УДК 517.944

Ю. А. Митропольский (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Г. П. Хома, Н. Г. Хома (Тернопол. акад. нар. хоз-ва)

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

On the basis of properties of the Vejvoda–Shtedry operator, we obtain conditions of the solvability of 2π-periodic problem

$$u_{tt}-u_{xx}=F[u,u_t],\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad u(x,t+2\pi)=u(x,t).$$

На основі властивостей оператора Вейводи – Штедри одержано умови розв'язності 2π-періодичної задачі

$$u_{tt}-u_{xx}=F[u,u_t],\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad u(x,t+2\pi)=u(x,t).$$

Обозначим через C_π пространство функций $u(x,t)$, непрерывных и ограниченных на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$; через $C_{\pi t}$ пространство функций, непрерывных и ограниченных на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ вместе с производной по t, а через A^- пространство функций

$$A^-=\{g:\ g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)=-g(x,-t)\}.$$

Целью данной статьи является установление условия существования гладкого решения следующей 2π-периодической задачи:

$$u_{tt}-u_{xx}=F[u,u_t],\qquad 0<x<\pi,\qquad t\in\mathbb{R},\tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\qquad t\in\mathbb{R},\tag{2}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\qquad (x,t)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}.\tag{3}$$

Предположим, что заданный в уравнении (1) оператор F, вообще говоря, нелинейный, переводит гладкую $(u\in C_\pi^{1,1}\cap A^{-1})$ функцию $u(x,t)$ в скалярную $F[u,u_t](x,t)\in C_\pi\cap A^-$. Для простоты доказательства теоремы существования и единственности гладкого решения задачи (1) – (3) будем рассматривать лишь зависимость его от функции u и ее производной u_t, хотя аналогичный результат можно получить и для случая $F=F[u,u_t,u_x]$.

Для линейного уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\qquad 0<x<\pi,\qquad t\in\mathbb{R},\tag{4}$$

в определенном пространстве функций A^- верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $g\in C_{\pi t}\cap A^-$, то функция вида*

$$u(x,t)=\frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\,d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=(Sg)(x,t),\tag{5}$$

где $Q(\xi)=1$, если $0\le\xi\le x$, и $Q(\xi)=-1$, если $x<\xi\le\pi$, является единственной функцией из пространства $C_\pi^{2,2}\cap A^-$, удовлетворяющей условиям (2) – (4).

Доказательство. То, что функция $u=Sg$ удовлетворяет условиям (3) и (4) и оператор $S:\ A^-\to A^-$, доказано в работах [1, 2]. Остается доказать, что функция $u = Sg$ удовлетворяет для функций пространства A^- условиям (2). Согласно формуле (5) вычислим значения $(Sg)(0,t)$ и $(Sg)(\pi,t)$:

$$(Sg)(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t+\xi}^{t-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

$$(Sg)(\pi,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t+\pi-\xi}^{t-\pi+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Для $g \in C_\pi \cap A^-$ найдем производные $(Sg)'(0,t)$ и $(Sg)'(\pi,t)$:

$$(Sg)'(0,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi,t+\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi,t-\xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\pi-\eta, t-\eta+\pi)\,d\eta \equiv 0,$$

$$(Sg)'(\pi,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi,t-\pi+\xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi,t+\pi-\xi)\,d\xi = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi,t-\pi+\xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\pi-\eta, t-\pi+\eta+\pi)\,d\eta \equiv 0.$$

Таким образом, $(Sg)(0,t) \equiv \text{const}$ и $(Sg)(\pi,t) \equiv \text{const}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как согласно определению пространства A^- функция g — нечетная по переменной t, то на основании (6) получаем $(Sg)(0,0) = 0$ и $(Sg)(\pi,0) = 0$. Следовательно, $(Sg)(0,t) = 0$ и $(Sg)(\pi,t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. функция $u = Sg$ удовлетворяет условиям (2), что и требовалось доказать.

Аналогично линейной задаче (2) – (4) и представлению ее решения (5) рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u(x,t) = (SF[u,u_t])(x,t),$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(t)\,\{F[u,u_t](\xi,t-x+\xi) - F[u,u_t](\xi,t+x-\xi)\}\,d\xi, \tag{8}$$

$$u_x(x,t) = (SF[u,u_t])_x(x,t).$$

Определение. *Непрерывное решение* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi$, $u \in C_\pi \cap A^-$, *системы интегральных уравнений* (8) *будем называть гладким решением краевой* 2π-*периодической задачи* (1) – (3).

Если ввести следующее обозначение нормы функции $g(x,t)$:

$$\|g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|,\ 0 \le x \le \pi,\ t \in \mathbb{R}\}, \tag{9}$$

то, используя интегральное представление (5) решения $u = Sg$ линейной задачи (2) – (4), на основании теоремы 1 убеждаемся в справедливости утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $g \in C_\pi \cap A^-$. *Тогда линейная задача* (2) – (4) *имеет единственное гладкое решение* $u = Sg \in A^-$, *при этом*

$$\| u(x,t) \|_{C_\pi} \leq \frac{\pi^2}{4} \| g(x,t) \|_{C_\pi}, \tag{10}$$

$$\| u_t(x,t) \|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \| g(x,t) \|_{C_\pi}, \quad \| u_x(x,t) \|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \| g(x,t) \|_{C_\pi}. \tag{11}$$

Докажем аналогичное утверждение для квазилинейной задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть скалярная функция* $F[u, u_t](x,t) = f(x, t, u(x,t), u_t(x,t))$ *удовлетворяет условиям*:

1) $f(x, t, u, u_t) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \| u \|_{C_\pi} < \infty \times \| u_t \|_{C_\pi} < \infty)$;

2) $0 < \| F(0,0)(x,t) \|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'', u_t''](x,t) - F[u', u_t'](x,t)| \leq N_1 |u'' - u'| + N_2 [u_t'' - u_t']$;

4) $F[0,0](x,t) \in A^-$;

5) *для всех* $u \in A^{-1} \bigcap C_\pi^{1,1}$ *функция* $F[u, u_t](x,t) \in A^- \bigcap C_\pi$.

Тогда при выполнении условия

$$\frac{N_1 \pi^2}{4} + \frac{N_2 \pi}{2} < 1 \tag{12}$$

задача (1)–(3) *имеет единственное гладкое* $(u \in A \bigcap C_\pi^{1,1})$ *решение.*

Замечание. Вместо требования, чтобы скалярная функция $F[u, u_t](x,t) = f(x, t, u(x,t), u_t(x,t))$ была определена для значений $0 \leq x \leq \pi$ и всех (t, u, u_t), достаточно предположить, чтобы F была определена для $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, $\| u \|_{C_\pi} \leq L$, $\| u_t \|_{C_\pi} \leq 2L/\pi$, где L удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\pi^2 \Gamma}{4} < L\left(1 - \left(\frac{N_1 \pi^2}{4} + \frac{N_2 \pi}{2}\right)\right) \tag{13}$$

или

$$\frac{\pi^2 M}{4} \leq L, \tag{14}$$

если $M = \| F(u, u_t) \|_{C_\pi}$ для всех $\| u \|_{C_\pi} \leq L$, $\| u_t \|_{C_\pi} \leq 2L/\pi$.

Доказательство. Пусть D — банахово пространство функций $g(x,t) \in A^- \bigcap C_{\pi t}$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, с нормой

$$\|g\|_{C_\pi^1} = \max\left\{ \|g\|_{C_\pi}, \frac{\pi}{2\|g_t\|_{C_\pi}} \right\}. \tag{15}$$

Возьмем в шаре $\| u \|_{C_\pi} \leq L$ некоторую функцию $g(x,t) \in C_{\pi t} \bigcap A^-$. Пусть $u(x,t)$ — единственное решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = F[g, g_t](x,t), \tag{16}$$

которое удовлетворяет условиям (2) и (3). На основании условий 1 и 5 теоремы 3 такое решение $u(x,t)$, согласно теореме 2, существует. Определим теперь в шаре $\|g\|_{C_\pi^1} \leq L$ пространства D оператор T_0, положив $(T_0[g])(x,t) = u(x,t)$.

Если $u^0(x,t) = (T_0[0])(x,t)$, то учитывая условие 2 теоремы 3, из оценок (9) и (10) при $g(x,t) = F[0,0](x,t)$ получаем

$$\|u^0\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\Gamma, \qquad \frac{\pi^2}{2}\|u_t^0\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\Gamma. \tag{17}$$

Значит, норма функции $u^0(x,t) = (T_0[0])(x,t) \in D$ удовлетворяет неравенству

$$\|(T_0[0])(x,t)\|_{C_\pi^1} \le \frac{\pi^2}{4}\Gamma. \tag{18}$$

Теперь, если $u_1 = (T_0[g_1])(x,t)$, $u_2 = (T_0[g_2])(x,t)$, то согласно (9) и (10) и условию 3 теоремы 3 имеем

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{\pi^2}{4}(N_1\|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}),$$

$$|u_{1t}(x,t) - u_{2t}(x,t)| \le \frac{\pi}{2}(N_1\|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}).$$

Если последнее неравенство умножить на $\pi/2$, а $N_2 \dfrac{\pi^2}{4}\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}$ записать в виде $N_2 \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}\right)$, то получим неравенство

$$\|T_0[g_1] - T_0[g_2]\|_{C_\pi^1} \le \left(\frac{\pi^2}{4}N_1 + \frac{\pi}{2}N_2\right)\|g_1 - g_2\|_{C_\pi^1}. \tag{19}$$

Теперь из неравенств (12), (13), (18) и (19) видим, что выполняются все условия теоремы функционального анализа о неподвижной точке (см., например, [3, с. 43–46]), а это значит, что теорема 3 доказана.

Аналогично, если $\|F[u,u_t](x,t)\|_{C_\pi} \le M$ для $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le \dfrac{2L}{\pi}$, то часть соотношений (17), которые относятся к $u_t(x,t)$, показывает, что если $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$, то $u = T_0[g]$ удовлетворяет неравенству $\|u\|_{C_\pi^1} \le \dfrac{\pi^2}{4}M$. Значит, если справедливо неравенство (14), то T_0 отображает шар $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$ сам в себя, а это означает в силу (12), что выполняются условия упомянутой выше теоремы о неподвижной точке.

Следовательно, теорема 3 и замечание к ней полностью доказаны.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 733–739.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Получено 13.01.98