УДК 517.5

Є. К. Крутиголова (Дрогоб. пед. ін-т)

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМИ РЯДАМИ ЕКСПОНЕНТ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОПУКЛИХ ОБЛАСТЯХ

Conditions are established for representation of functions $f(z)$ analytic in unbounded convex domains D and continuous in $\overline{D}$ in terms of series of the form $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)e^{\lambda_n z}$.

Встановлено умови для зображення рядами вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)e^{\lambda_n z}$ функцій $f(z)$, аналітичних в необмежених опуклих областях D і неперервних в $\overline{D}$.

Розглядається питання про можливість зображення аналітичних функцій в необмежених опуклих областях рядами вигляду

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)\exp(\lambda_n z), \qquad z \in D, \tag{1}$$

де $P_n(z)$ — многочлени певних степенів. Спочатку розглянемо випадок, коли D — півплощина $\operatorname{Re} z < 0$. Випадок, коли $P_n(z) = a_n$, $n \geq 1$, — сталі числа, розглянуто в [1, с. 28]. Нехай $L(\lambda)$ — ціла функція з нулями λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, кратностей відповідно $m_\nu < m_0 = \text{const}$ і виконується умова

$$|L(\lambda)| = O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right), \qquad \alpha > 1, \qquad 0 < \lambda \uparrow \infty. \tag{2}$$

Нехай $f(z)$ — довільна функція, аналітична в півплощині D і неперервна при $\operatorname{Re} z \leq 0$, яка задовольняє умову

$$|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right), \qquad \mu > 1, \qquad |z| \to \infty. \tag{3}$$

Поставимо у відповідність цій функції ряд

$$f(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(z)\exp(\lambda_\nu z), \tag{4}$$

в якому коефіцієнти $a_{\nu,k}$ обчислюються за формулами [2, с. 238]

$$a_{\nu,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} f(t)\psi_{\nu,k}(t)\,dt,$$

$$\psi_{\nu,k}(t) = \frac{1}{k!(m_\nu - k - 1)!} \sum_{k=0}^{m_\nu - k - 1} q!\,C_{m_\nu - k - 1}^{q} (M_\nu(\lambda_\nu))^{(m_\nu - k - q - 1)} A_{\nu,q}(t),$$

$$M_\nu(\mu) = (\mu - \lambda_\nu)^{q+1} / L(\mu), \tag{5}$$

$$A_{\nu,q}(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)\exp(-\lambda t)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{q+1}}\,d\lambda, \qquad q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1.$$

Встановимо умови абсолютної збіжності ряду (4) в півплощині D. Для того щоб ця півплощина була областю збіжності ряду (4), потрібно накласти додаткові умови щодо розміщення нулів функції $L(\lambda)$.

Будемо вимагати, щоб виконувались такі умови:

нулі λ'_ν, $\nu \geq 1$, розміщені в правій півплощині, задовольняли умову

$$\lim_{\nu \to \infty} \arg \lambda'_\nu = 0; \tag{6}$$

нулі λ''_ν, $\nu \geq 1$, розміщені в лівій півплощині, задовольняли умову

$$\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \arg \lambda''_\nu < \theta_1 < \frac{3\pi}{2}, \qquad \{\lambda_\nu\} = \{\lambda'_\nu\} \cup \{\lambda''_\nu\}; \tag{7}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\lambda_\nu|^\rho} = \tau < \infty, \qquad \rho > 1. \tag{8}$$

В питанні про зображення аналітичних функцій рядами експонент важливу роль відіграє відповідний ряд функції $\exp(\lambda z)$ (λ — фіксоване, $\lambda \neq \lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$). Ряд (4) для цієї функції має вигляд [2, с. 238]

$$\exp(\lambda z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} \frac{1}{k!(m_\nu - k - 1)!} \sum_{k=0}^{m_\nu - k - 1} q! C^q_{m_\nu - k - 1} \times$$

$$\times \left(M_\nu(\lambda_\nu)\right)^{(m_\nu - k - q - 1)} \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{q+1}} z^k \exp(\lambda_\nu z). \tag{9}$$

Тому з'ясуємо спочатку умови абсолютної збіжності ряду (9) в півплощині $\operatorname{Re} z < 0$.

Теорема 1. *Нехай* $L(\lambda)$ — *ціла функція з нулями* λ_ν, $\nu \geq 1$, *кратностей відповідно* $m_\nu < m_0 = \text{const}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *яка задовольняє умову* (2) *і нулі якої задовольняють умови* (6) – (8). *Якщо виконуються умови*

$$\left| M_\nu^{(i)}(\lambda'_\nu) \right| < \exp(\varepsilon |\lambda'_\nu|), \quad \varepsilon > 0, \quad \nu > \nu_0(\varepsilon), \quad i = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1, \tag{10}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\ln \left| M_\nu^{(i)}(\lambda''_\nu) \right|}{|\lambda''_\nu|} = -\infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1, \tag{11}$$

то ряд (9) *збігається абсолютно в півплощині* $\operatorname{Re} z < 0$.

Доведення. Нехай виконуються умови (10), (11) і $z_0 \in D$, тоді одержимо

$$\left| M_\nu^{(i)}(\lambda'_\nu) z_0^k \frac{L(\lambda) \exp(\lambda'_\nu z_0)}{(\lambda - \lambda'_\nu)^{q+1}} \right| < \exp\{\varepsilon |\lambda'_\nu| +$$

$$+ \ln \left| z_0^k L(\lambda) / (\lambda - \lambda'_\nu)^{q+1} \right| + |\lambda'_\nu| \operatorname{Re}(z_0 \exp(i\varphi'_\nu))\},$$

$$\varepsilon > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1, \quad q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1,$$

$$\varphi'_\nu = \arg \lambda'_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

З умови (6) випливає, що при $\nu \to \infty$ $\cos \varphi'_\nu \to 1$, $\sin \varphi'_\nu \to 0$, тому для $\nu > \nu_2 = \text{const}$ матимемо

$$\operatorname{Re}[z_0 \exp(i\varphi'_\nu)] = x_0 \cos \varphi'_\nu - y_0 \sin \varphi'_\nu < -\delta < 0, \qquad \delta > 0,$$

$$z_0 = x_0 + i y_0 \in D.$$

Враховуючи, що для $\nu > \nu_3(\varepsilon)$

$$|\lambda_\nu''|^{-1}\ln\left|z_0^k L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu')^{q+1}\right| < \varepsilon,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1, \qquad q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1,$$

одержуємо, що при $\nu > \bar{\nu} = \max(\nu_2, \nu_3)$ справедлива оцінка

$$\left| M_\nu^{(i)}(\lambda_\nu') z_0^k \frac{L(\lambda)\exp(\lambda_\nu' z_0)}{(\lambda-\lambda_\nu')^{q+1}} \right| < \exp\left[|\lambda_\nu'|(-\delta+2\varepsilon)\right] = \exp\left(-\delta_1|\lambda_\nu'|\right),$$

$$\delta_1 > 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1. \tag{12}$$

Оскільки

$$\operatorname{Re}[\,z_0\exp(i\varphi_\nu'')\,] = x_0\cos\varphi_\nu'' - y_0\sin\varphi_\nu'' \le |x_0| + |y_0|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

а з умови (11) випливає, що $\left|M_\nu^{(i)}(\lambda_\nu'')\right| < \exp(-p|\lambda_\nu''|)$ для всіх $p > 0$, $\nu > \nu_4(p)$, маємо

$$\left|M_\nu^{(i)}(\lambda_\nu'') z_0^k \exp(\lambda_\nu'' z_0) L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu'')^{q+1}\right| < \exp\left[-p|\lambda_\nu''| + \right.$$

$$\left. + \ln\left|z_0^k L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu'')^{q+1}\right| + |\lambda_\nu''|(|x_0|+|y_0|)\right] < \exp\left(-p_1|\lambda_\nu''|\right), \qquad p_1 > 0. \tag{13}$$

Використовуючи оцінки (12), (13), одержуємо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\sum_{q=0}^{m_\nu-k-1}\left|\frac{q!\,C^q_{m_\nu-k-1}}{k!(m_\nu-k-1)!}(M_\nu(\lambda_\nu))^{(m_\nu-k-q-1)} z_0^k \exp(\lambda_\nu z_0)\,\times\right.$$

$$\left.\times\, L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-\delta_2|\lambda_\nu|)\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\frac{1}{k!(m_\nu-k-1)!}\,\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{m_\nu-k-1} q!\,C^q_{m_\nu-k-1} < B_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\exp(-\delta_2|\lambda_\nu|) < B,$$

$$B > 0, \qquad B_1 > 0, \qquad \delta_2 = \min(\delta_1, p).$$

Таким чином, маємо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\frac{q!\,C^q_{m_\nu-k-1}}{k!(m_\nu-k-1)!}(M_\nu(\lambda_\nu))^{m_\nu-k-q-1} z_0^k \exp(\lambda_\nu z_0)\,\times\right.$$

$$\left.\times\, L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m_\nu-1}\sum_{q=0}^{m_\nu-k-1}\left|\frac{q!\,C^q_{m_\nu-k-1}}{k!(m_\nu-k-1)!}(M_\nu(\lambda_\nu))^{(m_\nu-k-q-1)} z_0^k\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\exp(\lambda_\nu z_0)\,L(\lambda)\,/\,(\lambda-\lambda_\nu)^{q+1}\right| < B, \qquad B = \text{const}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і додатково виконуються наступні умови*:

існують кола $|\lambda| = q_k \uparrow \infty$, *на яких*

$$\lim_{k\to\infty}\min_{|\lambda|=q_k}(\ln|L(\lambda)|)\,/\,|\lambda| \ge 0, \qquad 0 \le |\arg\lambda| \le \gamma_1, \qquad 0 \le \gamma_1 < \pi/2; \tag{14}$$

$$\lim_{k \to \infty} \min_{|\lambda| = q_k} (\ln|L(\lambda)|) / |\lambda| = +\infty, \qquad \gamma_1 < |\arg \lambda| \le \pi; \tag{15}$$

існують кола C_k *з центрами в точках* $\lambda = q_k$ *і радіусами* $r_k = he^{-\bar{\delta} q_k}$, $\bar{\delta} > 0$, $h > 0$, *на яких*

$$\lim_{k \to \infty} \min_{\lambda_k \in C_k} (\ln|L(\lambda)|) / |\lambda| \ge 0. \tag{16}$$

Тоді кожну аналітичну в D *і неперервну в* $\overline{D}$ *функцію* $f(z)$ *можна зобразити в* D *абсолютно збіжним рядом вигляду* (1).

Доведення. Нехай Γ_n — замкнений контур, всередині якого розміщені нулі $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ функції $L(z)$, і D_{Γ_n} — внутрішність цього контура. Покладемо

$$\exp(\lambda z) - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} \sum_{q=0}^{m_\nu - k - 1} \frac{q! C_{m_\nu - k - 1}^{q}}{k!(m_\nu - k - 1)!} (M_\nu(\lambda_\nu))^{(m_\nu - k - q - 1)} z^k \exp(\lambda_\nu z) \times$$

$$\times L(\lambda) / (\lambda - \lambda_\nu)^{q+1} = \Phi(z, \lambda, \Gamma_n), \qquad z \in D, \qquad \lambda \ne \lambda_\nu.$$

Функція $\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)$ є цілою функцією відносно λ, причому внаслідок умови (2) при $\lambda > 0$, $z \in D$ вона поводить себе як

$$O\left(1 / \lambda^{\alpha + 1}\right), \qquad \alpha > 1.$$

Покладемо тепер

$$\gamma(z, t, \Gamma_n) = \int_0^\infty \Phi(z, \lambda, \Gamma_n) \exp(-\lambda t) d\lambda, \qquad \lambda \ge 0, \qquad \operatorname{Re} t \ge 0,$$

тоді

$$\gamma(z, t, \Gamma_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} z^k \psi_{\nu, k}(t) \exp(\lambda_\nu z) - \frac{1}{t - z}, \qquad \operatorname{Re} t \ge 0, \qquad z \in D, \tag{17}$$

де функції $\psi_{\nu, k}(t)$ зображені формулами (5). Внаслідок умови (2) при фіксованому $\nu = 1, 2, \ldots$ і $q = 0, 1, \ldots, m_\nu - 1$ при $\lambda \to \infty$ маємо

$$\left| L(\lambda) / (\lambda - \lambda_\nu)^{q+1} \right| = O\left(1 / \lambda^{\alpha + 1}\right), \qquad \alpha > 1, \qquad \lambda > 0,$$

тому функції $\psi_{\nu, k}(t)$, а отже, і функція $\gamma(z, t, \Gamma_n)$ обмежені в півплощині $\operatorname{Re} t \ge 0$ і неперервні в ній (за винятком, можливо, нескінченно віддаленої точки).

Розглянемо довільну функцію $f(t)$, аналітичну в півплощині $\operatorname{Re} t > 0$, неперервну при $\operatorname{Re} t \ge 0$, яка задовольняє умову (3). Помноживши обидві частини рівності (17) на $\frac{1}{2\pi i} f(t)$ і проінтегрувавши одержану рівність по осі $\operatorname{Re} t = 0$, із врахуванням (5) матимемо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} f(t) \gamma(z, t, \Gamma_n) dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu, k} z^k \exp(\lambda_\nu z) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{f(t)}{t - z} dt, \qquad z \in D. \tag{18}$$

Зокрема, якщо $f(z) = \exp(\lambda z)$, $z \in D$, то перший доданок правої частини формули (18) являє собою частинну суму ряду (9), який за теоремою 1 є абсолютно збіжним в D. Другий доданок правої частини (18) в цьому випадку дорівнює $\exp(\lambda z)$, $z \in D$. Отже, права частина (18) для функції $\exp(\lambda z)$ дорівнює $-\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)$.

Враховуючи, що [2, с. 266]

$$\sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu, k} z^k \exp(\lambda_\nu z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\omega_L(\mu, f) \exp(\mu z)}{L(\mu)} d\mu, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

де C_ν — коло з центром в точці λ_ν, всередині якого немає нулів функції $L(\lambda)$, відмінних від λ_ν, для функції $f(z) = \exp(\lambda z)$

$$\omega_L(\mu, f) = (L(\mu) - L(\lambda)) / (\mu - \lambda)$$

(див. [2, с. 283]), тому

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\omega_L(\mu, f) \exp(\mu z)}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{L(\mu)(\mu - \lambda)} \exp(\mu z) d\mu =$$

$$= \begin{cases} \exp(\lambda z) - \dfrac{L(\lambda)}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_n} \frac{\exp(\mu z)}{(\mu - \lambda) L(\mu)} d\mu, & \lambda \in D_{\Gamma_n}, \\ -\dfrac{L(\lambda)}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_n} \frac{\exp(\mu z)}{(\mu - \lambda) L(\mu)} d\mu, & \lambda \,\overline{\in}\, D_{\Gamma_n}. \end{cases}$$

Таким чином, для функції $\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)$ мають місце інтегральні зображення

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_n) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\exp(\mu z)}{(\lambda - \mu) L(\mu)} d\mu, \quad \lambda \in D_{\Gamma_n}, \tag{19}$$

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_n) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\exp(\mu z)}{(\lambda - \mu) L(\mu)} d\mu + \exp(\lambda z), \quad \lambda \,\overline{\in}\, D_{\Gamma_n}. \tag{20}$$

Формули (19), (20) у випадку простих нулів функції $L(\lambda)$ встановлені в [2, с. 503]. Оскільки для функції $\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)$ справедливі інтегральні зображення (19), (20), то при виконанні умов (14) – (16) для функції $\gamma(z, t, \Gamma_n)$ маємо оцінку [2, с. 506]

$$|\gamma(z, t, \Gamma_n)| < C \exp(-\delta_4 q_n), \quad \delta_4 > 0, \quad C > 0, \quad q_n \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{21}$$

За теоремою М. Келдиша [2, с. 516], кожну функцію $f(z)$, аналітичну в D і неперервну в $\overline{D}$, можна зобразити в D у вигляді суми двох функцій $f(z) = g(z) + \varphi(z)$, де $g(z)$ — ціла функція, $\varphi(z)$ — аналітична в D, неперервна в $\overline{D}$ і задовольняє умову $|\varphi(z)| = O(|z|^{-2})$, $z \in \overline{D}$.

Цілу функцію $g(z)$, за теоремою 7.33 і лемою 7.4.1 [2, с. 471, 479], можна зобразити у всій комплексній площині рядом вигляду (1). Функція $\varphi(z)$ може бути зображена в D рядом (4) (який теж є рядом вигляду (1)). Справді, враховуючи умову (3), матимемо, що для функції $\varphi(z)$ формула (18) набирає вигляду

$$\varphi(z) - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu, k} z^k \exp(\lambda_\nu z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \varphi(t) \gamma(z, t, \Gamma_n) dt, \quad z \in D.$$

Тому завдяки оцінці (21) і умові (3) одержимо

$$\left|\varphi(z) - \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z)\right| < C_1 \exp(-\delta_5 q_n),$$

$$C_1 > 0, \quad \delta_5 > 0, \quad q_n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Отже,

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k \exp(\lambda_\nu z), \quad z \in D.$$

Теорему доведено.

Розглянемо питання про зображення функцій рядами (1) в необмежених опуклих областях більш загального вигляду.

Нехай область D обмежена променями l_1 та l_2, нахиленими до дійсної осі відповідно під кутами $0 < \psi_1 < \pi/2$ і $-\pi/2 < \psi_2 < 0$, а також опуклою дугою γ, яка сполучає початки цих променів. Вважатимемо також, що точка $z = 0 \in \in D$. Нехай функція $f(z)$ аналітична в D і неперервна на межі цієї області. Проведемо вертикальну пряму l, яка перетинає промені l_1 та l_2 і відокремлює від області D замкнену опуклу область D_0 так, що точка $z = 0 \in D_0$.

Згідно з теоремою 2 [3, с. 1577] функцію $f(z)$ можна зобразити в D_0 рядом вигляду (4). Міркуючи далі за тією ж схемою, що і при доведенні теореми 8.2.1 [2, с. 524], і застосовуючи теорему 2, переконуємось, що справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай D — опукла область, обмежена променями l_1 та l_2, нахиленими до дійсної осі відповідно під кутами $0 < \psi_1 < \pi/2$ і $-\pi/2 < \psi_2 < 0$, і опуклою дугою γ, що сполучає початки цих променів. Тоді існує послідовність комплексних чисел $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \tau_1, \quad 0 < \tau_1 < \infty, \quad \rho > 1,$$

така, що кожну функцію $f(z)$, аналітичну в D і неперервну в $\overline{D}$, можна зобразити в D рядом вигляду (1).

1. *Крутыголова Е. К.* Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле в полуплоскости // Укр. мат. журн. – 1986. – **33**, № 1. – С. 28–34.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 537 с.
3. *Крутыголова Е. К., Мельник Ю. И.* Об условиях сходимости рядов Тейлора – Дирихле в выпуклых многоугольниках // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1576–1580.

Одержано 05.02.96