УДК 517.968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА. II

The optimal order of informational complexity is found for some classes of ill-posed problems.

Знайдено оптимальний порядок інформаційної складності деяких класів некоректних задач.

Данная статья является второй частью работы [1], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, формул и утверждений.

5. Настоящая работа посвящена вычислению величин $r_{N,\delta,p}$ и $C_{N,\delta,p}$, введенных в [1] и характеризующих информационную сложность проекционных алгоритмов решения операторных уравнений I рода. Прежде всего найдем минимальный радиус галеркинской информации (9) на некоторых классах некорректных задач. Здесь и далее в качестве некорректной задачи (1) будет фигурировать интегральное уравнение Фредгольма I рода с операторами A вида (2) из классов $\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}$ и $\overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}$ и свободными членами $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p > 1$.

Теорема 4. *Для* $N \geq c\delta^{-1/2s}$ *имеем*

$$r_{N,\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \geq cN^{-s}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно выбранные ортонормированный базис $B = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ из L_2 и множество Ω координатной плоскости, $\operatorname{card}(\Omega) \leq N$. Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_M, j_M)$, $M \leq N$, — совокупность всех точек из Ω с целочисленными координатами. Без потери общности можно считать, что $b_1(t) \equiv 1$ и $(1, 1) \in \Omega$.

Обозначим через $K_{2n,s}$ множество 1-периодических идеальных сплайнов порядка s, построенных по всем возможным разбиениям интервала $[0, 1]$ не более чем $2n$ узлами. Напомним, что под идеальным сплайном порядка s, построенным по разбиению

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{2n-1} < \tau_{2n} = 1,$$

понимаем функцию $\varphi \in L_2^s$ такую, что

$$\varphi^{(s)}(\tau) = \varepsilon(-1)^i, \quad \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, $\left(\varphi^{(s)}, 1\right) = 0$.

Известно (см., например, [2, с. 257]), что для $n = [M/2] + 1$ найдется такой идеальный сплайн $\varphi_0 \in K_{2n,s}$, что

$$\left(b_{j_k}, \varphi_0\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

Рассмотрим уравнение

$$A_1 x = f_1, \tag{25}$$

где

$$A_1 x(t) = \int_0^1 h_1(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad h_1(t,\tau) = 1 + \varphi_0(\tau)N^{-s}\|\varphi_0\|_{L_2}^{-1}.$$

Заметим, что для $i \neq 0$

$$\frac{\partial^{i+j} h_1(t,\tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \equiv 0.$$

Пусть теперь $i = 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Используя неравенство Харди – Литллвуда для производных [3, с. 117] и известную оценку минимальной нормы идеального сплайна [2, с. 253]

$$\inf_{\varphi \in K_{2n,s}} \|\varphi\|_{L_2} \geq cn^{-s} > cN^{-s},$$

имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^j h_1(t,\tau)}{\partial \tau^j} \right]^2 dt\, d\tau = N^{-2s} \|\varphi_0\|_{L_2}^{-2} \int_0^1 \left[\varphi_0^{(j)}(\tau) \right]^2 d\tau =$$

$$= N^{-2s} \left\| \varphi_0^{(j)} \right\|_{L_2}^2 \|\varphi_0\|_{L_2}^{-2} \leq N^{-2s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{2(s-j)/s} \left\| \varphi_0^{(s)} \right\|_{L_2}^{2j/s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-2} =$$

$$= N^{-2s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-2j/s} \leq cN^{-2(s-j)} \leq c, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Таким образом, при некотором наборе параметров γ выполняется включение $A_1 \in \overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}$.

Нетрудно убедиться, что $A_1^* A_1$ имеет собственную функцию $\beta\left(1 + \varphi_0(t) N^{-s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-1}\right)$, $\beta = \left(1 + N^{-2s}\right)^{-1/2}$, и соответствующее ей собственное значение $\lambda = 1 + N^{-2s}$. Тогда для любого $p > 0$ справедливо разложение

$$|A_1|^p x(t) = \beta^2 \lambda^{p/2} \left(x(\tau), 1 + \varphi_0(\tau) N^{-s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-1} \right) \left(1 + \varphi_0(t) N^{-s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-1} \right).$$

Пусть теперь f_1 таково, что уравнение (25) имеет точное решение $x_1(t) = |A_1|^p b_1(t)$. Нетрудно вычислить

$$x_1(t) = \beta^2 \lambda^{p/2} \left(1 + \varphi_0(t) N^{-s} \left\| \varphi_0 \right\|_{L_2}^{-1} \right),$$

$$f_1(t) = A_1 x_1(t) \equiv \beta^2 \lambda^{(p+2)/2}.$$

Рассмотрим еще одно уравнение

$$A_2 x(t) = f_2(t),$$

где

$$A_2 x(t) = \int_0^1 x(\tau) d\tau, \quad f_2(t) = A_2 |A_2|^p b_1(t) \equiv 1.$$

Отсюда для $x_2(t) = |A_2|^p b_1(t) \equiv 1$ получаем

$$\|x_1 - x_2\|_{L_2} \geq \beta^2 \lambda^{p/2} N^{-s} \geq \beta^2 N^{-s} \asymp N^{-s}. \tag{26}$$

Поскольку при любых действительных q и z, $|z| < 1$, справедливо разложение

$$(1+z)^q = 1 + \binom{q}{1} z + \binom{q}{2} z^2 + \ldots,$$

где биномиальные коэффициенты $\binom{q}{k}$ вычисляются по формуле

$$\binom{q}{k} = q(q-1)\dots(q-k+1)/k!,$$

то при $N \geq c\delta^{-1/2s}$

$$\| f_1 - f_2 \|_{L_2} = \beta^2 \lambda^{(p+2)/2} - 1 \leq \lambda^{(p+2)/2} - 1 \leq cN^{-2s} \leq c\delta. \tag{27}$$

Кроме того,

$$A_{1,\Omega,B} = A_{2,\Omega,B} = A_2,$$

т. е. при $f_{2,\delta} = f_1$ наборы функционалов (9) для уравнений $A_1 x = f_1$, $A_2 x = f_{2,\delta}$ совпадают. В силу последнего соотношения для любого $R_\alpha \in \mathcal{R}$ имеем

$$x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_1, f_1) = x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_1),$$

тогда с помощью (26) и (27) для произвольного $\varphi \in \Phi(\mathcal{R}, \Omega, B)$ находим

$$\begin{aligned}
cN^{-s} &\leq \| x_1 - x_2 \|_{L_2} \leq \| x_1 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_1, f_1) \|_{L_2} + \\
&\quad + \| x_2 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_1) \|_{L_2} \leq \\
&\leq \sup_{f_\delta :\, f_1 - f_\delta \in L_{2,\delta}} \| x_1 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_1, f_\delta) \|_{L_2} + \\
&\quad + \sup_{f_\delta :\, f_2 - f_\delta \in L_{2,\delta}} \| x_2 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_\delta) \|_{L_2} \leq \\
&\leq \sup_{f \in A_1 M_{p,\rho}(A_1)} \sup_{f_\delta :\, f - f_\delta \in L_{2,\delta}} \| x_0 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_1, f_\delta) \|_{L_2} + \\
&\quad + \sup_{f \in A_2 M_{p,\rho}(A_2)} \sup_{f_\delta :\, f - f_\delta \in L_{2,\delta}} \| x_0 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A_2, f_\delta) \|_{L_2} \leq \\
&\leq 2 \sup_{A \in \overline{\mathcal{H}}^{r,s}_{2,\gamma}} \sup_{f \in A M_{p,\rho}(A)} \sup_{f_\delta :\, f - f_\delta \in L_{2,\delta}} \| x_0 - x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A, f_\delta) \|_{L_2} \leq \\
&\leq c\varepsilon_{\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}^{r,s}_{2,\gamma}, \varphi, \Omega, B\right),
\end{aligned}$$

где $L_{2,\delta}$ — шар радиуса δ в пространстве L_2. Учитывая произвольность Ω, B и $R_\alpha \in \mathcal{R}$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 5. А. *Если* $1 < p \leq 2$, $r/s > 2/p$ *или* $p \geq 2$, $r/s > \dfrac{2p}{3p-2}$, *то при* $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]}$

$$r_{N,\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}^{r,s}_{2,\gamma}\right) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{p/(p+1)}.$$

Б. *Если* $1 < p \leq 2$, $r/s = 2/p$ *или* $p \geq 2$, $r/s = \dfrac{2p}{3p-2}$, *то при* $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]} \log 1/\delta$

$$c_1 N^{-s} \leq r_{N,\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}^{r,s}_{2,\gamma}\right) \leq c_2 N^{-s} \log^s N.$$

Указанный порядок величины $r_{N,\delta,p}$ *на классе* $\overline{\mathcal{H}}^{r,s}_{2,\gamma}$ *реализуется в рамках* *проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *в случае, когда параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 2.

Оценка снизу для величины $r_{N,\delta,p}$ найдена в теореме 4, а верхняя оценка непосредственно следует из теоремы 2 и следствия 2.

Замечание 4. Теорема 5 устанавливает наименьший объем $N = O\left(POW_\delta\left(\frac{p}{(p+1)s}\right)\right)$ галеркинской информации (9), достаточной для обеспечения на классах уравнений (1), $A \in \overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}$, $f \in AM_{p,\rho}(A)$, оптимального порядка точности (8) при естественных соотношениях между p, r и s. В то же время из теоремы 4 следует, что в случае, когда N имеет меньший порядок, максимальная точность $O\left(\delta^{p/(p+1)}\right)$ не может быть гарантирована ни при каких $p, r, s > 0$.

Теорема 6. *Если* $p \geq 2$, *то при* $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]}$

$$r_{N,\delta,p}\left(\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{p/(p+1)}, \qquad r/s > p/(p-1),$$

а при $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]} \log 1/\delta$

$$c_1 N^{-s} \leq r_{N,\delta,p}\left(\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \leq c_2 N^{-s} \log^s N, \qquad r/s = p/(p-1).$$

Указанный порядок величины $r_{N,\delta,p}$ *на классе* $\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}$ *реализуется в рамках проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *в случае, когда параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 3.

Для получения нижней оценки достаточно повторить рассуждения из доказательства теоремы 4, а верхняя оценка находится с помощью теоремы 3 и следствия 3.

6. В заключительном пункте на ряде классов интегральных уравнений I рода будут найдены точные порядки информационной сложности $C_{N,\delta,p}$ проекционных методов.

Замечание 5. Как видно из теорем 4, 5, оптимальный порядок $r_{N,\delta,p}$ удается получить лишь в тех случаях, когда общий объем N галеркинской информации не превышает по порядку $n2^{bn}$ (см. также теоремы 2, 3). Таким образом, в силу определения величин $r_{N,\delta,p}$ и $C_{N,\delta,p}$, а также отношения (11) для нахождения информационной сложности необходим проекционный метод, требующий для построения приближенного решения тот же по порядку объем элементарных операций (э. о.), что и число единиц дискретной информации.

Теорема 7. А. *Если параметры* p, r *и* s *таковы, что точка* $(p, r/s)$ *принадлежит множеству*

$$(1,2] \times (4/p, \infty) \cup [2,6] \times \left(\frac{2p}{3p-4}, \infty\right) \cup (6,\infty) \times [3/2, \infty),$$

то при $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]}$

$$C_{N,\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{p/(p+1)}.$$

Б. *Если* $1 < p \leq 2$, $r/s = 4/p$ *или* $2 \leq p \leq 6$, $r/s = 2p/(3p-4)$, *то при* $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]} \log 1/\delta$

$$c_1 N^{-s} \leq C_{N,\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \leq c_2 N^{-s} \log^s N.$$

Указанный порядок информационной сложности на классе $\overline{\mathcal{H}}_{2,\gamma}^{r,s}$ *реализует* *обобщенный метод Тихонова* (7), *построенный на базе проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *при условии, что параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 2.

Доказательство. Предположим, что p — четное число, $T_0 = \{1\}$, $T_m = \{2^{m-1}+1, 2^{m-1}+2, \ldots, 2^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{card}(T_0) = 1$, $\operatorname{card}(T_m) = 2^{m-1}$. Решение x_{disc} будем искать согласно обобщенному методу Тихонова (7) из уравнения

$$\alpha^{p/2} x_{\text{disc}} + \left(A_n^* A_n\right)^{p/2} x_{\text{disc}} = \left(A_n^* A_n\right)^{p/2-1} A_n^* f_\delta, \tag{28}$$

где оператор $A_n = A_{a,b,n}$ определяется соотношением (12), а параметры a, b и n выбраны согласно теореме 2. Как и в [4], представим x_{disc} в следующем виде:

$$x_{\text{disc}} = \sum_{i=1}^{2^n} x_i \psi_i, \tag{29}$$

где

$$\psi_i = \begin{cases} P_{2^{bn}} A^* e_1, & i = 1; \\ P_{2^{bn-a\nu}} A^* e_i, & i \in T_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$A_n^* A_n \psi_j = \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-ak}} A^* \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{bn-ak}} \psi_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-ak}} A^* \sum_{i \in T_k} e_i \left(e_i, A P_{2^{bn-ak}} \psi_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in T_k} P_{2^{bn-ak}} A^* e_i \left(P_{2^{bn-ak}} A^* e_i, \psi_j\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \psi_i \left(\psi_i, \psi_j\right).$$

Тогда с учетом (29) имеем

$$A_n^* A_n x_{\text{disc}} = A_n^* A_n \left(\sum_{j=1}^{2^n} x_i \psi_j\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \psi_i \sum_{j=1}^{2^n} x_j a_{i,j}^{(0)}, \qquad a_{i,j}^{(0)} = \left(\psi_i, \psi_j\right).$$

Отсюда следует, что для построения $A_n^* A_n x_{\text{disc}}$ требуется $O(2^{2n})$ э. о., если коэффициенты $\left(\psi_i, \psi_j\right)$ и x_j известны. Аналогично находим

$$A_n^* f_\delta = \sum_{i=1}^{2^n} \psi_i f_i^{(1)}, \qquad f_i^{(1)} = \left(e_i, f_\delta\right).$$

Далее, вычисление коэффициентов $a_{i,j}^{(1)} = \sum_{l=1}^{2^n} \left(\psi_i, \psi_l\right)\left(\psi_l, \psi_j\right)$ агрегата

$$\left(A_n^* A_n\right)^2 x_{\text{disc}} = \sum_{i=1}^{2^n} \psi_i \sum_{j=1}^{2^n} x_j a_{i,j}^{(1)}$$

требует $O(2^{3n})$ э. о. Таким образом, для построения уравнения (28) при $p = 2$ необходимо $N_1 = O(2^{3n})$ э. о. Нетрудно проверить, что с увеличением $p = 4$, 6, ... порядок величины N_1 не изменяется. Неизвестные коэффициенты x_i в представлении (29) будем определять из системы линейных уравнений

$$\alpha^{p/2}x_i + \sum_{j=1}^{2^n} a_{i,j}^{(p/2)}x_j = f_i^{(p/2)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^n, \tag{30}$$

где значения $a_{i,j}^{(p/2)}$ и $f_i^{(p/2)}$ находим согласно рекуррентным формулам

$$a_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=1}^{2^n} (\psi_i, \psi_k)a_{k,j}^{(l-1)}, \qquad f_i^{(l)} = \sum_{k=1}^{2^n} (\psi_i, \psi_k)f_k^{(l-1)},$$

$$l = 2, \dots, p/2.$$

Чтобы решить систему (30), например, методом Гаусса, необходимо выполнить еще $N_2 \asymp 2^{3n}$ э. о. над коэффициентами $a_{i,j}^{(p/2)}$ и $f_i^{(p/2)}$.

Оценим теперь число операций, требуемых для вычисления коэффициентов (ψ_i, ψ_j), $i, j = 1, 2, \dots, 2^n$. Прежде всего отметим, что в силу свойств скалярного произведения достаточно найти лишь (ψ_i, ψ_j) при $i \le j$ или при $k \le \nu$, если $i \in T_k$, $j \in T_\nu$. Поскольку

$$(\psi_i, \psi_j) = \left(P_{2^{bn-ak}}A^*e_i, P_{2^{bn-a\nu}}A^*e_j\right) =$$

$$= \left(e_i, AP_{2^{bn-a\nu}}A^*e_j\right) = \sum_{m=1}^{2^{bn-a\nu}} (e_i, Ae_m)(e_j, Ae_m),$$

то для определения каждого коэффициента (ψ_i, ψ_j) нужно выполнить $2^{bn-a\nu+1}-1$ э. о. над коэффициентами (e_i, Ae_j). Для нахождения всех коэффициентов (ψ_i, ψ_j), $i \in T_k$, $j \in T_\nu$, при фиксированных k и ν требуется $O\left(\mathrm{card}(T_\nu)\mathrm{card}(T_k)(2^{bn-a\nu+1}-1)\right)$ э. о. Наконец, при всех k и ν таких, что k, $\nu = 0, 1, \dots, n$, $k \le \nu$, для вычисления (ψ_i, ψ_j), $i \in T_k$, $j \in T_\nu$, достаточно выполнить не более N_3 э. о., где

$$N_3 \asymp \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu} \mathrm{card}(T_\nu)\mathrm{card}(T_k)(2^{bn-a\nu+1}-1) \asymp$$

$$\asymp 2^{bn}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{(1-a)\nu}\sum_{k=0}^{\nu} 2^k \asymp 2^{bn}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{(2-a)\nu}.$$

Поскольку для всех рассматриваемых в теореме ситуаций справедливо соотношение $a \ge 2$ (см. теорему 2), то полученное выше выражение не превышает $O(n2^{bn})$.

Теперь вернемся от представления решения в виде (29) к стандартной форме многочлена в базисе E:

$$x_{\mathrm{disc}} = \sum_{i=1}^{2^n} x_i\psi_i = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i \in T_\nu} x_iP_{2^{bn-a\nu}}A^*e_i + x_1P_{2^{bn}}A^*e_1 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{2^{bn-a\nu}} e_\mu \sum_{i \in T_\nu} x_i(e_i, Ae_\mu) + \sum_{\mu=1}^{2^{bn}} x_1e_\mu(e_1, Ae_\mu) = \sum_{\xi=1}^{2^{bn}} d_\xi e_\xi,$$

где

$$d_\xi = \sum_{i=1}^{2^\eta} x_i\left(e_i, Ae_\xi\right),$$

а η такое, что $\xi \leq 2^{bn-a\eta}$, т. е. $2^\eta \leq \left(2^{bn}/\xi\right)^{1/a}$. Следовательно, для вычисления d_ξ, $\xi = 1, 2, \ldots, 2^{bn}$, требуется э. о.

$$N_4 \asymp \sum_{\xi=1}^{2^{bn}} \sum_{i=1}^{2^\eta} 1 \leq c(2^{bn})^{1/a} \sum_{\xi=1}^{2^{bn}} \xi^{-1/a} \asymp 2^{bn}.$$

Таким образом, для $p = 2, 4, \ldots$ получаем общее число э. о.

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \asymp 2^{3n} + \begin{cases} n2^{bn}, & a = 2; \\ 2^{bn}, & a > 2. \end{cases} \tag{31}$$

В случае произвольного $p > 1$ в качестве q достаточно взять ближайшее сверху к $p/2 - 1$ целое число и использовать обобщенный метод Тихонова (7).

В силу замечания 5 справедливость теоремы следует из (11), (31) и теоремы 4.

Аналогично устанавливается такая теорема.

Теорема 8. *Если* $p \geq 2$, *то при* $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]}$

$$C_{N,\delta,p}\left(\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \asymp N^{-s} \asymp \delta^{p/(p+1)}, \quad r/s > \frac{2p}{p-1},$$

а при $N \asymp \delta^{-p/[(p+1)s]} \log 1/\delta$ *и* $r/s = \dfrac{2p}{p-1}$

$$c_1 N^{-s} \leq C_{N,\delta,p}\left(\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}\right) \leq c_2 N^{-s} \log^s N.$$

Указанный порядок информационной сложности на классе $\mathcal{H}_{2,\gamma}^{r,s}$ *реализует обобщенный метод Тихонова* (7), *построенный на базе проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *при условии, что параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 3.

1. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 699–711.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Pereverzev S.* Optimization of projection methods for solving *Ill*-posed problems // Computing. – 1995. – **55**, № 2. – P. 113–124.

Получено 23.12.96