УДК 515.12, 517.51

В. В. Михайлюк (Чернівец. ун-т)

ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД $\mathfrak{n}$ КООРДИНАТ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ КОМПАКТІВ

We investigate the problems of the dependence on $\mathfrak{n}$ coordinates of separately continuous functions on the products of spaces each of which is a topological product. In the case where X and Y are products of completely regular countably compact spaces, we establish necessary and sufficient conditions for the dependence of this sort.

Досліджуються питання залежності від $\mathfrak{n}$ координат нарізно неперервних функцій на добутках просторів, кожен з яких є топологічним добутком. У випадку, коли X і Y є добутками цілком регулярних зліченно компактних просторів, встановлюються необхідні і достатні умови для такої залежності.

1. У роботі [1] встановлено, що дослідження множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку просторів, кожен з яких є добутком незліченної сім'ї топологічних просторів, тісно пов'язане з залежністю цих функцій від зліченного числа, чи загальніше, від $\mathfrak{n}$, де $\mathfrak{n}$ — деяке кардинальне число, координат. Зокрема, там було встановлено, що у випадку, коли X і Y є добутками сепарабельних компактів, кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від зліченного числа координат. Для неперервних функцій на добутках питання залежності від $\mathfrak{n}$ координат досліджувались у працях багатьох математиків (див. [2, с. 187]). Найбільш загальний результат у цьому напрямку належить Ноблу і Ульмеру [3], які, зокрема, дали необхідні і достатні умови для того, щоб неперервна функція на добутку залежала від $\mathfrak{n}$ координат. А саме з їх результату випливає, що для добутку $X = \prod_{s \in S} X_s$ нетривіальних цілком регулярних просторів X_s і нескінченного кардинала $\aleph_i$ з $|S| > \aleph_i$ кожна неперервна функція на X залежить від $\aleph_i$ координат тоді і тільки тоді, коли X є псевдо-$\aleph_{i+1}$-компактом, де $\aleph_{i+1}$ — наступний після $\aleph_i$ кардинал, тобто кожна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X має потужність меншу від $\aleph_{i+1}$. У даній статті, розвиваючи ідеї роботи [3] і синтезуючи їх з ідеями з [1], ми спочатку в загальному випадку встановимо окремо необхідні і достатні умови, а потім у випадку, коли X і Y є добутками цілком регулярних зліченно компактних просторів, встановимо умови, які є необхідними і достатніми для того, щоб кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежала від $\mathfrak{n}$ координат.

2. Спочатку нагадаємо деякі означення і введемо кілька понять.

Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$, $\tilde{S} \subseteq S$ і Z — довільна множина. Будемо вважати, що відображення $f\colon X \to Z$ зосереджене на множині $\tilde{S}$, якщо для довільних $x, y \in X$ з умови $x|_{\tilde{S}} = y|_{\tilde{S}}$ випливає рівність $f(x) = f(y)$. Якщо, крім того, $|\tilde{S}| \le \mathfrak{n}$, де $\mathfrak{n}$ — деяке нескінченне кардинальне число, то вважатимемо, що f залежить від $\mathfrak{n}$ координат. Множину S_0 будемо називати найменшою множиною, на якій зосереджене відображення f, якщо для довільної множини $\tilde{S} \subseteq S$, на якій зосереджене f, справджується включення $S_0 \subseteq \tilde{S}$. Нехай $Y = \prod_{t \in T} Y_t$, $\tilde{T} \subseteq T$ і $g : X \times Y \to Z$. Тоді вважають, що g зосереджене на множині $\tilde{S}$ $(\tilde{T})$ відносно першої (другої) змінної, якщо на цій же множині зосереджене відповідне асоційоване з g відображення $\varphi : X \to Z^Y$ $(\psi : Y \to Z^X)$. Аналогічно вводяться поняття залежності відображення g від $\mathfrak{n}$ координат відносно першої чи другої змінної. Якщо ж g залежить від $\mathfrak{n}$ координат як по першій, так і по другій змінній, то вважають, що g залежить від $\mathfrak{n}$ координат, що повністю відповідає згаданому вище означенню, адже $\mathfrak{n}$ — нескінченний кардинал.

Сім'ю $(S_i : i \in I)$ підмножин топологічного простору X назвемо $\mathfrak{n}$-точковою, якщо для довільної точки $x \in X$ множина $\{i \in I : x \in S_i\}$ має потужність не більшу $\mathfrak{n}$. Якщо $\mathfrak{n} = \aleph_0$, то це — точково зліченна сім'я.

Для топологічного добутку $X = \prod_{s \in S} X_s$ і базисної відкритої в X множини $U = \prod_{s \in S} U_s$ скінченну множину $\{s \in S : U_s \neq X_s\}$ позначатимемо через $R(U)$.

Тепер для деякого нескінченного кардинального числа $\mathfrak{n}$ розглянемо наступні топологічні властивості простору, які будуть корисними для подальших досліджень:

$\mathrm{I}_{\mathfrak{n}}$) кожна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих підмножин топологічного простору має потужність не більшу $\mathfrak{n}$;

$\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$) кожна точково скінченна сім'я непорожніх відкритих підмножин топологічного простору має потужність не більшу $\mathfrak{n}$;

$\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$) кожна $\mathfrak{n}$-точкова сім'я непорожніх відкритих підмножин топологічного простору має потужність не більшу $\mathfrak{n}$.

Зауважимо, що такого виду властивості топологічних добутків розглядалися в [3]. Зокрема, як уже згадувалося, властивість $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}}$) там дістала назву псевдо-$\aleph_i$-компактності, де $\aleph_i$ — наступний після $\mathfrak{n}$ кардинал. Встановимо необхідні і достатні умови того, що топологічний добуток має одну із згаданих властивостей.

Твердження 1. *Нехай $\mathfrak{n}$ — нескінченний кардинал, $X = \prod_{s \in S} X_s$ — добуток нескінченного числа топологічних просторів X_s. Тоді X має властивість $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}}$), $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$) чи $\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$) тоді і тільки тоді, коли відповідну властивість має кожен скінченний піддобуток $\prod_{s \in S_0} X_s$.*

Доведення проведемо тільки для властивості $\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$), оскільки для двох інших властивостей міркування аналогічні.

Нехай $\mathfrak{m}$ — наступний після $\mathfrak{n}$ кардинал. Зауважимо, що $\mathfrak{m}$ — регулярний. Розглянемо таку топологічну властивість P): для кожної сім'ї непорожніх відкритих підмножин топологічного простору, потужність якої дорівнює $\mathfrak{m}$, існує точка, яка входить, принаймні, в $\mathfrak{m}$ елементів цієї сім'ї. Як легко бачити, ця властивість є запереченням властивості $\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$). Крім того, P) разом з регулярним кардиналом $\mathfrak{m}$ задовольняють умови теореми 1.3 з [3]. Тому X задовольняє властивість P) тоді і тільки тоді, коли кожен скінченний піддобуток $\prod_{s \in S_0} X_s$ задовольняє P). Зрозуміло, що аналогічне твердження справедливе і для заперечення P), тобто для властивості $\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$).

3. Перейдемо до розгляду функцій на добутках. Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$, $Y = \overline{\prod_{t \in T} Y_t}$ — добутки нетривіальних просторів X_s і Y_t, Z — топологічний простір і $\mathfrak{n}$ — нескінченний кардинал, причому $|T| > \mathfrak{n}$. Розпочнемо з результату, що описує найменшу множину, на якій зосереджена неперервна функція на добутку. Слід відмітити, що ідея доведення цього факту запозичена в [3], де хоча і не вводилися найменші множини, все ж побудовані відповідним чином множини розглядалися.

Теорема 1. *Нехай* $f\colon X \to Z$ *— неперервне відображення. Тоді множина* $S_0 = \{s \in S:$ *існують точки* $x_s, y_s \in X$ *такі, що* $x_s(t) = y_s(t)$ *для кожного* $t \neq s$ *і* $f(x_s) \neq f(y_s)\}$ *є найменшою множиною, на якій зосереджене відображення* f.

Доведення. Зафіксуємо точку $a \in X$ і для неї розглянемо множини $Y = \Sigma(a) = \{x \in X\colon x(s) \neq a(s)$ лише для скінченного числа $s\}$ і $\tilde{S} = \{s \in S:$ існують $x_s, y_s \in Y$ такі, що $x_s(t) = y_s(t)$ для кожного $t \neq s$ і $f(x_s) \neq f(y_s)\}$. Покажемо, що звуження $g = f|_Y$ зосереджене на множині $\tilde{S}$, тобто для довільних $x, y \in Y$ з умови $x|_{\tilde{S}} = y|_{\tilde{S}}$ випливає рівність $g(x) = g(y)$. Нехай x_0, $y_0 \in Y$ такі, що $x_0|_{\tilde{S}} = y_0|_{\tilde{S}}$. Зауважимо, що множина $T = \{s \in S: x_0(s) \neq y_0(s)\}$ скінченна і $T \cap \tilde{S} = \varnothing$. Нехай T складається з n різних елементів $t_1, \ldots, t_n$. Покладемо послідовно $x_i(t_i) = y_0(t_i)$ та $x_i(s) = x_{i-1}(s)$ при $s \neq t_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що $x_n = y_0$. Оскільки $t_i \notin \tilde{S}$, то $f(x_i) = f(x_{i-1})$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Тому $g(x_0) = g(x_1) = \ldots = g(x_n) = g(y_0)$. Отже, g зосереджене на $\tilde{S}$. Оскільки $\overline{Y} = X$ і f — неперервне відображення, то і f зосереджене на множині $\tilde{S}$. Очевидно, що $\tilde{S} \subseteq S_0$. Крім того, з означення S_0 легко випливає, що S_0 міститься в довільній множині, на якій зосереджене f. Тому $S_0 \subseteq \tilde{S}$ і, таким чином, S_0 є найменшою множиною, на якій зосереджене відображення f.

Для нарізно неперервних функцій одержимо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *— нарізно неперервна функція. Тоді множина* $T_0 = \{t \in T\colon$ *існують точки* $x_t \in X$, $y_t, z_t \in Y$ *такі, що* $y_t(r) = z_t(r)$ *для кожного* $r \neq t$ *і* $f(x_t, y_t) \neq f(x_t, z_t)\}$ *є найменшою множиною, на якій зосереджена функція* f *по* y.

Викладення основних результатів розпочнемо з теореми, яка дає необхідні умови залежності.

Теорема 2. *Нехай* X *і* Y *— цілком регулярні простори і кожна нарізно неперервна функція* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від* $\mathfrak{n}$ *координат по* y. *Тоді простір* $X \times Y$ *задовольняє* $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}})$ *і хоча б один з просторів* X *і* Y *задовольняє* $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}})$.

Доведення. Доведемо спочатку, що $X \times Y$ задовольняє $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}})$. Зафіксуємо довільні скінченні підмножини S_0 і T_0 множин S і T відповідно. Покладемо $Z = \prod_{s \in S_0} X_s \times \prod_{t \in T} Y_t$ і розглянемо довільну неперервну функцію $g\colon Z \to \mathbb{R}$ і відповідну їй функцію $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = g\left(x|_{S_0}, y\right)$. Зрозуміло, що f є нарізно неперервною функцією, адже g — неперервна. Тому f залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y, тобто існує така множина $\tilde{T} \subseteq T$, $\left|\tilde{T}\right| = \mathfrak{n}$, на якій зосереджена функція f по y. Легко бачити, що тоді функція g зосереджена на множині $S_0 \cup \tilde{T}$, причому $|S_0 \cup \tilde{T}| = \mathfrak{n}$. Отже, g залежить від $\mathfrak{n}$ координат. А оскільки g — довільна неперервна функція на Z, то, як випливає з теореми 3.2 з [3], простір Z задовольняє $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}})$. Тепер, застосувавши твердження 1, одержимо, що простір $\prod_{s \in S_0} X_s \times \prod_{t \in T_0} Y_t$ також задовольняє $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}})$. Враховуючи, що S_0 і T_0 — довільні скінченні підмножини, маємо, що $X \times Y$ задовольняє $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}})$.

Залишилося перевірити, що хоча б один із просторів X і Y задовольняє $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}})$. Нехай це не так, тобто X не задовольняє $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}})$ та існує така скінченна множина $T_0 \subseteq T$, що простір $Y_0 = \prod_{t \in T_0} Y_t$ не задовольняє $\mathrm{II}_\mathfrak{n}$). Оскільки множина T_0 скінченна і $|T| > \mathfrak{n}$, то існує така множина $I \subseteq T \setminus T_0$, що $|I| = \mathfrak{m}$, де $\mathfrak{m}$ — наступний після $\mathfrak{n}$ кардинал. Тепер візьмемо точково скінченні сім'ї $(U_i\colon i \in I)$ та $(V_i\colon i \in I)$ непорожніх відкритих множин U_i та V_i в просторах X та Y_0 відповідно. Для кожного $i \in I$ виберемо точки $x_i \in U_i$, $v_i \in V_i$, $a_i, b_i \in Y_i$ такі, що $a_i \neq b_i$. Оскільки простори X, Y_0 та Y_i цілком регулярні, то існують такі неперервні функції $f_i\colon X \to [0, 1]$, $g_i\colon Y_0 \to [0, 1]$ та $h_i\colon Y_i \to [0, 1]$, що $f_i(x_i) = g_i(v_i) = h_i(a_i) = 1$, $f_i(X \setminus U_i) = g_i(Y_0 \setminus V_i) = \{0\}$ і $h_i(b_i) = 0$. Розглянемо функцію $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, яка означається так:

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x) g_i\big(y|_{T_0}\big) h_i(y(i)).$$

Переконаємося, що f — нарізно неперервна функція. Зафіксуємо $x \in X$. Оскільки сім'я $(U_i\colon i \in I)$ — точково скінченна, то множина $I_x = \{i \in I\colon x \in U_i\}$ — скінченна, тому функція

$$f^x(y) = \sum_{i \in I_x} f_i(x) g_i\big(y|_{T_0}\big) h_i(y(i))$$

є неперервною як скінченна сума неперервних функцій. Аналогічно доводиться неперервність функції $f_y\colon X \to \mathbb{R}$ для кожного фіксованого $y \in Y$. Тепер покажемо, що f не залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y. Для цього розглянемо найменшу множину $\tilde{T}$, на якій зосереджена функція f по y. Для кожного $i \in I$ означимо точки y_i та z_i таким чином:

$$y_i(t) = \begin{cases} v_i(t), & t \in T_0; \\ a_i, & t = i; \\ \text{довільним чином у решті випадків}, \end{cases} \qquad z_i(t) = \begin{cases} y_i(t), & t \neq i; \\ b_i, & t = i. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$f(x_i, y_i) - f(x_i, z_i) = \sum_{j \in I} \Big(f_j(x_i) g_j\big(y_i|_{T_0}\big) h_j(y_i(j)) - f_j(x_i) g_j\big(z_i|_{T_0}\big) h_j(z_i(j)) \Big) =$$

$$= \sum_{j \in I} \big(f_j(x_i) g_j(v_i) \big)\big(h_j(y_i(j)) - h_j(z_i(j)) \big) = f_i(x_i) g_i(v_i) (h_i(a_i) - h_i(b_i)) = 1.$$

Тому, як випливає з наслідку, $i \in \tilde{T}$, значить, $I \subseteq \tilde{T}$. Отже, $|\tilde{T}| > \mathfrak{n}$, тобто f не залежить від $\mathfrak{n}$ координат по змінній y, що суперечить умові теореми. Отже, наше припущення невірне і хоча б один з просторів X і Y задовольняє $\mathrm{II}_\mathfrak{n}$).

Достатні умови залежності дає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай X задовольняє властивість $\mathrm{III}_\mathfrak{n}$), а Y — властивість $\mathrm{I}_\mathfrak{n}$). Тоді кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y.*

Доведення. Нехай це не так, тобто існує нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y. Тоді, як випливає з наслідку, потужність множини $T_0 = \{t \in T\colon$ існують точки $x_t \in X$, $y_t, z_t \in Y$ такі, що $y_t(r) = z_t(r)$ для кожного $r \neq t$ і $f(x_t, y_t) \neq f(x_t, z_t)\}$ більша від $\mathfrak{n}$. Для кожного $t \in T_0$ покладемо $\varepsilon_t = |f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)|$ і, скориставшись неперервністю функцій f_{y_t} і f_{z_t}, одержимо такий відкритий окіл U_t точки x_t, що

$|f_{y_t}(x)-f_{y_t}(x_t)|<\varepsilon_t/2$ і $|f_{z_t}(x)-f_{z_t}(x_t)|<\varepsilon_t/2$ для кожного $x\in U_t$. Тоді

$$|f(x, y_t)-f(x, z_t)| = |f_{y_t}(x)-f_{z_t}(x)| =$$
$$= |f_{y_t}(x)-f_{y_t}(x_t)+f_{y_t}(x_t)-f_{z_t}(x_t)+f_{z_t}(x_t)-f_{z_t}(x)| \geq$$
$$\geq |f_{y_t}(x_t)-f_{z_t}(x_t)|-|f_{y_t}(x)-f_{y_t}(x_t)|-|f_{z_t}(x)-f_{z_t}(x_t)| > \varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

Тобто $f(x, y_t)\neq f(x, z_t)$ для кожного $x\in U_t$. Розглянемо сім'ю $\mathcal{U}=(U_t:\ t\in \in T_0)$. Оскільки простір X задовольняє властивість $\mathrm{III}_{\mathfrak{n}}$), а потужність множини T_0 більша $\mathfrak{n}$, то сім'я $\mathcal{U}$ не є $\mathfrak{n}$-точковою, значить, існує така точка $x^*\in X$, що множина $T^*=\{t\in T_0:\ x^*\in U_t\}$ має потужність більшу $\mathfrak{n}$. Тепер відмітимо, що $f^*=f^{x^*}$ — неперервна функція на Y і простір Y має властивість $\mathrm{I}_{\mathfrak{n}}$), тому, як випливає з теореми 3.2 з [3], f^* залежить від $\mathfrak{n}$ координат, а значить, найменша множина $\tilde{T}$, на якій зосереджена функція f^* (існування цієї множини випливає з теореми 1) має потужність не більшу $\mathfrak{n}$. Але $f^*(y_t)=f(x^*, y_t)\neq f(x^*, z_t)=f^*(z_t)$ для кожного $t\in T^*$, тому, як випливає з теореми 1, $T^*\subseteq \subseteq \tilde{T}$, що неможливо, бо $|\tilde{T}|\leq \mathfrak{n}<|T^*|$. Таким чином, одержали суперечність. Отже, наше припущення невірне, тобто кожна нарізно неперервна функція f: $X\times Y\to\mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y.

4. У цьому пункті ми наведемо результати про залежність від $\mathfrak{n}$ координат нарізно неперервних функцій на добутках просторів, хоча б один з яких задовольняє умову типу компактності. Розпочнемо з допоміжного результату, який доповнює теорему 3.2 з [3].

Лема. *Нехай X — псевдо-$\aleph_0$-компакт і f: $X\to\mathbb{R}$ — неперервна функція. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує така скінченна множина $S_0\subseteq S$, що для довільних $x_1, x_2\in X$ з умови $x_1|_{S_0}=x_2|_{S_0}$ випливає нерівність $|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon$.*

Доведення. Нехай це не так, тобто існує таке $\varepsilon_0>0$, що для довільної скінченної множини $S'\subseteq S$ існують точки $x, y\in X$ такі, що $x|_{S'}=y|_{S'}$ і $|f(x)-f(y)|>\varepsilon_0$. Розпочнемо з порожньої множини S_1. Існують такі точки x_1, $y_1\in X$, що $|f(x_1)-f(y_1)|>\varepsilon_0$. Виберемо такі відкриті околи $U_1=\prod_{s\in S}U_s^{(1)}$ і $V_1=\prod_{s\in S}V_s^{(1)}$ точок x_1 і y_1 відповідно, що $U_s^{(1)}=V_s^{(1)}$ для кожного $s\in S_1$, $R(U_1)=R(V_1)$, $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon_0/4$ і $|f(y)-f(y_1)|<\varepsilon_0/4$ для довільних $x\in \in U_1$ і $y\in V_1$. З останніх двох умов і вибору точок x_1 і y_1 випливає, що $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0/2$ для довільних $x\in U_1$ та $y\in V_1$. Покладемо $S_2=R(U_1)\cup \cup S_1$. Існують такі точки $x_2, y_2\in X$, що $x_2|_{S_2}=y_2|_{S_2}$ і $|f(x_2)-f(y_2)|>\varepsilon_0$. Аналогічно, як і раніше, виберемо околи $U_2=\prod_{s\in S}U_s^{(2)}$ і $V_2=\prod_{s\in S}V_s^{(2)}$ точок x_2 і y_2 відповідно такі, що $U_s^{(2)}=V_s^{(2)}$ для кожного $s\in S_2$, $R(U_2)= =R(V_2)$ і $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0/2$ для довільних $x\in U_2$ та $y\in V_2$. Покладемо $S_3=S_2\cup R(U_2)$ і знайдемо такі відкриті множини $U_3=\prod_{s\in S}U_s^{(3)}$ і $V_3= =\prod_{s\in S}V_s^{(3)}$, що $U_s^{(3)}=V_s^{(3)}$ для кожного $s\in S_3$, $R(U_3)=R(V_3)$ і $|f(x)- -f(y)|\geq\varepsilon_0/2$ для довільних $x\in U_3$ і $y\in V_3$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержимо послідовності $\left(U_n=\prod_{s\in S}U_s^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ і $\left(V_n=\prod_{s\in S}V_s^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$

відкритих множин, які разом з послідовністю множин $S_n = \bigcup_{k<n} R(U_k)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють наступні умови:

1) $U_s^{(n)} = V_s^{(n)}$ для кожного $s \in S_n$;

2) $R(U_n) = R(V_n)$;

3) $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0 / 2$ для довільних $x \in U_n$ і $y \in V_n$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{U} = (U_n \colon n \in \mathbb{N})$. Оскільки X — псевдо-$\aleph_0$-компакт, то ця сім'я не є локально скінченною. Тобто існує така точка $\tilde{x} \in X$, що довільний її окіл перетинається з нескінченним числом елементів сім'ї $\mathcal{U}$. Нехай $\tilde{U} = \prod_{s \in S} \tilde{U}_s$ — базисний окіл точки $\tilde{x}$ такий, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0 / 4$ для довільних точок $x, y \in \tilde{U}$, і $\{ n_k \colon k \in \mathbb{N} \}$ — зростаюча послідовність номерів n_k така, що $\tilde{U} \cap U_{n_k} \neq \varnothing$. Використавши умову 3 для номерів n_k, легко переконатися, що $\tilde{U} \cap V_{n_k} = \varnothing$. Тобто для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує таке $s_k \in S$, що $\tilde{U}_{s_k} \cap V_{s_k}^{(n_k)} = \varnothing$. Зауважимо, що тоді $s_k \in R(\tilde{U}) \cap R(V_{n_k}) \subseteq R(U_{n_k}) \subseteq S_{n_{k+1}}$. Але $\tilde{U}_{s_k} \cap U_{s_k}^{(n_k)} \neq \varnothing$, тому $U_{s_k}^{(n_k)} \neq V_{s_k}^{(n_k)}$ і, як випливає з умови 1, $s_k \notin S_{n_k}$. Таким чином, $s_k \in S_{n_{k+1}} \setminus S_{n_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що всі точки s_k різні, що неможливо, бо всі вони належать множині $R(\tilde{U})$, яка є скінченною.

Основними результатами цього пункту є наступні дві теореми.

Теорема 4. *Нехай X має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$) і Y — псевдо-$\aleph_0$-компакт. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто існує така нарізно неперервна функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y. Тоді, як випливає з наслідку, множина $\tilde{T} = \{ t \in T \colon$ існують точки $x_t \in X$, $y_t, z_t \in Y$ такі, що $y_t(r) = z_t(r)$ для кожного $r \neq t$ і $f(x_t, y_t) \neq f(x_t, z_t) \}$ має потужність більшу $\mathfrak{n}$. Для кожного натурального n покладемо $T_n = \{ t \in \tilde{T} \colon |f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)| > 1/n \}$. Оскільки $|\tilde{T}| > \mathfrak{n}$ і $\tilde{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, то існує такий номер n_0, що множина $T_0 = T_{n_0}$ має потужність більшу $\mathfrak{n}$. Функція f неперервна по x, тому для кожного $t \in T_0$ існує такий окіл U_t точки x_t, що для довільної точки $x \in U_t$ будуть виконуватися нерівності $|f(x, y_t) - f(x_t, y_t)| < 1/(4n_0)$ і $|f(x, z_t) - f(x_t, z_t)| < 1/(4n_0)$. А оскільки $|f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)| > 1/n_0$, то, зрозуміло, що $|f(x, y_t) - f(x, z_t)| > 1/(2n_0)$ для кожного $x \in U_t$. Розглянемо сім'ю $\mathcal{U} = (U_t \colon t \in T_0)$. Простір X має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$) і $|T_0| > \mathfrak{n}$, тому сім'я $\mathcal{U}$ не є точково скінченною, тобто існують такі точка $\tilde{x} \in X$ і зліченна множина $R \subseteq T_0$, що $\tilde{x} \in U_t$ для кожного $t \in R$. Тепер застосуємо до неперервної функції $f^{\tilde{x}} \colon Y \to \mathbb{R}$ лему і одержимо, що існує така скінченна множина $\tilde{R} \subseteq R$, що для довільних точок $y, z \in Y$ з умови $y|_{\tilde{R}} = z|_{\tilde{R}}$ випливає $\left| f^{\tilde{x}}(y) - f^{\tilde{x}}(z) \right| < 1/(2n_0)$. Тепер, взявши довільну точку t з множини $R \setminus \tilde{R}$, яка обов'язково непорожня, одержимо, що, з одного боку, $|f(\tilde{x}, y_t) - f(\tilde{x}, z_t)| = \left| f^{\tilde{x}}(y_t) - f^{\tilde{x}}(z_t) \right| < 1/(2n_0)$, адже $y_t(r) = z_t(r)$, якщо $r \neq t$, і тому $y_t|_{\tilde{R}} = z_t|_{\tilde{R}}$; а з другого — $|f(\tilde{x}, y_t) - f(\tilde{x}, z_t)| > 1/(2n_0)$, бо $\tilde{x} \in U_t$. А це неможливо. Таким чином, прийшли до суперечності. Отже, наше припущення невірне, тобто кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y.

Теорема 5. *Нехай X — зліченно компактний простір і Y має властивість* $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$). *Тоді кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по змінній y.*

Доведення, як і раніше, проведемо від супротивного. Нехай нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ не залежить від $\mathfrak{n}$ координат по y. Тоді, як випливає з доведення попередньої теореми, існує таке натуральне число n_0, що множина $T_0 = \{t \in T\colon$ існують точки $x_t \in X, y_t, z_t \in Y$ такі, що $y_t(r) = z_t(r)$ для кожного $r \neq t$ і $|f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)| > 1/n_0\}$ має потужність більшу $\mathfrak{n}$. Оскільки функція f неперервна по y, то для кожного $r \in T_0$ існують такі базисні відкриті околи $V_r = \prod_{t \in T} V_t^{(r)}$ і $W_r = \prod_{t \in T} W_t^{(r)}$ точок y_r і z_r відповідно, що $R(V_r) = R(W_r)$, $V_t^{(r)} = W_t^{(r)}$ для кожного $t \neq r$, $|f(x_r, y_r) - f(x_r, y)| < 1/(4n_0)$ і $|f(x_r, z_r) - f(x_r, z)| < 1/(4n_0)$ для довільних $y \in V_r$ і $z \in W_r$. Зауважимо, що тоді $|f(x_r, y) - f(x_r, z)| > 1/(2n_0)$ для кожного $r \in T_0$ і довільних $y \in V_r$ і $z \in W_r$. Покладемо $S(n) = \{t \in T_0\colon |R(V_t)| = n\}$. Оскільки $|T_0| > \mathfrak{n}$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} S(n) = T_0$, то існує таке $k \in \mathbb{N}$, що деяка підмножина $S_0 \subseteq S(k)$ має потужність $\mathfrak{m}$, де $\mathfrak{m}$ — наступний після $\mathfrak{n}$ кардинал. Розглянемо сім'ю $\mathcal{A} = (R(V_t)\colon t \in S_0)$. Вона задовольняє умови леми Шаніна [2, с. 185], адже $\mathfrak{m}$ — регулярний кардинал, тому існують такі скінченна множина $\tilde{T} \subseteq T$ і множина $\tilde{S} \subseteq S_0$, що $|\tilde{S}| = \mathfrak{m}$ і $R(V_r) \cap R(V_s) = \tilde{T}$ для довільних різних $r, s \in \tilde{S}$. Нагадаємо, що простір Y має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$), тому сім'я $(V_s\colon s \in \tilde{S})$ не є точково скінченною, тобто існують такі точка $\tilde{y} \in Y$ і зліченна множина $\tilde{R} \subseteq \tilde{S} \setminus \tilde{T}$, що $y \in V_s$ для кожного $s \in \tilde{R}$. Простір X є зліченно компактним, тому сім'я $(x_r\colon r \in \tilde{R})$ має хоча б одну точку накопичення, тобто точку, в кожному околі якої є нескінченне число елементів сім'ї. Нехай $\tilde{x}$ — точка накопичення сім'ї $(x_r\colon r \in \tilde{R})$. Оскільки функція f неперервна по y, то існує такий базисний окіл $\tilde{V}$ точки $\tilde{y}$, що $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, y)| < 1/(4n_0)$ для кожного $y \in \tilde{V}$. Зауважимо, що множина $R_0 = \tilde{R} \setminus R(\tilde{V})$ також зліченна і точка $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_r\colon r \in R_0)$. Розглянемо точку $\tilde{z} \in Y$, яка означається таким чином:

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z_t(t), & t \in R_0; \\ \tilde{y}(t), & t \notin R_0. \end{cases}$$

Зафіксуємо $r \in R_0$ і переконаємося, що $\tilde{z} \in W_r = \prod_{t \in T} W_t^{(r)}$. Зрозуміло, що для цього достатньо перевірити, що $\tilde{z}(t) \in W_t^{(r)}$ для кожного $t \in R(W_r) = R(V_r)$. Нехай $t \in R(V_r) \setminus R_0$. Тоді $\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t)$, а $\tilde{y} \in V_r$, бо $r \in R_0 \subseteq \tilde{R}$. Тому $\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t) \in V_t^{(r)}$. Зауважимо, що $t \neq r$, і, отже, $V_t^{(r)} = W_t^{(r)}$ і, таким чином,

$\tilde{z}(t) \in W_t^{(r)}$. Тепер нехай $t \in R(V_r) \cap R_0$. Зауважимо, що оскільки $V_t \neq W_t$ і $V_s^{(t)} = W_s^{(t)}$ для всіх $s \neq t$, то $V_t^{(t)} \neq W_t^{(t)}$, тому $t \in R(V_t) = R(W_t)$. Отже, $t \in \in R(V_r) \cap R(V_t) \cap R_0$. Але t і r належать множині $\tilde{R}$, і якщо $t \neq r$, то $R(V_r) \cap R(V_t) = \tilde{T}$, а $R_0 \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{S} \setminus \tilde{T}$, звідки легко бачити, що $R(V_r) \cap R(V_t) \cap \cap R_0 = \varnothing$. Значить, $t = r$, тобто $R(V_r) \cap R_0 = \{r\}$, і $\tilde{z}(r) = z_r(r) \in W_r^{(r)}$, адже W_r є околом точки z_r. Таким чином, $\tilde{z} \in W_r$ для кожного $r \in R_0$, тому $\tilde{z} \in \in \bigcap_{r \in R_0} W_r$. Нагадаємо, що $\tilde{y} \in \bigcap_{r \in R_0} V_r$, тому $|f(x_r, \tilde{y}) - f(x_r, \tilde{z})| > 1/(2n_0)$ для кожного $r \in R_0$. А оскільки $\tilde{x}$ — точка накопичення сім'ї $(x_r \colon r \in R_0)$ і функція f неперервна по змінній x, то $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{z})| \geq 1/(2n_0)$. Але, з іншого боку, $\tilde{z} \in \tilde{V}$, бо $\tilde{V}$ — окіл точки $\tilde{y}$ і $\tilde{y}|_{R(\tilde{V})} = \tilde{z}|_{R(\tilde{V})}$, тому $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{z})| < 1/(4n_0)$, що неможливо. Отже, наше припущення невірне і теорема доведена.

Тепер легко довести наступну теорему.

Теорема 6. *Нехай X і Y — цілком регулярні зліченно компактні простори. Тоді наступні умови рівносильні:*

i) кожна нарізно неперервна функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по змінній y;

ii) кожна нарізно неперервна функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат;

iii) хоча б один з просторів X і Y має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$).

Доведення. i) $\Rightarrow$ iii). Це випливає безпосередньо з теореми 2. iii) $\Rightarrow$ ii). Нехай X має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$). Крім того, цілком регулярний зліченно компактний простір є псевдокомпактним, а значить, і псевдо-$\aleph_0$-компактним, тому за теоремою 4 кожна нарізно неперервна функція $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\mathfrak{n}$ координат по змінній y. Якщо ж, крім того, $|S| > \mathfrak{n}$, то за теоремою 5 f залежить від $\mathfrak{n}$ координат по змінній x. А отже, f залежить від $\mathfrak{n}$ координат. У випадку, коли Y має властивість $\mathrm{II}_{\mathfrak{n}}$), міркуємо аналогічно. Імплікація ii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ i) є очевидною.

1. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції на добутках компактів і їх залежність від $\mathfrak{n}$ змінних // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 344–350.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
3. *Noble N., Ulmer M.* Factoring functions on Cartesian products // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **163**. – P. 329–339.

Одержано 25.03.96