УДК 517. 54

В. И. Рязанов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О КОМПАКТНОСТИ И МЕТРИЗУЕМОСТИ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ МНОГООБРАЗИЙ

The theorem on the sequential compactness of so-called nuclear space of arbitrary topological manifolds is proved.

Доведено теорему про секвенціальну компактність так званого ядерного простору довільної топологічної многостатності.

Теория абстрактных пространств со сходимостями Фреше – Урысона вкратце изложена в п. 1. В последующих пунктах статьи рассматривается частный случай таких пространств — ядерное пространство, которое состоит из открытых множеств произвольного топологического пространства и наделено сходимостью к ядру. Отметим, что эта сходимость двойственна так называемому топологическому пределу замкнутых множеств.

Сходимость областей к ядру относительно точки может быть получена из общей сходимости к ядру открытых множеств непрерывной проекцией. Вопрос об изучении функций, заданных в переменных областях, разрабатывается уже давно и восходит к известным работам К. Каратеодори, Л. Бибербаха, Т. Радо, Р. Куранта, А. И. Маркушевича, Г. Д. Суворова и других авторов (см., например, [1 – 5]).

В п. 2 доказана теорема о секвенциальной компактности ядерного пространства для произвольного сепарабельного метрического пространства. Эта теорема усиливает известную лемму Г. Д. Суворова [4, с. 130]. В п. 3 обсужден вопрос о метризации ядерного пространства. Доказано, что в случае компактного метрического пространства соответствующее ему ядерное пространство также является метризуемым и компактным (теорема 2). В частности, отсюда следует, что ядерное пространство в этом случае является полным, сепарабельным и секвенциально компактным пространством (теорема 3). В п. 4 речь идет о ядерных пространствах многообразий. Показано, что ядерное пространство произвольных топологических многообразий является секвенциально компактным, а в случае компактных многообразий — и метризуемым (теоремы 4 и 5). Наконец, в п. 5 приведены следствия 1 – 5 для римановых поверхностей. Для теории функций наиболее интересен весьма частный случай комплексной плоскости.

1. О пространствах со сходимостями. Абстрактные пространства, в которых понятие предела играет роль исходного понятия, были введены Фреше (1906) в его диссертации.

Произвольное множество X абстрактной природы называют L-пространством, если в нем выделен некоторый класс последовательностей, называемых *сходящимися*. Причем каждой последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, этого класса поставлен в соответствие единственный элемент $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, называемый *пределом*, таким образом, что выполняются аксиомы:

A_1. Если $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

A_2. Если последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к x, то и любая ее подпоследовательность также сходится к x.

В работе [6], которая появилась в результате личного контакта Урысона с Фреше (1924), первым была введена еще одна аксиома:

A_3. Если компактная последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет единственную точку прикосновения x, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Здесь под *точкой прикосновения* последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, понимается предел какой-либо сходящейся ее подпоследовательности. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется *компактной*, если из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Урысон называл L-пространства с третьей аксиомой L_t-пространствами. Отметим, что аксиома A_3 эквивалентна третьей аксиоме Куратовского [7, с. 197], который называет те же пространства L^*-*пространствами*.

Заметим, что третья аксиома является наиболее важной. Она значительно облегчает проверку сходимости последовательностей.

Как легко видеть, сходимость по любой метрике удовлетворяет аксиомам L^*-пространства [7, с. 215], а, например, всем известная сходимость почти везде для измеримых функций не удовлетворяет третьей асиоме (любая сходящаяся по мере последовательность имеет единственную точку накопления и компактна относительно сходимости почти везде, но не любая сходится почти везде).

L^*-пространство будем называть *секвенциально компактным*, если из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Другими словами, любая последовательность в таком пространстве является компактной в указанном выше смысле.

В секвенциально компактном пространстве *аксиома Урысона* приобретает особо простой вид: последовательность с единственной точкой накопления сходится к этой точке [7, с. 203]. Другими словами, чтобы убедиться, что в таком пространстве какая-либо последовательность сходится к некоторой точке, достаточно проверить, что любая ее *сходящаяся* подпоследовательность сходится именно к этой точке.

Отметим, что в L^*-пространствах естественным образом возникает понятие замыкания множества:

$$\overline{X}_0 = \{x \in X : x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in X_0,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Однако при этом не всегда выполняется одна из аксиом топологического пространства [7, с. 44]:

$$\overline{\overline{X}}_0 = \overline{X}_0. \tag{1}$$

Таким образом, сходимость не всегда порождает топологию [7, с. 199]. Тем не менее, эта проблема снимается, как только показано, что сходимость порождается некоторой метрикой [7, с. 215].

Приведем общую конструкцию генерирования метрик псевдометриками [7, с. 241]. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется *псевдометрикой*, если выполняются аксиомы:

B_1. $\rho(x, x) = 0$.

B_2. $\rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z)$.

Отсюда также следует, что $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Если, кроме того,

$$(x \neq y) \Rightarrow \rho(x, y) \neq 0,$$

то псевдометрика становится метрикой.

Пространство X называется *псевдометрическим* относительно семейства псевдометрик $\{\rho_j\}$, $j \in J$, если имеет место следующая аксиома.

B_3. Для каждой пары $x \neq y$ существует $j \in J$ такое, что $\rho_j(x, y) \neq 0$.

Если множество индексов J счетно, то

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(x, y)}{1 + \rho_j(x, y)} \tag{2}$$

определяет метрику в пространстве X [7, с. 243].

2. О ядерном пространстве. Итак, пусть (T, τ) — произвольное топологическое пространство, состоящее из множества T абстрактной природы и топологии τ, т. е. некоторой совокупности подмножеств T, называемых открытыми множествами, которые удовлетворяют следующим аксиомам (см., например, [8, с. 17]):

O_1. Всякое объединение множеств из τ есть множество из τ.

O_2. Пересечение всякого конечного семейства множеств из τ есть множество из τ.

В соответствии с этим под *внутренностью* произвольного множества $E \subseteq T$, обозначаемой $\operatorname{Int} E$, понимается максимальное по включению открытое его подмножество. Как видно из аксиомы O_1, внутренность $\operatorname{Int} E$ всегда существует и представляет собой объединение всех открытых подмножеств множества E.

Ядром $N\{E_n\}$ последовательности множеств $E_n \subseteq T$, $n = 1, 2, \dots$, называется множество

$$N\{E_n\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big[\operatorname{Int}\Big(\bigcap_{n \ge m} E_n\Big)\Big] \tag{3}$$

(см., например, [9, с. 79]). Таким образом, $z \in N\{E_n\}$ тогда и только тогда, когда существует окрестность U точки z и число m такие, что $U \subseteq E_n$ для всех $n \ge m$. Отметим, что ядро, как объединение открытых множеств, всегда является открытым множеством.

Будем говорить, что последовательность множеств E_n сходится к множеству E как к ядру, и писать $E_n \xrightarrow{N} E$, если ядро любой ее подпоследовательности E_{n_k} совпадает с E.

Пространство τ всех открытых подмножеств T, наделенное сходимостью к ядру, превращается в L^*-пространство. Обозначим его через T_N и будем называть ядерным пространством.

Через 2^T принято обозначать совокупность всех замкнутых подмножеств T, т. е. множеств, дополнительных в T к открытым множествам [7, с. 168]. Пространство 2^T также можно наделить сходимостью, которая будет естественным образом двойственна сходимости к ядру.

Введем некоторые определения. Пусть

$$\operatorname*{Ls}_{n \to \infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big[\overline{\Big(\bigcup_{n \ge m} E_n\Big)}\Big] \tag{4}$$

обозначает так называемый *верхний топологический предел* последовательности множеств $E_n \subseteq T$, $n = 1, 2, \dots$, [7, с. 344, 345]. Здесь, как обычно, через $\overline{\mathscr{E}}$ обозначается замыкание множества $\mathscr{E}$, т. е. минимальное по включению замкнутое множество, содержащее $\mathscr{E}$. Другими словами, $\overline{\mathscr{E}}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $\mathscr{E}$.

Ясно, что $z \in \operatorname{Ls} E_n$ тогда и только тогда, когда любая окрестность U точки z пересекается с бесконечным числом множеств E_n. Как пересечение замкнутых множеств $\operatorname{Ls} E_n$ всегда является замкнутым множеством [7, с. 344, 345].

Будем говорить, что множество E является топологическим пределом последовательности множеств E_n, и писать $E = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} E_n$, если $\operatorname{Ls} E_{n_k} = E$ для любой подпоследовательности [7, с. 346, 347].

Как видно из (3) и (4),

$$N\{E_n\} = T \setminus \mathrm{Ls}\,(T \setminus E_n), \tag{5}$$

$$\mathrm{Ls}\,E_n = T \setminus N\{T \setminus E_n\}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$E_n \xrightarrow{N} E \iff \lim_{n\to\infty}(\mathrm{T} \setminus E_n) = T \setminus E, \tag{7}$$

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E_n = E \iff T \setminus E_n \xrightarrow{N} T \setminus E. \tag{8}$$

Таким образом, сходимость к ядру и топологический предел полностью двойственны друг другу.

Пространство замкнутых множеств 2^T, наделенное топологическим пределом Lim, обозначается как $(2^T)_L$ и является L^*-пространством [7, с. 349]. Оно естественным образом гомеоморфно ядерному пространству T_N, т. е.

$$(2^T)_L \underset{\mathrm{top}}{=} T_N. \tag{9}$$

Непрерывность соответствия здесь понимается в том смысле, что любая сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся. Отметим, что топологический предел и сходимость к ядру могут не порождать, вообще говоря, топологию [7, с. 350].

Далее, если T — сепарабельное метрическое пространство, то пространство $(2^T)_L$, а вместе с ним и ядерное пространство секвенциально компактны [7, с. 351].

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если T — сепарабельное метрическое пространство, то из любой последовательности открытых множеств $\Omega_n \subseteq T$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность Ω_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, которая будет сходиться к некоторому открытому множеству $\Omega \subseteq T$ как к ядру.*

Отметим, что теорема 1 усиливает известную лемму Суворова, которая была доказана для компактных метрических пространств и областей, т. е. открытых связных множеств, а также для сходимости областей к ядру относительно точки [4, с. 130]. Действительно, сепарабельное метрическое пространство может и не быть компактным, как показывают примеры вещественной оси $\mathbb{R}$ и конечной плоскости $\mathbb{C}$. С другой стороны, любое компактное метрическое пространство является сепарабельным [10, с. 27]. Ядро последовательности областей относительно точки совпадает с компонентой связности ядра (3), содержащей эту точку. Если все элементы последовательности содержат фиксированную окрестность данной точки, как это имеет место в лемме Суворова, то ядро не вырождается.

3. О метризации ядерного пространства. Рассмотрим теперь вопрос метризуемости ядерного пространства. Пусть (T, ρ) — метрическое пространство. Если пространство T не ограничено по метрике ρ, то всегда можно перейти к новому расстоянию

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)} \tag{10}$$

такому, что $d(x, y) < 1$ для любых x и y. При этом пространства (T, ρ) и (T, d) гомеоморфны [7, с. 220, 221].

Через $(2^T)_m$ принято обозначать множество всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства T. В случае ограниченного метрического пространства $(2^T)_m$ совпадает с множеством 2^T всех замкнутых подмножеств пространства T. Как мы только что видели, это разграничение имеет условный характер.

В дальнейшем, подразумевая пространство T ограниченным, на 2^T введем *расстояние Хаусдорфа* между двумя множествами A и $B \neq \varnothing$:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} \rho(a, B),\ \sup_{b\in B} \rho(b, A)\right\}, \tag{11}$$

где, как обычно,

$$\rho(a, B) = \inf_{b\in B} \rho(a, b). \tag{12}$$

Если $A = \varnothing \neq B$, то

$$\operatorname{dist}(A, B) = \delta(T) = \sup_{a,b\in T} \rho(a, b). \tag{13}$$

Как видим, пустое множество является изолированным элементом по указанной метрике [7, с. 223].

Если T — компактное метрическое пространство, то оно автоматически ограничено [10, с. 27] и на T

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} E_n = E \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(E_n, E) = 0 \tag{14}$$

(см. [10, с. 56]). Отметим также, что в этом случае именно метрика Хаусдорфа порождает *экспоненциальную топологию* на 2^T [10, с. 54]. Так называется слабейшая топология, в которой множества 2^M открыты для открытых и замкнуты для замкнутых множеств $M \subseteq T$ [7, с. 168]. Таким образом,

$$2^T \underset{\text{top}}{=} (2^T)_L \underset{\text{top}}{=} (2^T)_m \underset{\text{top}}{=} T_N \tag{15}$$

и на T_N можно ввести метрику

$$d(E_1, E_2) = \operatorname{dist}(T\setminus E_1, T\setminus E_2), \tag{16}$$

которая порождает сходимость к ядру.

Итак, справедлива следующая теорема [10, с. 52].

Теорема 2. *Пусть T — компактное метрическое пространство. Тогда его ядерное пространство T_N также метризуемо и компактно.*

Отсюда и из теоремы 1 непосредственно получаем следующее утверждение [10, с. 27].

Теорема 3. *Пусть T — компактное метрическое пространство. Тогда его ядерное пространство T_N с метрикой* (16) *является полным, вполне ограниченным, секвенциально компактным и сепарабельным пространством.*

В связи с обсуждаемым вопросом приведем также следующее утверждение.

Предложение 1 [10, с. 7–9]. *Пусть T — произвольное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *T секвенциально компактно;*

2) *T компактно (бикомпактно);*

3) *T счетно-компактно.*

Напомним, что *компактность (бикомпактность)* означает выполнение *условия Бореля – Лебега:* каждое открытое покрытие T содержит конечное подпокрытие.

Счетная компактность сводится к *условию Бореля*: каждое счетное открытое покрытие T содержит конечное подпокрытие.

Условию Бореля эквивалентно *условие Кантора*: для любой цепи непустых замкнутых множеств $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ из T

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \varnothing. \tag{17}$$

Секвенциальная компактность сводится к *условию Больцано – Вейерштрасса*, сформулированному в п. 1.

Поскольку топологическое пространство T в условиях теорем 1 – 3 является сепарабельным, напомним, что сепарабельность метрического пространства эквивалентна существованию счетной открытой базы [7, с. 215]. Поэтому в качестве критерия метризуемости топологического пространства T будет удобно воспользоваться первой метризационной теоремой Урысона:

Предложение 2 [11, с. 171]. *Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным* τ_1*-пространством.*

Напомним, что топологическое пространство T называется *нормальным*, если любые два непересекающиеся замкнутые множества в нем имеют непересекающиеся открытые окрестности [7, с. 128]. Топологическое пространство называется τ_1-пространством, если любое одноточечное множество в нем является замкнутым [7, с. 44].

Заметим, что указанное в предложении 2 условие метризуемости формально может быть ослаблено:

Предложение 3 [7, с. 249]. *Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярным* τ_1*-пространством.*

В связи с этим напомним, что топологическое пространство T называется *регулярным*, если любая точка $t \in T$ и замкнутое множество T_0, $t \notin T_0$, имеют непересекающиеся окрестности. Для τ_1-пространств условие регулярности, вообще говоря, слабее условия нормальности [11, с. 168]. Однако при наличии дополнительного априорного условия — существовании счетной открытой базы — свойства нормальности и регулярности эквивалентны [11, с. 129].

4. О ядерных пространствах многообразий. При изложении теории топологических многообразий будем в основном придерживаться монографии [12].

Топологическое пространство называется *локально евклидовым пространством* размерности n, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную пространству $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}^n_-$ пространства $\mathbb{R}^n$, составленному из точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с $x_1 \leq 0$.

Локально евклидово пространство называется *топологическим многообразием* или, короче, *многообразием*, если оно хаусдорфово и имеет счетную базу.

Напомним, что топологическое пространство называется *хаусдорфовым* (или τ_2*-пространством*), если любая пара точек в нем имеет непересекающиеся окрестности. Как известно, любое τ_2-пространство является и τ_1-пространством [7, с. 56].

Кроме того, многообразия являются локально компактными топологическими пространствами [12, с. 136]. Следовательно, они всегда регулярны [10, с. 48; 7, с. 127]. Таким образом, согласно предложению 3 любое топологическое многообразие является метризуемым топологическим пространством.

Поскольку для метрических пространств условия сепарабельности и существования счетной открытой базы эквивалентны [7, с. 215], то из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* M *— произвольное топологическое многообразие. Тогда* *его ядерное пространство M_N является секвенциально компактным L^*-пространством.*

Из теоремы 2 также получаем согласно теореме Александрова [8, с. 136] следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть M — произвольное топологическое многообразие. Тогда сходимость к ядру порождает на M_N метризуемую и компактную топологию.*

5. О ядерных пространствах римановых поверхностей. Понятие римановой поверхности лежит в основе геометрической теории аналитических функций, исключительная плодотворность которой проявляется во многих исследованиях, начиная с гениальной работы Б. Римана, блестяще продолженной Ф. Клейном, А. Пуанкаре, П. Кебе и другими. Хотя понятие римановой поверхности аналитической функции было введено Риманом еще в 1857 году, понятие абстрактной римановой поверхности смогло получить строгое определение лишь после развития теории абстрактных пространств и топологических многообразий. Общее понятие абстрактной римановой поверхности было впервые строго определено Г. Вейлем [13].

Согласно Вейлю, *абстрактная риманова* поверхность — это топологическая поверхность (триангулируемое двумерное многообразие) с конформными соотношениями соседства. Т. Радо [14] установил эквивалентность для двумерных многообразий свойств триангулируемости и наличия счетной открытой базы. Тем самым предельно упрощено определение двумерного топологического многообразия, которое совпадает с приведенным в предыдущем пункте для $n = 2$.

На этой основе было показано,что любая ориентируемая топологическая поверхность гомеоморфна некоторой римановой поверхности. Таким образом, римановы поверхности в топологическом плане среди двумерных многообразий выделяются только одним дополнительным свойством — ориентируемостью [15, с. 101–105].

Следствие 1. *Пусть R — абстрактная риманова поверхность. Тогда ядерное пространство R_N является секвенциально компактным L^*-пространством.*

Следствие 2. *Если R — абстрактная риманова поверхность, то сходимость к ядру порождает на R_N компактную и метризуемую топологию.*

Следствие 3. *Ядерное пространство $\overline{\mathbb{C}}_N$ является компактным метризуемым пространством. В качестве метрики, генерирующей сходимость к ядру, можно взять метрику* (16), *где через* dist *обозначена метрика Хаусдорфа* (11), *построенная по сферической метрике $\rho = s$. Относительно этой метрики $\overline{\mathbb{C}}_N$ является полным, вполне ограниченным и сепарабельным.*

Следствие 4. *Пусть Ω — произвольное открытое множество из расширенной комплексной области $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда ядерное пространство Ω_N метризуемо, компактно и сепарабельно.*

Следствие 5. *Ядерное пространство конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}_N$ метризуемо, компактно и сепарабельно.*

Наконец, отметим, что секвенциальная компактность сохраняет свою силу и для соответствующих пространств областей со сходимостью к ядру относительно точки. Это очевидно, поскольку естественная проекция ядерного пространства в подпространство областей является непрерывным отображением.

1. *Bieberbach Z.* Uber einen Satz des Herrn Caratheodory // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II Math.-phis. Kl. – 1913. – **4**. – S. 552 – 561.

2. *Caratheodory C.* Utersuhungen uber die konformen Abbildengen von festen und veranderlichen Gebieten // Math. Ann. – 1912. – **72**. – S. 107 – 144.
3. *Rado T.* Sur la representation conforme de domaines variables // Acta Szeged. – 1922/1923. – **1**, №3. – P. 180.
4. *Суворов Г. Д.* Семейства плоских топологических отображений. – Новосибирск: СО АН СССР, 1965. – 266 с.
5. *Суворов Г. Д.* Простые концы и последовательности плоских отображений. – Киев: Наук. думка, 1986. – 190 с.
6. *Urysohn P. S.* Sur les classes (L) de M. Frechet // Enseign. math. – 1926. – **25**. – P. 77 – 83.
7. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
8. *Бурбаки Н.* Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
9. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen. – Berlin etc.: Springer, 1965. – 267 S.
10. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
11. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
12. *Рохлин В. А., Фукс Д. В.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
13. *Weyl H.* Die Idee der Riemannschen Flache. – Leipzig; Berlin, 1913.
14. *Rado T.* Uber den Begriff der Riemannschen Flache // Acta Szeged. – 1925. – **2**. – P. 101 – 121.
15. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций – М.: Наука, 1964. – 228 с.

Получено 20.02.96