство. Пусть B_λ содержит семейство плоскостей, определяемое уравнением

$$x_1 = c; \tag{8}$$

соответствующие направления симметрии параллельны 2-плоскости $\Pi^2(x_1, x_2)$. Каждая не лежащая на F_n 2-плоскость $\Pi_0^2 \parallel \Pi^2$ пересекает F_n по кривой C_{2s} порядка $2s < n$ с уравнением (4). Поэтому уравнение F_n имеет вид

$$\sum_j Z_j(x_\alpha)\kappa^{s-j} = 0, \tag{9}$$

где многочлен $\chi = x_1^2 + \kappa_1(x_\alpha)x_2 + \kappa_2(x_\alpha)$, $n \ge \deg Z_j + (s-j)\deg\kappa$, $\alpha =$

$= \overline{3, m}$. Так как диаметры кривой C_{2s} определяются в Π_0^2 уравнением (8), то $\deg \kappa_1 = 0$.

Если $\lambda > 2$, то B_λ содержит бесконечное множество семейств параллельных плоскостей. При этом бесконечно множество плоскостей симметрии, проходящих через точку O. Отразив Π^2 и семейство (8) относительно любой плоскости B_λ, содержащей O, по ее направлению симметрии $\vec{u} \parallel \Pi^\lambda - \Pi^2$, получим 2-плоскость Π_1^2 и новое семейство параллельных плоскостей, направления симметрии которых определяются векторами Π_1^2. Так как произвольному направлению N_λ сопряжена только одна плоскость симметрии, то 2-плоскости Π^2 и Π_1^2 пересекаются по оси Ox_2, которая задает асимптотическое направление для C_{2s}. Следовательно, имеем пучок 2-плоскостей с осью Ox_2; каждый вектор любой из них, не параллельный Ox_2, принадлежит N_λ. Поэтому $\kappa_2 = a_0 x_3^2 + \ldots + a_{\lambda-3} x_\lambda^2 + \kappa_3(x_\gamma)$, $Z_j = Z_j(x_\gamma)$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$.

Пусть плоскость симметрии, проходящая через O, является вырожденной диаметральной плоскостью $V_{\vec{u}}$ поверхности F_n. Тогда она входит в состав асимптотического конуса K_n [1]. На основании (9) $\{V_{\vec{u}}\} \cap B_\lambda = \varnothing$. Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 вытекает такое следствие.

Следствие. *Если при $\lambda = m$ неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность имеет параллельные плоскости симметрии, то она является параболоидом.*

4. Общее уравнение поверхности с диаметральными плоскостями симметрии. Пусть векторы N_μ задают неасимптотические направления для поверхности F_n $(N_\mu = N_\mu^c)$; множество B_μ^c состоит из диаметральных плоскостей симметрии.

Найдем общее каноническое уравнение поверхности F_n и выясним строение множеств N_μ^c и B_μ^c, определяющих группу G_μ^c.

Лемма 5 [12]. *Если множество B_λ^c поверхности F_n не содержит параллельных плоскостей, то F_n определяется уравнением*

$$\sum_{j=0}^{s} D_j(x_\gamma)\left(\sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\gamma) x_k\right)^{s-j} = 0,$$

где $n = 2s$, *все* $a_p \neq 0$, $\deg \xi_k \leq 1$, $1 \leq \tau \leq \lambda \leq m$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. *Множество* B_λ^c *состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением*

$$\sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\gamma) x_k = 0.$$

Доказательство. Пусть B_λ^c не содержит параллельных плоскостей. Направлениям N_λ^c сопряжены диаметральные $(\lambda-1)$-плоскости $(\lambda-1)$-поверхности $\Pi_c^\lambda \cap F_n$. Если $\lambda = 2$, то каждая 2-плоскость, параллельная Π^2, пересекает F_n по коникам (лемма 1). При $\lambda > 2$ возьмем такое бесконечное подмножество N_λ^c, линейная оболочка которого представляет собой $(\lambda-1)$-плоскость $\Pi^{\lambda-1}$. В случае $\lambda > 3$ предположим, что $F_n^{\lambda-2} = \Pi_0^{\lambda-1} \cap F_n$

$(\Pi_0^{\lambda-1} \parallel \Pi^{\lambda-1})$ распадается на вещественные и мнимые $(\lambda-2)$-квадрики с общей симметрией. Считая $\Pi_0^{\lambda-1} \parallel Ox_\alpha$ $(\alpha = \overline{1, \lambda-1} > 1)$, получаем такое уравнение $F_n^{\lambda-2}$ в $\Pi_0^{\lambda-1}$ (при подходящем выборе Ox_α):

$$\sum_j a_j g^{s-j} = 0; \tag{10}$$

многочлен $g = \sum_\beta b_\beta x_\beta^2 + \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha + d$, $1 \le \beta \le \lambda - 1$, $\prod_\beta b_\beta \ne 0$, $g^0 = 1$. Следовательно, уравнение поверхности F_n имеет вид

$$\sum_j D_j(x_\delta)\xi^{s-j} = 0, \tag{11}$$

где

$$\xi = \sum_\beta b_\beta x_\beta^2 + \sum_\alpha \xi_\alpha(x_\delta)x_\alpha + \xi_\lambda(x_\delta),$$

$$\deg D_j \le 2j, \quad D_0 = a_0, \quad \deg \xi_\alpha \le 1, \quad \deg \xi_\lambda \le 2, \quad \delta = \overline{\lambda, m}.$$

Коэффициенты c_α, d многочлена g в (10) определяются функциями ξ_α, ξ_λ и $(\lambda-1)$-плоскостью $\Pi_0^{\lambda-1}$.

В силу строения N_λ^c (лемма 2) через каждую прямую $\Pi^{\lambda-1}$ неасимптотического для F_n направления проходит 2-плоскость, не принадлежащая $\Pi^{\lambda-1}$ и пересекающая F_n по коникам. Такой 2-плоскостью будем считать координатную $\Pi_1^2(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$. При этом уравнение (11) запишем так:

$$\sum_j H_j(x_k)\eta^{s-j} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\eta = b_{11}x_{\lambda-1}^2 + b_{12}x_{\lambda-1}x_\lambda + b_{22}x_\lambda^2 + b_{13}(x_k)x_{\lambda-1} + b_{23}(x_k)x_\lambda + \eta_1(x_{\beta_1}) + \eta_2(x_\gamma)$, $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 > 0$, $\deg b_{13}$ (и b_{23}) ≤ 1, $\deg \eta_1$ (и η_2) ≤ 2, $k = i \ne \lambda-1, \lambda$; $\beta_1 = \beta < \lambda - 1$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$.

Так как $\delta = \overline{\lambda, m}$, то все одночлены (12), имеющие $x_{\lambda-1}$, находятся в (11) без использования D_s. Многочлен $\xi_\lambda = cx_\lambda^2 + \xi_1(x_\gamma)x_\lambda + \xi_2(x_\gamma)$, $\deg \xi_1 \le 1$, $\deg \xi_2 \le 2$. Если $a_0 = H_0 = 1$ и $b_{\lambda-1} \ne 0$, что сохраняет общность, то коэффициенты при $x_{\lambda-1}^{2s}$, $x_{\lambda-1}^{2s-2}x_\lambda^2$, $x_{\lambda-1}^s x_\lambda^s$, $x_{\lambda-1}^{2s-2}x_\lambda$ удовлетворяют равенствам $b_{\lambda-1} = b_{11}$, $c = b_{22}$, $b_{12} = a$ $(\xi_{\lambda-1} = ax_\lambda + \ldots)$, $b_{23} = \xi_1$. Поэтому многочлены D_j, $j > 0$, должны зависеть от x_γ; Π_0^λ пересекает F_n по $(\lambda-1)$-квадрикам с общей симметрией.

Лемма доказана.

Следствие. *Если неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность, инвариантная относительно группы G_m^c, не имеет параллельных плоскостей симметрии, то она является центральной квадрикой.*

В общем случае λ-плоскость Π_c^λ принадлежит такой λ'-плоскости $\Pi_c^{\lambda'}$ $(\lambda' \ge \lambda)$, что $\Pi^{\lambda'} \parallel \Pi_c^{\lambda'}$ пересекает F_n по $(\lambda'-1)$-квадрикам с общей симметрией. Для получения общего уравнения поверхности F_n необходимо выделить μ_0-плоскость $\Pi_c^{\mu_0}$, где $\mu_0 = \max\{\lambda'\}$, $\mu_0 \geq \lambda$. Тогда некоторая μ'-плоскость $\Pi_c^{\mu'}(x_r)$, $r = \overline{1, \mu'} \geq \mu$, разлагается в прямую сумму μ_j-плоскостей $\Pi_c^{\mu_j}$-линейных оболочек множеств $N_{\mu_j}^c \subset N_{\mu'}^c$ соответственно, а именно:

$$\Pi_c^{\mu'} = \bigoplus_j \Pi_c^{\mu_j}, \quad j = \overline{0, p} \leq \left[\frac{\mu'}{2}\right] - 1; \tag{13}$$

числа μ_j при $j > 0$ аналогичны μ_0, $N_{\mu'}^c$ и $B_{\mu'}^c$ определяют группу $G_{\mu'}^c$. Так как любая из $\Pi_c^{\mu_j}$ может быть линейной оболочкой двух орбит, то $\bigcup_j N_{\mu_j}^c \subseteq$ $\subseteq N_{\mu'}^c$. Строение поверхности F_n в каждой из μ_j-плоскостей $\Pi_c^{\mu_j}$ раскрывают леммы 3 и 5, на основании которых справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [12]. *Общее каноническое уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно группы $G_{\mu'}^c$, можно записать так*:

$$F(f_j, x_{\mu'+1}, \ldots, x_m) = 0, \quad j = \overline{0, p} \leq \left[\frac{\mu'}{2}\right] - 1, \tag{14}$$

где $n = 2s$, квадратичные многочлены

$$f_0(x_1, \ldots, x_{\mu_0}),\ f_1(x_{\mu_0+1}, \ldots, x_{\mu_0+\mu_1}),\ \ldots\ ,\ f_p(x_{\mu'-\mu_p+1}, \ldots, x_{\mu'})$$

содержат все указанные в скобках переменные (и зависят, может быть, от $x_{\mu'+1}, \ldots, x_m$), F есть многочлен от всех своих аргументов, имеющий степень s относительно f_j; при заданном j μ_j-плоскость $\Pi^{\mu_j} \parallel \Pi_c^{\mu_j}$ пересекает F_n по $(\mu_j - 1)$-квадрикам с общей симметрией. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов $N_{\mu_j}^c$ являются диаметральными плоскостями квадрик с уравнениями $f_j = 0$; если $p > 0$, то эти квадрики — цилиндры.

И наоборот, если поверхность F_n задана уравнением вида (14), *то она инвариантна относительно группы $G_{\mu'}^c$; диаметральные плоскости указанных выше квадрик являются плоскостями симметрии F_n, принадлежащими ее множеству диаметральных плоскостей.*

Бесконечные группы G_μ, для которых алгебра инвариантов J^{G_μ} конечно порождена, назовем *группами Гильберта* $(G_\mu = G_H)$[15]. Теорема 1 устанавливает, что $G_\mu^c = G_H$, и при этом дает систему образующих алгебры инвариантов произвольной G_μ^c.

5. Общее уравнение поверхности с тетраэдральной группой симметрий. Пусть индекс t, дописанный символам B_μ, N_μ, Π^μ, G_μ, означает, что направления симметрии являются асимптотическими для поверхности F_n [1]. Более того, линейная оболочка произвольной $G_\mu^t(\vec{u})$-орбиты вектора $\vec{u} \in N_\mu^t$, например Π_t^λ, удовлетворяет такому условию: хотя бы одна λ-плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π_t^λ, не пересекает F_n по $(\lambda - 1)$-квадрикам с общей симметрией.

Лемма 6 [12]. *Если поверхность F_n инвариантна относительно группы G_λ^t, то число $\lambda > 2$ и уравнение F_n допускает вид*

$$\sum_{j=0}^{s} P_j(x_\gamma)(x_1 \ldots x_\lambda)^{s-j} = 0, \tag{15}$$

где $n \geq \deg P_j + \lambda(s-j)$, $\gamma = \overline{\lambda+1, m}$. *Множество* B_λ^t *состоит из плоскостей симметрии поверхности с уравнением* $x_1 \ldots x_\lambda = c \neq 0$.

Доказательство. На основании леммы 4 параллельные плоскости не входят в множество B_λ^t. При этом Π_λ^t есть сумма таких 2-плоскостей, что каждая 2-плоскость с собственной точкой F_n, параллельная любой 2-плоскости этой суммы, пересекает F_n по коникам (лемма 2); доказательство этого утверждения не зависит от числа $\lambda > 2$. Рассмотрим первоначально случай $\lambda = m = 3$. Пусть $E^3 = \Pi^2(x_1, x_2) + \Pi_0^2(x_2, x_3)$; каждая из указанных плоскостей не лежит на F_n и параллельна $n' > n$ векторам множества N_λ^t (коллинеарные векторы не различаются). Обозначим через Π_h^2 плоскость с уравнением $x_3 = h$ такую, что $\Pi_h^2 \cap F_n \neq \varnothing$ в E^3. Кривая C_{2s}^h $(2s < n)$ определяется в Π_h^2 уравнением (10), если к g добавить одночлен $b_0 x_1 x_2$. Поэтому уравнение F_n имеет вид

$$\sum_j A_j(x_3)\xi^{s-j} = 0; \tag{16}$$

многочлен $\xi = \sum_{\alpha \leq \beta} \xi_{\alpha\beta}(x_3) x_\alpha x_\beta + \sum_\alpha \xi_{\alpha 3}(x_3) x_\alpha + \xi_{33}(x_3)$, где $\alpha, \beta = 1, 2$; $n \geq \deg A_j + (s-j)\deg \xi$.

Согласно выбору Π_0^2 уравнение (16) перепишем так:

$$\sum_j B_j(x_1)\eta^{s-j} = 0, \tag{17}$$

где $\eta = \sum_{\alpha \leq \beta} \eta_{\alpha\beta}(x_1) x_\alpha x_\beta + \sum_\alpha \eta_{\alpha 3}(x_1) x_\alpha + \eta_{33}(x_1)$; $n \geq \deg B_j + (s-j)\deg \eta$. Здесь ξ и η не имеют множителя, являющегося многочленом от x_3 и x_1 соответственно.

Плоскость симметрии F_n, сопряженную вектору $\vec{u}$, зададим уравнением

$$\sum_i p_i(\vec{u}) x_i + p_4(\vec{u}) = 0. \tag{18}$$

Тогда $p_1 p_2 \not\equiv 0$ в случае $\vec{u} \parallel \Pi^2$. Действительно, если, например, $p_2 \equiv 0$, то $\xi_{\alpha\beta} \equiv 0$ и (16) становится уравнением вида (6); F_n имеет параллельные плоскости симметрии, что исключается. Следовательно, кривая C_{2s}^h распадается на центральные коники; уравнение (18) при $x_3 = h$ определяет в Π_h^2 их оси симметрии. Так как p_1 и p_2 не зависят от h, то, в частности, многочлены $\xi_{\alpha\beta}$ постоянны: $\xi_{11} = b_1$, $\xi_{12} = b_0$, $\xi_{22} = b_2$, $A_j(h) = a_j$. Аналогично находим $\eta_{11} = b_{11}$, $\eta_{12} = b_{12}$, $\eta_{22} = b_{22}$ (см. (12) и (17)).

Пусть две плоскости симметрии пересекаются по прямой l (их направления симметрии параллельны Π^2). Так как центры C_{2s}^h лежат на l, то любая плоскость B_3^t по направлению симметрии $\vec{u} \parallel \Pi^2$ проходит через l. При этом существует $\sigma_0 \in G_3^t \mid \sigma_0(\Pi^2) \ni l$. Считая $\sigma_0(\Pi^2) = \Pi_0^2$ и $Ox_3 = l$, получаем $p_3 \equiv p_4 \equiv 0$. Поэтому $\xi_{13} \equiv \xi_{23} \equiv 0$.

Если все плоскости B_3^t по направлениям симметрии $\vec{u} \parallel \Pi^2$ проходят через

Ox_1 (что сохраняет общность), то они определяются уравнением (18) при $p_1 \equiv \equiv p_4 \equiv 0$. Значит, $\eta_{13} \equiv \eta_{23} \equiv 0$. Поскольку Π^2 и Π_0^2 пересекают F_n по несобственным прямым, например, кратности q, несобственная точка оси Ox_2 является $2q$-кратной точкой F_n. Следовательно, Ox_2 не задает направление симметрии. Диаметры кривой C_{2s}^h — ее оси симметрии — являются попарно сопряженными; поэтому уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ не определяют плоскости симметрии F_n. Так как число несобственных прямых F_n не больше n, то произвольный элемент $\sigma \in G_3^t$ каждую из указанных двух плоскостей переводит в координатную плоскость. Значит, старшая форма уравнений (16) и (17) содержит член $x_1 x_2 x_3$. Поэтому $b_1 = b_2 = b_{11} = b_{22} = 0$ и, следовательно, $A_0 = = h_0 x_3^s$, $n = 3s$. Сравнение (16) и (17) показывает строение всех $A_j = h_j x_3^{s-j}$ $(j > 0)$; h_j — вещественные числа. При этом $\deg \xi_{33} = \deg \eta_{33} = 0$ и уравнение (16) принимает вид (15), где $P_j = h_j$.

В случае $\lambda = 3 < m$ существует 3-плоскость $\Pi_0^3 \notin F_n$ с уравнением $x_\gamma = c_\gamma$ $(\gamma = \overline{4, m})$, не пересекающая F_n по 2-квадрикам. Значит, 2-поверхность $\Pi_0^3 \cap F_n$ определяется в Π_0^3 уравнением

$$\sum_j d_j (x_1 x_2 x_3)^{s-j} = 0, \tag{19}$$

где d_j — вещественные числа. Строение Π_t^3 показывает, что все плоскости B_3^t проходят через одну $(m-3)$-плоскость, которую будем считать параллельной Ox_γ. На основании (19) получаем такое уравнение F_n:

$$\sum_j \left[P_j(x_\gamma) + P_j'(x_i)\right](x_1 x_2 x_3)^{s-j} = 0, \tag{20}$$

$$P_j'(x_1, x_2, x_3, c_\gamma) \equiv 0, \qquad i = \overline{1, m}.$$

Из (20) следует, что каждая 3-плоскость, параллельная Π_t^3, не пересекает F_n по 2-квадрикам. Поэтому $P_j'(x_i) \equiv 0$ и (20) становится уравнением (15), в котором $\lambda = 3$.

Если $3 < \lambda \le m$, то предположим, что существует $(\lambda - 1)$-плоскость $\Pi^{\lambda-1} \| \Pi_t^\lambda$, пересекающая F_n по вещественным и, может быть, мнимым $(\lambda - - 2)$-поверхностям с уравнениями $x_1 \ldots x_{\lambda-1} = c_k$, $k = \overline{1, s}$, в $\Pi^{\lambda-1}$. Тогда, как и выше, получим уравнение поверхности F_n вида (15).

Лемма доказана.

В пространстве E^m уравнение $x_1 \ldots x_m = c \ne 0$ задает тетраэдральную поверхность [16]. Ее бесконечная группа G_m^t содержит D_m.

Для μ-плоскости $\Pi_t^\mu(x_r)$, $r = \overline{1, \mu}$, справедливо разложение, аналогичное (13). На основании леммы 6

$$\Pi_t^\mu = \bigoplus_j \Pi_t^{\mu_j}, \qquad j = \overline{0, p} \le \left[\frac{\mu}{3}\right] - 1;$$

μ_j-плоскости $\Pi_t^{\mu_j}$ являются линейными оболочками орбит $N_{\mu_j}^t$ $(\mu_0 = \lambda)$. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [12]. *Общее каноническое уравнение поверхности F_n, инвариан-*

тной относительно тетраэдральной группы G^t_μ, *можно записать так*:

$$F(\zeta_j, x_{\mu+1}, \ldots, x_m) = 0, \quad j = \overline{0, p} \le \left[\frac{\mu}{3}\right] - 1, \tag{21}$$

где

$$\zeta_0 = x_1, \ldots, x_{\mu_0}, \quad \zeta_1 = x_{\mu_0+1}, \ldots, x_{\mu_0+\mu_1}, \quad \ldots \quad , \quad \zeta_p = x_{\mu-\mu_p+1}, \ldots, x_\mu;$$

F *есть многочлен от всех своих аргументов, его степень относительно* ζ_j *не превышает* $\left[\frac{n}{3}\right]$. *Плоскости симметрии поверхности* F_n *по направлениям векторов орбит* $N^t_{\mu_j}$ *являются плоскостями симметрии поверхностей с уравнениями* $\zeta_j = c$ *соответственно.*

Справедливо и обратное утверждение: *если поверхность* F_n *задана уравнением вида* (21), *то она инвариантна относительно группы* G^t_μ.

Из теоремы 2 следует, что G^t_μ являются группами Гильберта ($G^t_\mu = G_H$).

1. *Игнатенко В. Ф.* Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. I // Укр. мат. журн. – 1988. – **50**, № 5. – С. 639–653.
2. *Piazzola-Beloch M.* Proprieta diametrali delle superficie algebriche // Atti der quarto congresso dell'Unione Mat. Italia. Sez. VII. – 1952–1953. – № 2. – P. 151–154.
3. *Rosina B. A.* Sulle curve algebriche piane con infiniti assi di simmetria obliqua (in particolare ortogonale) // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. – 1970. – **15**, № 10. – P. 153–159.
4. *Rosina B. A.* Sulla simmetria obliqua ed ortogonale delle curve algebriche piane // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. – 1975. – **20**. – P. 69–98.
5. *Голод П. І., Клімик А. У.* Математичні основи теорії симетрій. – Київ: Наук. думка, 1992. – 368 с.
6. *Zalesskii A. E.* The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // Arch. Math. – 1983. – **41**. – P. 434–437.
7. *Велесько А. Е.* Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР. – 1986. – **30**, № 2. – С. 105–107.
8. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техники. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1984. – **16**. – С. 155–229.
9. *Игнатенко В. Ф.* О плоских алгебраических кривых с осями симметрии // Укр. геом. сб. – 1978. – Вып. 21. – С. 31–33.
10. *Сабитов И. Х.* Об одном алгоритме проверки изгибаемости многогранника // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. – 1994. – № 2. – С. 56–61.
11. *Игнатенко В. Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии в пространстве E^m // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – 1976. – Вып. 7. – С. 34–39.
12. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геом. сб. – 1977. – Вып. 20. – С. 35–46.
13. *Flatto L.* Invariants of finite reflection groups // Enseign. math. – 1978. – **24**, № 3–4. – P. 237–292.
14. *Залесский А. Е.* Приводимые линейные группы, порожденные псевдоотражениями // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1983. – № 5. – С. 3–9.
15. *Игнатенко В. Ф.* Перестроечный метод и дикие группы косых симметрий // Тез. докл. второй крым. мат. школы „Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь, 1995. – С. 24–25.
16. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969. – 176 с.

Получено 13.03.97