УДК 517.9

О. Н. Комаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ В ОКОЛІ КУТОВИХ ТОЧОК*

At the corner points on boundary of a domain, the asymptotic expansion is obtained for the eigen-functions of spectral problems which describe the proper oscillations of ideal liquid partially filling the cavity of a solid body. The cases are established where the eigen-functions have the singularities at a corner point.

Одержано асимптотичний розклад в кутових точках на межі області власних функцій спектральних задач, які описують власні коливання ідеальної рідини, що частково заповнює порожнину твердого тіла. Виявлено випадки, коли власні функції мають особливості в кутовій точці.

Загальні крайові задачі для еліптичних рівнянь в областях з кутовими і конічними точками на межі області досліджені в роботі [1]. В ній одержано в загальному вигляді асимптотичний розклад розв'язків в околі зазначених точок. Коефіцієнти при його членах залежать від коефіцієнтів рівняння в області і коефіцієнтів диференціальних виразів крайових умов, правих частин задачі, межі області і тому визначити їх в загальному випадку практично неможливо.

В роботі [2] розглядалась спектральна крайова задача з параметром у крайовій умові в області з кутовою точкою на межі. Еліптичні крайові задачі в областях з кусково-гладкою межею розглядались у роботі [3].

В даній роботі досліджуються властивості в кутових точках власних функцій спектральних крайових задач, які описують власні коливання ідеальної рідини, що частково заповнює порожнину твердого тіла, у випадках, коли сили поверхневого натягу не враховуються [4] і враховуються [5]. У першому випадку задача є еліптичною і досліджується методами, викладеними в роботі [1]; друга задача не є класичною і безпосередньо до неї зазначені методи не застосовуються. Одержані в роботі результати справедливі для задачі про поперечні, плоскі коливання ідеальної рідини в каналі [4].

В асимптотичних розкладах власних функцій розглядуваних задач були визначені коефіцієнти при членах до третього порядку. Таким чином встановлені випадки, коли розв'язки мають неперервні похідні другого порядку і коли в цих похідних з'являються особливості в кутовій точці.

На основі одержаних результатів пропонується інша крайова умова в кутовій точці для моделі руху рідини з поверхневим натягом, при якій другі похідні власних функцій не будуть мати особливостей. Власні функції одержаної спектральної задачі можна використати при знаходженні розв'язків нелінійної задачі, яка описує не малі коливання рідини в посудині [6].

1. Задача, яка описує коливання рідини без поверхневого натягу [4], формулюється таким чином:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в області} \quad Q,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \kappa\varphi \quad \text{на} \quad \Sigma, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{1}$$

де κ — спектральний параметр, Σ — вільна поверхня рідини, яка є площиною, S — частина твердої стінки, змочена рідиною.

Задача, яка виникає при врахуванні сил поверхневого натягу, має вигляд [5]

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad Q,$$

* Виконана при частковій фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки і технологій.

$$-\Delta_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n} + a\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \kappa\varphi \quad \text{на} \quad \Sigma,$$
$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) = k\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \text{на} \quad l = \partial\Sigma, \tag{2}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S \quad (\bar{S} \vee \bar{\Sigma} = \partial Q),$$

де вільна поверхня Σ в загальному випадку не є плоскою; Δ_Σ — двовимірний оператор Лапласа – Бельтрамі; a, k — сталі, дійсні величини, причому $k = \dfrac{k_1 - k_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$; θ_0 — двогранний кут між поверхнями Σ і S в точках лінії їх перетину l; k_0 і k_1 — кривизни ліній перетину цих поверхонь з площиною, перпендикулярною до l, в точці їх перетину з l; ν — нормаль до l, яка дотикається до Σ.

Нижче, для спрощення викладок, розглянемо задачу (2) у випадку, коли кут $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ і вільна поверхня Σ є плоскою. В цьому випадку Δ_Σ є двовимірним оператором Лапласа на Σ.

Задачі (1) і (2) зводяться до операторних рівнянь і їх розв'язки знаходяться в просторі $W_2^1(Q)$ [4, 5]. Для цих задач існують нескінченні послідовності власних значень $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$, які прямують до нескінченності. Відповідні власні функції $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ належать простору Соболєва $W_2^1(Q)$. Із теорії еліптичних крайових задач [7] випливає, що власні функції задачі (1), а також задачі (2) є гладкими функціями в області Q впритул до гладких кусків межі. Проте вони можуть мати особливості на ребрі l.

Розглянемо задачі (1), (2) у важливому випадку осесиметричної області Q. У цьому випадку, після відокремлення кутової змінної, задачі (1) і (2) зводяться до двовимірних задач. Виберемо декартову систему координат Oxy так, щоб площина Oxy співпадала з вільною поверхнею Σ, а вісь Oz була направлена по осі симетрії області Q, при цьому область Q буде лежати в півпросторі $z < 0$. Введемо в системі $Oxyz$ циліндричні координати r, θ, z. Тоді власні функції визначаються у вигляді $\varphi_{mn} = \begin{matrix}\sin m\theta \\ \cos m\theta\end{matrix}\, u_{mn}(r, z)$ і задача (1) зводиться до наступної задачі в меридіальному перерізі G області Q [8]:

$$Au \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{m^2}{r}u = 0 \quad \text{в} \quad G, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa u \quad \text{на} \quad L_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L_1, \tag{4}$$

де L_0, L_1 — відповідно лінії перетину поверхні Σ і S з меридіальною площиною.

Задача (2) у розглядуваному випадку осесиметричної області Q, коли $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ і Σ є плоскою, зводиться до двовимірної задачі, яка має такий вигляд:

$$Au = 0 \quad \text{в} \quad G, \tag{5}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right) + \left(ar - \frac{m^2}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa r u = 0 \quad \text{на} \quad L_0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) - k\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{в точці } \bar{L}_0 \cap \bar{L}_1 \ (n \text{ — нормаль до } L_0), \tag{6'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L_1, \tag{7}$$

де $k = k_1$, k_1 — кривизна лінії L_1 в кутовій точці $\bar{L}_0 \cap \bar{L}_1$.

Для дослідження крайових задач в областях з кутовими точками використовуються вагові простори $W_{2,\alpha}^k(G)$ і $W_{2,\alpha}^{k-1/2}(\partial G)$ функцій, заданих відповідно в області G і на границі ∂G [1]. Норми в цих просторах визначаються формулами

$$|u|^2_{W_{2,\alpha}^k(G)} = \sum_{i=0}^{k} \int_G \rho_1^{\alpha-2(k-i)} \left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|^2 dG, \tag{8}$$

$$|\psi|^2_{W_{2,\alpha}^{k-1/2}(\partial G)} = \inf_{u|_{\partial G} = \psi} |u|_{W_{2,\alpha}^k(G)}, \tag{9}$$

де ρ_1 — відстань до кутової точки.

Неважко показати, що функції із $W_2^1(G)$ належать ваговому простору $W_{2,\varepsilon}^1(G)$ при будь-якому $\varepsilon > 0$. Із результатів роботи [2] випливає, що власні функції задачі (3), (4) належать ваговому простору $W_{2,\varepsilon+2}^2(G)$. Внаслідок однорідності задачі ці функції належать також простору $W_{2,\varepsilon+2+2k}^{2+k}(G)$ для довільного цілого $k > 0$.

2. Будемо будувати асимптотичний розклад власних функцій задачі (3), (4) при більш загальних допущеннях, ніж в гідродинамічній задачі, а саме, коли лінія L_0 буде кривою в околі кутової точки.

Нехай кут $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ і лінії L_0, L_1 в околі кутової точки з координатами $r = 1$, $z = 0$ визначаються відповідно рівняннями

$$z = f_1(1-r), \qquad 1 - r = f_2(z).$$

Вважаємо, що функції f_1 і f_2 є достатньо гладкими в околі нуля.

Відобразимо область G в деякому околі Ω кутової точки з допомогою заміни змінних

$$\eta = z - f_1(1-r), \qquad \xi = 1 - r - f_2(z) \tag{10}$$

в прямолінійний кут $\mathcal{D}$ величиною $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ в околі Ω_1 його вершини. Цей кут $\mathcal{D}$ в площині $O\eta\xi$ визначається нерівностями $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\rho > 0$, де ρ, θ — полярні координати.

При такому перетворенні змінних рівняння і крайові умови задачі (3), (4) в околі Ω перейдуть в рівняння

$$\begin{gathered} A_1 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D} \cap \Omega_1, \\ Bu \equiv b_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + cu = 0 \quad \text{на} \quad (L_0' \cup L_1') \cap \Omega_1, \end{gathered} \tag{11}$$

де L_0' і L_1' — граничні прямі кута $\mathcal{D}$, відповідні кривим L_0 і L_1,

$$b_1|_{L_0'} = \sqrt{1+f_1'^2}, \quad b_2|_{L_0'} = \frac{-f_1'-f_2'}{\sqrt{1+f_2'^2}}.$$

$$b_1|_{L_1'} = \frac{f_1'+f_2'}{\sqrt{1+f_2'^2}}, \quad b_2|_{L_1'} = -\sqrt{1+f_2'^2}, \tag{12}$$

$$c|_{L_0'} = \kappa, \quad c|_{L_1'} = 0.$$

Для побудови асимптотичного розкладу (а. р.) власних функцій використовуються розклади в ряди по ρ_1 в околі кутової точки коефіцієнтів операторів $A_1 u$, Bu. Нижче використовуємо наступні розклади для коефіцієнтів b_i:

$$\begin{aligned} b_1|_{L_0'} &= 1+\frac{1}{2}f_1''^2(0)\rho^2+O(\rho^3), \\ b_2|_{L_0'} &= -f_1''(0)\rho+O(\rho^2), \\ b_1|_{L_1'} &= -f_2''(0)\rho+O(\rho^2), \\ b_2|_{L_1'} &= -1-\frac{1}{2}f_2''^2(0)\rho^2+O(\rho^3). \end{aligned} \tag{13}$$

Коефіцієнти оператора $A_1 u$ також розкладаються в ряди по ρ.

Продовжимо рівняння і крайові умови (11) на весь кут $\mathcal{D}$. Нехай $\omega(\rho)$ — зрізуюча функція, яка дорівнює одиниці в деякому околі Ω_2 кутової точки, $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$, і нулю зовні Ω_1. Візьмемо функцію $\hat{u} = \omega u$ і продовжимо коефіцієнти операторів задачі (11) на весь кут $\mathcal{D}$. Тоді функція $\hat{u}$ буде розв'язком наступної задачі у всьому куті:

$$A_1\hat{u} = F \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad B\hat{u} = \Phi \quad \text{на} \quad L_0'\cup L', \tag{14}$$

де функції F і Φ будуть дорівнювати нулю в околі Ω_2 вершини кута $\mathcal{D}$ і зовні більшого околу ніж Ω_1.

А. р. розв'язків $\hat{u}$ задачі (14) одержується шляхом зведення її до допоміжної задачі, яка визначається головними частинами її операторів з коефіцієнтами, зафіксованими в вершині кута [1]. Допоміжною задачею для (14) буде задача Неймана у всьому куті

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\mathcal{D}. \tag{15}$$

Запишемо задачу (14) у вигляді наступної допоміжної задачі:

$$\Delta\hat{u} = (\Delta - A_1)\hat{u} + F \quad \text{в} \quad \mathcal{D},$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial n} = \left(\frac{\partial}{\partial n} - B\right)\hat{u} + \Phi \quad \text{на} \quad L_0'\cup L_1'. \tag{15$'$}$$

Тепер, виходячи із (15$'$) і враховуючи, що $\hat{u} \in W^{2+k}_{2,\varepsilon+2+2k}(\mathcal{D})$, за алгоритмом роботи [1] знайдемо послідовно декілька членів а. р. функції $\hat{u}$. Одні з цих членів будуть розв'язками однорідної допоміжної задачі (15) ($f = \varphi = 0$), інші — розв'язками неоднорідних задач з спеціальними правими частинами вигляду

$$\Delta v = \rho^{\lambda_i - 2 + m} \ln^q \rho F_{i,m}(\theta), \quad \text{в} \quad \mathcal{D},$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \rho^{\lambda_i - 1 + m} \ln^q \rho \Phi_{i,m}(\theta) \quad \text{на} \quad \partial \mathcal{D}. \tag{16}$$

Розв'язками однорідної задачі (15) будуть

$$w_i = \rho^{\lambda_i} \cos \lambda_i \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \lambda_i = \frac{i\pi}{\theta_0}, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{17}$$

Далі використаємо розв'язки неоднорідної задачі (16) у випадку $m = 0$, $q = 0$, $i \neq 0$. Для них одержимо формулу

$$v_i = N_i \left[\rho^{\lambda_i} \cos(\theta - \theta_1) \ln \rho - \rho^{\lambda_i} \sin \lambda_i (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_1)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2i} \left[\left(\int_{\theta_1}^{\theta} \cos \lambda_i (\xi - \theta_1) F_i(\xi) d\xi - \Phi_i(\theta_1) \right) \rho^{\lambda_i} \sin \lambda_i (\theta - \theta_1) + \right.$$
$$\left. + \int_{\theta}^{\theta_1 + \theta_0} \sin \lambda_i (\xi - \theta_1) F_i(\xi) d\xi \times \rho^{\lambda_i} \cos \lambda_i (\theta - \theta_1) \right], \tag{18}$$

де

$$N_i = \frac{1}{i\pi} \left[\int_{\theta_i}^{\theta_1 + \theta_0} \cos \lambda_i (\xi - \theta_1) F_i(\xi) d\xi - \cos \lambda_i \theta_0 \times \Phi_i(\theta_0 + \theta_1) - \Phi_i(\theta_1) \right].$$

Всі члени а. р. будуть мати вигляд $c\rho^{\lambda} \ln^q \rho F(\theta)$ $(c = \text{const})$. Коефіцієнти при членах а. р. вигляду (17) не визначаються явно; вони можуть бути визначені наближено в процесі знаходження власних функцій варіаційним методом з включенням зазначених членів в число координатних функцій. Для коефіцієнтів членів а. р., які є розв'язками неоднорідної задачі (16), можна знайти їх вирази у явному вигляді через коефіцієнти попередніх членів. Праві частини задачі (16) для чергового члена а. р. визначаються через попередні члени в результаті розкладання в узагальнені ряди виразів для значень операторів $(\Delta - A_1)$, $\left(\frac{\partial}{\partial n} - B\right)$ на цих членах з використанням розкладів коефіцієнтів рівняння і крайових умов (13).

В результаті ми одержали а. р. розв'язків задачі (14) до членів порядку $O(\rho^{3-\varepsilon})$ в околі Ω_2. Він має вигляд

$$u = c_0 + c_0 \kappa \eta + w_1 + v_1 + u_3, \tag{19}$$

де $c_0 = \text{const}$, $w_1 = c_1' \rho^2 \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, функція u_3 — двічі неперервно диференційовна в околі кутової точки і має порядок вищий ніж $O(\rho^{3-\varepsilon})$. Задача для визначення функції v_1 має вигляд

$$\Delta v_1 = c_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D},$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L_0', \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = c_0 \kappa f_2''(0) \rho \quad \text{на} \quad L_1'.$$

Використовуючи формулу (18), знаходимо

$$v_1 = N_1\left[(\xi^2-\eta^2)\ln\rho + 2\eta\xi\theta\right] - \pi N_1\eta\xi + \frac{c_0}{4}\rho^2, \tag{20}$$

де

$$N_1 = \frac{1}{\pi}\left(\Phi_1(\pi) - \Phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{c_0\kappa k_1}{\pi}, \quad k_1 = f_2''(0).$$

Можна послідовно визначити і наступні члени а. р.; вони будуть мати порядок вищий ніж $O(\rho^{3-\varepsilon})$.

Із розкладу (19) випливає твердження наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай в спектральній задачі* (3), (4) *граничні лінії* L_0 *і* L_1 *належать класу* C^2 *і кут* θ_0 *між ними в кутовій точці буде прямий,* $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$. *Тоді у випадку, коли кривизна* k_1 *лінії* L_1 *в кутовій точці дорівнює нулю* $(k_1 = 0)$, *власні функції будуть двічі неперервно диференційовні в області* $\overline{G}$. *У випадку* $k_1 \neq 0$ *другі похідні власних функцій, для яких* $c_0 \neq 0$, *будуть мати логарифмічну особливість, яка визначаеться із розкладу* (19), *причому коефіцієнт при особливому члені не залежить від кривизни лінії* L_0 *у кутовій точці.*

В багатьох практично важливих випадках значення першої власної функції в кутовій точці $c_0 \neq 0$ [9] і його можна визначити варіаційним методом.

Можна показати, що для випадків коли $\theta_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$, першим особливим членом в а. р. власних функцій, який породжує головну особливість, буде функція $w_1 = c_1'\rho^{\pi/\theta_0}\cos\dfrac{\pi}{\theta_0}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, звідки випливає твердження наступної теореми.

Теорема 2. *Власні функції задачі* (3), (4) *у випадку* $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ *будуть двічі неперервно диференційовні в околі кутової точки, а у випадку* $\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$ *другі похідні можуть мати степеневу особливість.*

Коефіцієнти в особливих членах можна визначити з допомогою варіаційного методу.

3. Розглянемо тепер задачу (5) – (7), в якій будемо вважати коефіцієнт k довільною постійною величиною. Узагальнені власні функції цієї задачі $u \in W_2^1(G)$ і тому належать також ваговому простору $W_{2,\varepsilon}^1(G)$. Оскільки граничне значення $u|_{L_0} \in L_2(L_0)$, із крайової умови на L_0 (6) і того, що $\varphi = \dfrac{\sin m\theta}{\cos m\theta}u$ — узагальнений розв'язок задачі (2), випливає, що $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{L_0} \in W_2^2(L_0)$. Враховуючи це, аналогічно задачі (3), (4) [2] можна довести наступну лему.

Лема 1. *Власні функції спектральної задачі* (5) – (7) *належать ваговому простору* $W_{2,\varepsilon+2}^2(G)$.

Після перетворення змінних (10), де $f_1 = 0$, задача (5) – (7) в околі Ω перейде в задачу

$$A_1 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D} \cap \Omega_1, \tag{21}$$

$$-\frac{d}{d\xi}\left(r\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right) + \left(ar - \frac{m^2}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa r u = 0 \quad \text{на} \quad L_0' \cap \Omega_1, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = -k\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{для} \quad \eta = \xi = 0,$$
$$Bu = 0 \quad \text{на} \quad L_1' \cap \Omega_1, \tag{23}$$

де k — довільна постійна величина.

Нехай $c_1 = \dfrac{\partial u}{\partial n}$ (n — нормаль до Σ) — значення нормальної похідної власної функції в кутовій точці. Це значення у важливих випадках [5] не дорівнює нулю і може бути визначене варіаційним методом. Доведемо наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай в спектральній задачі* (5) – (7) *крива* L_1 *належить класу* C^2. *Тоді для всіх значень коефіцієнта* $k \neq -k_1$ (k_1 — *кривизна лінії* L_1 *в кутовій точці) другі похідні власних функцій, для яких* $c_1 \neq 0$, *будуть мати логарифмічну особливість, яка визначається асимптотичним розкладом* (30). *При значенні* $k = -k_1$ *ця особливість зникає і власні функції будуть двічі неперервно диференційовними в околі кутової точки.*

Доведення. Покладемо $\hat{u} = \omega u$ і продовжимо функцію $\hat{u}$ нулем зовні носія функції ω на весь кут $\mathcal{D}$. Продовжимо також коефіцієнти операторів $A_1 u$, Bu і будемо розглядати $\hat{u}$ як розв'язок наступної задачі у всьому куті:

$$A_1 \hat{u} = f \quad \text{в} \quad \mathcal{D},$$
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial n} = \varphi_1 \quad \text{на} \quad L_0', \quad B\hat{u} = 0 \quad \text{на} \quad L_1'. \tag{24}$$

Внаслідок леми 1 права частина задачі (24) буде належати простору

$$H^{(0)}_{2,\varepsilon+2} = W^{(0)}_{2,\varepsilon+2}(\mathcal{D}) \oplus W^{1/2}_{2,\varepsilon+2}(\partial\mathcal{D}).$$

Враховуючи, що нормальна похідна $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{L_0} \in W_2^2(L_0)$, можна показати, що права частина задачі (24) належить також простору більш гладких функцій, а саме

$$H^{1}_{2,\varepsilon+2} = W^{1}_{2,\varepsilon+2}(\mathcal{D}) \oplus W^{2-1/2}_{2,\varepsilon+2}(\partial\mathcal{D}).$$

Тому, на підставі теореми 3.3 із [1], $\hat{u} = c_0 + \hat{u}_1$, де $c_0 = \text{const}$, $\hat{u}_1 \in W^3_{2,\varepsilon+2}(\mathcal{D})$. Із останнього включення випливає, що граничне значення $\hat{u}_1$ на $\partial\mathcal{D}$ належить простору $W^1_{2,\varepsilon-1}(\partial\mathcal{D})$ [1] і $\hat{u}_1 \in W_2^1(L_0)$. Тепер, знову повертаючись до крайової умови на (6), одержуємо $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{L_0} \in W_2^3(L_0)$ і $\dfrac{\partial u_1}{\partial n}$ — двічі неперервно диференційовна функція на L_0 [9]. Підставимо $\hat{u} = c_0 + \hat{u}_1$ в (24) і одержимо задачу для $\hat{u}_1 = \omega u_1$, в якої права частина уже буде належати простору $H^2_{2,\varepsilon+4}$. Звідси випливає, що $\hat{u}_1 \in W^4_{2,\varepsilon+4}(\mathcal{D})$. Запишемо крайову умову на $L_0' \cap \Omega_0$ (22) у вигляді

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = F(\xi) \quad \text{на} \quad L_0',$$
$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = -k\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \eta = \xi = 0. \tag{25}$$

Із (25) інтегруванням одержимо наступний вираз для $\varphi_1 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{L_0'}$ в околі Ω_2:

$$\varphi_1 = c_1 - c_1 k\xi + \int_0^\xi dt \int_0^t F(\tau)\,d\tau \quad \text{на} \quad L_0' \cap \Omega_2. \tag{26}$$

Після перетворення останнього члена в (26) одержимо розклад

$$\varphi_1 = c_1 - c_1 k\xi + c_2\xi^2 + \beta(\xi)\xi^2 \quad \text{на} \quad L_0' \cap \Omega_2, \tag{27}$$

де c_1 і c_2 — сталі, а $\beta(\xi)$ — неперервна функція і $\beta(0) = 0$. Тепер, виходячи з того, що $\hat{u}_1 \in W^4_{2,\,\varepsilon+4}(\mathcal{D})$ і для нормальної похідної $\dfrac{\partial u_1}{\partial n}$ має місце розклад (27), методом, викладеним в роботі [1], знайдемо члени а. р. розв'язків задач (24) до порядку $O(\rho^{3-\varepsilon})$. Так, для $\hat{u}_1$ одержимо $\hat{u}_1 = v_0 + u_2$, де $v_0 = c_1\eta$, і $\hat{u}_2 \in$ $\in W^4_{2,\,\varepsilon+2}(\mathcal{D})$.

Наступним членом в а. р. після v_0 буде розв'язок допоміжної задачі

$$\begin{gathered} \Delta v_1 = c_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial n} = -c_1 k\rho \quad \text{на} \quad L_0', \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = c_1 k_1 \rho \quad \text{на} \quad L_1'. \end{gathered} \tag{28}$$

Визначаючи v_1 за формулою (18), отримуємо

$$v_1 = N_1\left[(\xi^2 - \eta^2)\ln\rho + 2\eta\xi\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] - c_1 k\eta\xi + \frac{c_0}{4}\rho^2, \tag{29}$$

де

$$N_1 = \frac{1}{\pi}\left(\Phi_1(\pi) - \Phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{c_1}{\pi}(k_1 + k).$$

В результаті маємо наступний розклад для власних функцій задачі (5) – (7) в околі кутової точки:

$$u = c_0 + c_1\eta + v_1 + w_1 + u_3, \tag{30}$$

де v_1 визначається формулою (29), $w_1 = c_1'\rho^2\cos\left(2\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, функція u_3 — двічі неперервно диференційовна і має порядок більший ніж $O(\rho^{3-\varepsilon})$ в околі кутової точки. Теорему доведено.

Зауважимо, що крайова умова в кутовій точці (6′), в якій $k = k_1$, випливає із фізичного припущення, що кут θ_0 між вільною поверхнею і твердою стінкою буде постійний в процесі руху рідини. Можна показати, що крайова умова (6′), в якій $k = -k_1$, відповідає припущенню, що кут θ_0 змінюється за певним законом. До цього часу на фізико-теоретичному рівні не досліджено в достатній мірі рух реальної рідини в околі лінії перетину вільної поверхні і твердої стінки і тому не ясно яка умова в кутовій точці більше відповідає дійсності. Встановлений вище математичний факт, що при значенні $k \neq -k_1$ другі похідні власних функцій мають особливість, а для значення $k = -k_1$ вона зникає, свідчить на користь моделі змінного кута.

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16.** – С. 209 – 292.
2. *Комаренко А. Н.* Асимптотическое разложение собственных функций задачи с параметром в краевых условиях в окрестности угловых граничных точек // Укр. мат. журн. – 1980. – **32,** № 6. – С. 653 – 659.
3. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. – М.:Наука, 1991. – 336 с.
4. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наук. думка, 1984. – 229 с.
5. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.:Наука, 1989. – 415 с.
6. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наук. думка, 1990. – 300 с.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
8. *Комаренко А. Н.* Задача о собственных значениях с параметром в краевых условиях для эллиптических уравнений, вырождающихся на части границы области // Укр. мат. журн. – 1966. – **18,** № 6. – С. 3 – 11.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.:Наука, 1988. – 336 с.

Одержано 15.06.95