УДК 519.21

В. К. Ясинський, Г. І. Готинчан (Чернівец. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

We obtain conditions of the asymptotic stability on the whole of solutions of stochastic functional-differential equations with the Poisson switchings.

Одержано умови асимптотичної стійкості в цілому розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з пуассонівськими перемиканнями.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ і потоці σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0, \mathcal{F}_t \subset \subset \mathcal{F}\}$ задано випадковий процес $\{x(t), t \geq 0\} \subset \boldsymbol{R}^n$ стохастичним диференціально-функціональним рівнянням (СДФР)

$$dx(t) = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw(t) + \int_U c(t, x_t, u)\tilde{\nu}(du, dt), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

при початковій умові

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \qquad \theta \in [-h, 0]. \tag{2}$$

Тут $\{w(t): t \in [0, T]\}$ — n-вимірний вінерівський процес; $\{\tilde{\nu}(du, dt), t \in \in [0, T], u \in \boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{R}^n\}$ — центрована пуассонівська міра з параметром $\Pi(du)\,dt$, причому $\varphi(\theta)$ не залежить від $\Re_0(dw) \cup \Re_0(\tilde{\nu})$, де $\Re_0(dw)$ та $\Re_0(\tilde{\nu})$ — σ-алгебри, які побудовані за приростами за часом t на інтервалі $[0, T]$; відображення $a: [0, T] \times \boldsymbol{D}_n \to \boldsymbol{R}^n$; $b: [0, T] \times \boldsymbol{D}_n \to \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$; $c: [0, T] \times \boldsymbol{D}_n \times \times \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{R}^n$; a, b, c — вимірні за сукупністю змінних; $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in \in [-h, 0]\}$; $\boldsymbol{D}_n$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\{\varphi(\theta): \theta \in \in [-h, 0]\} \subset \boldsymbol{R}^n$, які мають лівосторонні границі.

Розглянемо у $\boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ крім норми Скорохода рівномірну норму [1]

$$\|\varphi\| := \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|,$$

а також норму [2]

$$\|\varphi\|_0^2 := |\varphi(0)|^2 + \int_{-h}^{0} |\varphi(\theta)|^2 d\theta. \tag{3}$$

Простір Скорохода $\boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ з нормою (3) позначимо через $\boldsymbol{D}^0([-h, 0])$. СДФР (1), (2) визначає стохастичний неперервний феллерівський марковський процес із значенням у $\boldsymbol{D}^0$ та з перехідною ймовірністю

$$p(s, \varphi, t, A) := P\{x_t(s, \varphi) \in A\}, \tag{4}$$

де $A \in Y$ — σ-алгебра борелівських підмножин простору $\boldsymbol{D}^0$, $t \geq s$, $s \geq 0$, $\varphi \in \in \boldsymbol{D}^0$ [3].

Верхній слабкий інфінітезимальний оператор L^+ марковського процесу, що є розв'язком СДФР (1), (2) у просторі $\boldsymbol{D}^0$, визначимо рівністю

$$(L^+ v)(s, \varphi) := \lim_{\Delta \to 0} \sup_{0 < \tau \le \Delta} \frac{1}{\tau} [\mathrm{E}\{v(s+\tau, x_{s+\tau}(s, \varphi))\} - v(s, \varphi)] \tag{5}$$

для довільного $s \ge 0$ та $\varphi \in \boldsymbol{D}^0$, де $v\colon [0, T] \times \boldsymbol{D}^0 \to \boldsymbol{R}^1$. Це будемо записувати так: $v \in D(L^+)$. Нехай a, b, c задовольняють умову $a(t, 0) = b(t, 0) = c(t, 0, u) \equiv 0$, $t \ge 0$; посилену локальну умову Ліпшіца для довільних $\varphi, \psi \in S_\tau^{(\beta)}$, $\tau > 0$, $S_\tau^{(\beta)} := \left\{ \varphi \in \boldsymbol{D}_n \,\middle|\, \int_{-h}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 \beta(d\theta) < \tau \right\}$, та довільного $t \ge 0$

$$|a(t, \varphi) - a(t, \psi)|^2 + |b(t, \varphi) - b(t, \psi)|^2 + \int_U |c(t, \varphi, u) - c(t, \psi, u)|^2 \, \Pi(du) \le$$

$$\le L_r \int_{-h}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 \beta(d\theta), \tag{6}$$

де β — міра на $[-h, 0]$ одиничної варіації.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) a, b, c *неперервні за сукупністю змінних та при кожному* $t > 0$, *задовольняють умову Ліпшіца* (6). *Якщо існує функціонал Ляпунова–Красовського* $v \in D(L^+)$, *який задовольняє при деяких додатних* k_1, k_2, $p > 0$ *та довільних* $s \ge 0$, $\varphi \in \boldsymbol{D}_n$ *нерівності*

$$|\varphi(0)|^p \le v(s, \varphi) \le k_2 \|\varphi\|^p, \tag{7}$$

$$(L^+ v)(s, \varphi) \le -k_1 \|\varphi\|^p, \tag{8}$$

то тривіальний розв'язок (1), (2) *асимптотично стохастично стійкий в цілому.*

Доведення. До моменту першого виходу τ_r розв'язку $\{x(t, s, \varphi)\}$ при $\varphi \in S_r$ з кулі S_r завдяки формулі Динкіна [4] виконується нерівність

$$\mathrm{E}\{v(\tau_r(t), x_{\tau_r(t)}(s, \varphi))\} \le v(s, \varphi) - k_1 \mathrm{E}\left\{ \int_s^{\tau_r(t)} \|x_\xi(s, \varphi)\|^p \, d\xi \right\}. \tag{9}$$

Враховуючи (8), отримуємо

$$P(\{t \ge \tau_r\}) = P(\{\tau_r(t) = \tau_r\}) \le$$

$$\le P(\{v(\tau_r(t), x_{\tau_r(t)}(s, \varphi)) > r^p\} \le \frac{v(s, \varphi)}{r^p},$$

тоді

$$\lim_{r \to \infty} \tau_r = +\infty,$$

тобто розв'язок $\{x(t, s, \varphi)\}$ регулярний. А це означає, що і рівняння (1) регулярне внаслідок того, що $s \in \boldsymbol{R}_+$ і $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ вибрані довільним чином. Згідно з цим в (9) замість $\tau_r(t)$ покладемо t і тоді при будь-яких $t \ge t_1 \ge s \ge 0$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\{v(t, x_t(s, \varphi)) / \mathfrak{R}^{t_1}\} =$$

$$= \mathrm{E}\{v(t_1 + (t - t_1), x_{t_1 + (t - t_1)}(t_1, x_{t_1}(s, \varphi))) / \mathfrak{R}^{t_1}\} =$$

$$= \mathrm{E}\left\{ v(t_1 + (t - t_1), x_{t_1 + (t - t_1)}(t_1, \psi)) \big|_{\psi = x_{t_1}(s, \varphi)} \right\} \le$$

$$\le v(t_1, x_{t_1}(s, \varphi)) - k_1 \int_{t_1}^{t} \|x_{t_1}(s, \varphi)\|^p \, dt_1 . \tag{10}$$

Далі при всіх $t \ge t_1 \ge s \ge 0$ з урахуванням (7) одержуємо

$$\mathrm{E}\{ v(t, x_t(s, \varphi)) \} \le \mathrm{E}\{ v(t_1, x_{t_1}(s, \varphi)) \} - \frac{k_1}{k_2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{E}\{ v(\theta, x_\theta(s, \varphi)) \} \, d\theta ,$$

і тому

$$\mathrm{E}\{ |x(t, s, \varphi)|^p \} \le \mathrm{E}\{ v(t, x_t(s, \varphi)) \} \le$$

$$\le v(s, \varphi) \, e^{-k_1 (t - s)/k_2} \le k_1 \|\varphi\|^p e^{-k_1 (t - s)/k_2}. \tag{11}$$

Із нерівності (10) маємо, що $\{ v(t, x_t(s, \varphi)) \}$ є невід'ємним неперервним супермартингалом відносно сім'ї σ-алгебр $\{ \mathfrak{R}^t, \ t \ge s \}$. А це означає, що з імовірністю одиниця існує границя [4]

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \, |x(t, s, \varphi)|^p \le \lim_{t \to \infty} v(t, x_t(s, \varphi))$$

та при $T \ge s$ і $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\left\{ \sup_{t \ge T} |x(t, s, \varphi)| \ge \varepsilon \right\} \le P\left\{ \sup_{t \ge T} v(t, x_t(s, \varphi)) \ge \varepsilon^p \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^p} v(T, x_T(s, \varphi)) . \tag{12}$$

Звідси при всіх $t \ge s$

$$P\left\{ \sup_{t \ge T} |x(t, s, \varphi)| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{k_2}{\varepsilon} \|\varphi\|^p$$

і стохастична стійкість доведена. Теорему 1 доведено.

Лема 1. *Якщо* $\{ a(t, \varphi) \}$, $\{ b(t, \varphi) \}$, $\{ c(t, \varphi, u) \}$ — *неперервні за сукупністю змінних і задовольняють умову Ліпшіца* (6), *то при всіх* $s \in \boldsymbol{R}_+$, $\Delta \in [0, h]$, $\varphi \in G^s$ *та* $t \ge s + h$ *виконується нерівність*

$$\|x_t(s, \varphi)\|_2^2 \le c_1 \mathrm{E}\left\{ \sup_{-h \le \theta \le -\Delta} |x(t + \theta, s, \varphi)|^2 \right\} + c_2 \int_{t - \Delta}^{t} \|x_\tau(s, \varphi)\|_1^2 \, d\tau , \tag{13}$$

де

$$\|\varphi\|_1^2 := \sup_{-h \le \theta \le 0} \left(\mathrm{E}\{ |\varphi(\theta)|^2 \} \right), \qquad \|\varphi\|_2^2 := \mathrm{E}\{ \|\varphi\|^2 \} .$$

Доведення. Запишемо рівняння (1) в інтегральному вигляді в момент часу $t + \theta$ і $t - \Delta$ і, віднявши від першого друге, при $\theta \in [-h, 0]$ одержимо

$$x(t + \theta, s, \varphi) = x(t - \Delta, s, \varphi) + \int_{t - \Delta}^{t + \theta} a(\tau, x_\tau(s, \varphi)) \, d\tau +$$

$$+ \int_{t-\Delta}^{t+\theta} b(\tau, x_\tau(s, \varphi))\, dw(\tau) + \int_{t-\Delta}^{t+\theta} \int_U c(\tau, x_\tau(s, \varphi), u)\, \tilde{\nu}(d\tau, du).$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини отриманої рівності й перейдемо до математичного сподівання максимуму двох частин по $\theta \in [-h, 0]$ з урахуванням (2):

$$\mathrm{E}\{\|x_t(s, \varphi)\|^2\} \le 4\,\mathrm{E}\left\{\sup_{-h \le \theta \le -\Delta} |x(t+\theta, s, \varphi)|^2\right\} +$$

$$+ 16(\Delta + 1) L \int_{t-\Delta}^{t} \int_{-h}^{0} \mathrm{E}\{|x_\tau(\tau+\theta, s, \varphi)|^2 \beta(d\theta)\, d\tau \le$$

$$\le c_1\, \mathrm{E}\left\{\sup_{-h \le \theta \le -\Delta} |x(t+\theta, s, \varphi)|^2\right\} + c_2 \int_{t-\Delta}^{t} \|x_\tau(s, \varphi)\|_1^2\, d\tau,$$

де $c_1 = L$; $c_2 = 16(\Delta + 1)$. Звідси й випливає твердження леми.

Зауважимо, що при $t \ge s + h$ нерівність (13) можна записати у вигляді

$$\|x_t(s, \varphi)\|_2^2 \le c_1 \|x_t(s, \varphi)\|_1^2 + c_2 \int_{t-h}^{t} \|x_\tau(s, \varphi)\|_1^2\, d\tau. \tag{14}$$

***Наслідок* 1.** *Нехай*:

1) *коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови леми* 1;

2) *існує такий функціонал Ляпунова – Красовського* $v \in D(L^+)$, *що при* $p = 2$ *виконується нерівність* (7) *і*

$$(L^+ v)(s, \varphi) \le -k_1 |\varphi(0)|_0^2. \tag{15}$$

Тоді тривіальний розв'язок (1) *асимптотично p-стійкий в цілому.*

Доведення. Із доведення теореми 1 випливає нерівність

$$\sup_{t \ge s} \mathrm{E}\{|x(t, s, \varphi)|^2\} \le v(s, \varphi) \le k_2 \|\varphi\|^2$$

при всіх $s \in \boldsymbol{R}_+$, $\varphi \in \boldsymbol{D}_n$, а це означає 2-стійкість тривіального розв'язку (1). Скориставшись узагальненою формулою Іто [3]

$$dg(t, x(t)) = (L^0 g)(t, x(t)) + ((\nabla g)(t, x(t))\, b(t, x_t))\, dw(t) +$$

$$+ \int_U [g(t, x(t) + c_t(t, x_t, u)) - g(t, x(t))]\, \tilde{\nu}(du, dt),$$

де

$$(L^0 g)(t, x(t)) = \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial t} + ((\nabla g)(t, x(t)), a(t, x_t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathrm{Sp}((\nabla^2 g)(t, x(t)), b(t, x_t) b^T(t, x_t)) +$$

$$+ \int_U [g(t, x(t) + c(t, x_t, u)) - g(t, x(t)) - ((\nabla g)(t, x(t)), c(t, x_t, u))]\, \Pi(du),$$

∇g — вектор, компоненти якого дорівнюють g'_{x_k}; $\nabla^2 g$ — матриця з елементами $g''_{x_j x_k}$; $\operatorname{Sp} A$ — слід матриці A ; b^T — транспонована матриця, легко одержати оцінку

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}\{|x(t,s,\varphi)|^2\} \le c_3 k_2 \|\varphi\|^2 \tag{16}$$

при довільних $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h,0])$ і $t \ge s \ge 0$. Нерівність (9) можна записати у вигляді

$$\mathrm{E}\{v(t, x_t(s,\varphi))\} \le v(s,\varphi) - k_1 \int_0^t \mathrm{E}\{|x(\tau+s,s,\varphi)|^2\}\,d\tau .$$

Звідси доводиться збіжність інтеграла [4]

$$\int_0^\infty \mathrm{E}\{|x(t,s,\varphi)|^2\}\,dt .$$

Згідно з цим, використовуючи (16), маємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\{|x(t,s,\varphi)|^2\} = 0,$$

а це означає, що із нерівності (13) отримуємо твердження наслідку.

Розглянемо автономне рівняння

$$dx(t) = a(x_t)dt + b(x_t)dw(t) + \int_U c(x_t,u)\,\tilde{\nu}(dt,du) . \tag{17}$$

Лема 2. *Якщо* $\{a(\varphi)\}$, $\{b(\varphi)\}$, $\{c(\varphi,u)\}$ *— лінійні неперервні відображення* $\boldsymbol{D}_n([-h,0])$ *в* $\boldsymbol{R}^n$, *то з асимптотичної* p*-стійкості* $(p>0)$ *тривіального розв'язку* (17) *випливає його експоненціальна* p*-стійкість в цілому.*

Доведення. Перш за все покажемо, що в умовах леми 2 тривіальний розв'язок асимптотично p-стійкий в цілому. Нехай $\varepsilon = 1$ і $\delta(1)$ — число, яке входить в означення p-стійкості. Тоді для всіх $\varphi \in S_{\delta(1)}$ та $t \ge s \ge 0$ виконується обмеження

$$\mathrm{E}\{\|x_t(s,\varphi)\|^2\} \le 1 ,$$

оскільки рівняння (17) автономне. Але внаслідок лінійності коефіцієнтів рівняння (17) при довільному $\varphi \ne 0$ $(\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h,0]))$ можна покласти $\psi = \dfrac{\delta(1)}{\|\varphi\|}\varphi \in S_{\delta(1)}$. Тоді

$$\mathrm{E}\{\|x_t(s,\varphi)\|^p\} = \frac{(\delta(1))^p}{\|\varphi\|^p}\mathrm{E}\{\|x_t(s,\varphi)\|^p\} ,$$

тобто всі розв'язки прямують до нуля при $t\to\infty$ і, крім того, при всіх $t \ge s \ge 0$

$$\mathrm{E}\{\|x_t(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{1}{(\delta(1))^p}\|\varphi\|^p. \tag{18}$$

Тепер скористаємося прямуванням $\mathrm{E}\{\|x_t(s,\varphi)\|^p\}$ до нуля при $t\to\infty$ і аналогічно (18), використовуючи автономність $\{a(\varphi)\}$, $\{b(\varphi)\}$, $\{c(\varphi,u)\}$, при досить великому $T > h$ і всіх $s \ge 0$ запишемо нерівність

$$\mathrm{E}\{\|x_{s+T}(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|^p.$$

На основі марковської властивості розв'язків рівняння (17) [4] з попередньої нерівності і нерівності (18) маємо

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{E}\{\|x_{t+T+s}(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{1}{(\delta(1))^p}\mathrm{E}\{\|x_{s+T}(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{1}{2(\delta(1))^p}\|\varphi\|^p.$$

Аналогічно при будь-якому $k\in\mathbb{N}$

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{E}\{\|x_{t+kT+s}(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{1}{(\delta(1))^p}\mathrm{E}\{\|x_{s+kT}(s,\varphi)\|^p\} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{2}{(\delta(1))^p}\|\varphi\|^p,$$

і згідно з цим при довільних $t\ge 0$, $s\ge 0$ та $\varphi\in \boldsymbol{D}_n([-h,0])$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\{\|x_{t+s}(s,\varphi)\|^p\} \le \frac{2}{(\delta(1))^p}e^{-t\ln 2/T}\|\varphi\|^p.$$

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Якщо* $\{a(\varphi)\}$, $\{b(\varphi)\}$, $\{c(\varphi,u)\}$ — *лінійні неперервні відображення і тривіальний розв'язок* (17) *асимптотично стохастично стійкий, то він експоненціально* p-*стійкий в цілому при всіх достатньо малих* $p>0$.

Доведення. За лемою 2 досить довести, що тривіальний розв'язок (17) асимптотично p-стійкий при всіх достатньо малих $p>0$. Використовуючи означення асимптотичної стохастичної стійкості [4]

$$\lim_{T\to\infty} p\left(\left\{\sup_{t\ge T}|x(t,s,\varphi)|\ge\varepsilon\right\}\right) = 0 \tag{19}$$

для будь-яких $s\ge 0$, $\varepsilon>0$ і $\varphi\in S_\delta$ і лінійність по φ оператора зсуву на розв'язках (17), при деякому $\alpha>0$ і всіх $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ легко одержати

$$\sup_{\|\varphi\|\le 2^{k\alpha}} P\left(\left\{\sup_{t\ge 0}\|x_{s+t}(s,\varphi)\|\ge 2^{\alpha(k+1)}\right\}\right) \le \frac{1}{2} \tag{20}$$

рівномірно відносно $s\ge 0$. При відсутності стрибків другого роду внаслідок строгої марковської властивості розв'язку рівняння маємо [2]

$$\sup_{\|\varphi\|\le 1} P\left(\left\{\sup_{t\ge 0}\|x_{s+t}(s,\varphi)\|\ge 2^{2\alpha}\right\}\right) =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|\le 1} P\left(\left\{\sup_{t\ge 0}\|x_{t+\tau_{2^\alpha}}(\tau_{2^\alpha}, x_{\tau_{2^\alpha}}(s,\varphi))\|\ge 2^{2^\alpha},\ \tau_{2^\alpha}<\infty\right\}\right) =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|\le 1}\mathrm{E}\left\{P\left(\left\{\sup_{t\ge 0}\|x_{t+\tau_{2^\alpha}}(\tau_{2^\alpha},\psi))\|\ge 2^{2^\alpha}\right\}\right)\Bigg|_{\psi = x_{\tau_{2^\alpha}}(s,\varphi)}\right\} P(\{\tau_{2^\alpha}<\infty\}) \le$$

$$\le \sup_{\|\varphi\|\le 1}(\{\tau_{2^\alpha}\le\infty\}) \sup_{\|\psi\|\le 2^\alpha} P\left(\left\{\sup_{t\ge 0}\|x_t(0,\psi)\|>2^{2^\alpha}\right\}\right),$$

де τ_{2^α} — перший момент виходу із S_{2^α}. Внаслідок вибору α виконується нерівність

$$P(\{\tau_{2^\alpha} < \infty\}) \le \sup_{\|\varphi\| \le 1} P\left(\left\{\sup_{t \ge 0} \|x_{t+s}(s, \varphi)\| \ge 2^\alpha\right\}\right) \le \frac{1}{2},$$

звідки при довільному $\varphi \in S_1$

$$P\left(\left\{\sup_{t \ge 0} \|x_{t+s}(s, \varphi)\| \ge 2^{2^\alpha}\right\}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

За індукцією легко отримати нерівність

$$\sup_{\|\varphi\| \le 1} P\left(\left\{\sup_{t \ge 0} \|x_{s+t}(s, \varphi)\| \ge 2^{k\alpha}\right\}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Згідно з цим при $\varphi \ne 0$ і $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ маємо нерівність

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{t \ge 0} \|x_{s+t}(s, \varphi)\|^p\right\} = \|\varphi\|^p \,\mathrm{E}\left\{\sup_{t \ge 0} \left\| x_{s+t}\left(s, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right)\right\|^p\right\} \le$$

$$\le \|\varphi\|^p \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha} \sup_{\|\psi\| \le 1} P\left(\left\{\sup_{t \ge 0} \|x_{s+t}(s, \psi)\| \ge 2^{\alpha(k-1)}\right\}\right) + \|\varphi\|^p \le$$

$$\le \|\varphi\|^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha p - 1) + 1}\right) =: K(p)\, \|\varphi\|^p. \tag{21}$$

Звідси випливає p-стійкість тривіального розв'язку рівняння (17).

Для доведення асимптотичної p-стійкості скористаємося теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла і на підставі нерівності (21) та прямування розв'язків рівняння (17) за ймовірністю до нуля при $t \to \infty$ запишемо

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{E}\{\|x_{t+s}(s, \varphi)\|^p\} = \mathrm{E}\left\{p \lim_{t \to \infty} \|x_{t+s}(s, \varphi)\|^p\right\} = 0,$$

а це і доводить твердження леми.

Розглянемо наступне рівняння при постійних випадкових збуреннях рівняння (17):

$$dy(t) = [a(y_t) + a_1(t, y_t)]dt + [b(y_t) + b_1(t, y_t)]dw(t) +$$

$$+ \int_U [c(y_t, u) + c_1(t, y_t, u)]\, \tilde{\nu}(du, dt). \tag{22}$$

Лема 4. *Якщо* $\{a(\varphi)\}$, $\{b(\varphi)\}$, $\{c(\varphi, u)\}$ *— лінійні неперервні відображення,* $\{a_1(t, \varphi)\}$, $\{b_1(t, \varphi)\}$, $\{c_1(t, \varphi, u)\}$ *— неперервні за сукупністю змінних і задовольняють умову Ліпшіца* (6) *з константою* $L \ge 0$, *а нуль є розв'язком* (22) *при всіх* $t \ge 0$, *то при всіх* $T \ge 0$, $s \ge 0$ *і* $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ *виконується нерівність*

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathrm{E}\{\|x_t(s, \varphi) - y_t(s, \varphi)\|^2\} \le LQ(T, L)\, \|\varphi\|^2, \tag{23}$$

де L *— константа Ліпшіца з* (6); $Q(T, L)$ *— деяка стала, яка не залежить від* $s \in \boldsymbol{R}_+$ *і* $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$.

Доведення. Легко бачити, що виконується інтегральне співвідношення

$$x(t, s, \varphi) - y(t, s, \varphi) = \int_s^t [a(x_\tau(s, \varphi) - y_\tau(s, \varphi))]\,d\tau \; +$$

$$+ \int_s^t [b(x_\tau(s, \varphi) - y_\tau(s, \varphi))]\,dw(t) \; +$$

$$+ \int_s^t \int_U [c(x_\tau(s, \varphi) - y_\tau(s, \varphi), u)]\,\tilde{\nu}(du, d\tau) \; +$$

$$+ \int_s^t [a_1(\tau, x_\tau(s, \varphi)) - a_1(\tau, y_\tau(s, \varphi))]\,d\tau \; +$$

$$+ \int_s^t [b_1(\tau, x_\tau(s, \varphi)) - b_1(\tau, y_\tau(s, \varphi))]\,dw(\tau) \; +$$

$$+ \int_s^t \int_U [c_1(\tau, x_\tau(s, \varphi), u) - c_1(\tau, y_\tau(s, \varphi), u)]\,\tilde{\nu}(du, d\tau) \; -$$

$$- \int_s^t a_1(\tau, x_\tau(s, \varphi))\,d\tau - \int_s^t b_1(\tau, x_\tau(s, \varphi))\,dw(\tau) \; -$$

$$- \int_s^t \int_U c_1(\tau, x_\tau(s, \varphi), u)\,\tilde{\nu}(du, d\tau).$$

Оскільки для розв'язків рівняння (17) виконується нерівність

$$\mathrm{E}\{\|x_t(s, \varphi)\|^2\} \le \tilde{M} e^{\gamma(t-s)} \|\varphi\|^2 \tag{24}$$

при деяких $\tilde{M} > 0$ і $\gamma > 0$, то з умови Ліпшіца (6) випливає оцінка

$$\mathrm{E}\left\{ \sup_{s \le t \le T+s} |x(t, s, \varphi) - y(t, s, \varphi)|^2 \right\} \le 12 \Bigg\{ (T\|a\|^2 + 4\|b\|^2 + 6\|c\|^2 \; +$$

$$+ \; L(T+4)) \int_s^t \mathrm{E}\left\{ \sup_{s \le \theta \le \tau} |x(\theta, s, \varphi) - y(\theta, s, \varphi)|^2 \right\} d\tau + L(T+4))\,T \tilde{M} e^{\gamma T} \|\varphi\|^2 \Bigg\}.$$

Для доведення леми 4 залишилось скористатися нерівністю Гронуолла [4], що й доводить твердження леми.

З нерівності (23) легко одержати такий наслідок.

Наслідок 2. *В умовах леми* 4 *для довільного* $p \in (0, 2]$ *виконується нерівність*

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathrm{E}\{\|x_{t+s}(s, \varphi) - y_{t+s}(s, \varphi)\|^p\} \le L^p (Q(T, L))^p \|\varphi\|^p \tag{25}$$

для будь-якого $s \ge 0$, $T \ge 0$ *та* $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми* 4. *Якщо тривіальний розв'язок рівняння* (17) *асимптотично стохастично стійкий, то існує таке* $\varepsilon > 0$, *що при всіх* $L \in [0, \varepsilon)$ *тривіальний розв'язок рівняння* (22) *асимптотично стохастично стійкий в цілому.*

Доведення. Перш за все встановимо, що існують такі $\varepsilon > 0$, $p > 0$, $T > 0$, що при довільних $s \geq 0$, $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ і $L \in [0, \varepsilon])$ виконується нерівність

$$E\{\|y_{s+T}(s, \varphi)\|^p\} \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^p. \tag{26}$$

Для цього скористаємося наслідком 2 і очевидною нерівністю

$$E\{\|y_{s+T}(s, \varphi)\|^p\} \leq$$
$$\leq E\{\|x_{s+T}(s, \varphi)\|^p\} + E\{\|x_{s+T}(s, \varphi) - y_{s+T}(s, \varphi)\|^p\}, \tag{27}$$

яка справедлива для всіх $p \in (0, 1)$. Внаслідок існування такого $p \in (0, 1)$, при якому тривіальний розв'язок рівняння (17) експоненціально p-стійкий в цілому, можна вибрати $T > 0$ так, щоб при всіх $s \geq 0$ виконувалась нерівність

$$E\{\|x_{s+T}(s, \varphi)\|^p\} \leq \frac{1}{4}\|\varphi\|^p. \tag{28}$$

При даному $p \in (0, 1)$ і фіксованому $T > 0$ із нерівності (28) виберемо число $\varepsilon > 0$ таке, щоб виконувалась оцінка

$$\sup_{0 \leq L - \varepsilon} LQ(T, L) \leq L^{-1/p}. \tag{29}$$

Тепер для доведення (26) можна скористатись нерівністю (27), підставивши в неї (28) і (25) з урахуванням (29).

Методом індукції легко одержуємо із (26) при довільному $k \in \mathbb{N}$ нерівність

$$E\{\|x_{s+kT}(s, \varphi)\|^p\} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \|\varphi\|^p. \tag{30}$$

Оскільки знос і дифузія в СДФР (22) задовольняє глобальну умову Ліпшіца

$$|a(\varphi) + a_1(t, \varphi) - a(\psi) - a_1(t, \psi)|^2 + |b(\varphi) + b_1(t, \varphi) - b(\psi) - b_1(t, \psi)|^2 +$$
$$+ \int_U |c(\varphi, u) + c_1(t, \varphi, u) - c(\psi, u) - c_1(t, \psi, u)|^2 \Pi(du) \leq$$
$$\leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + L)\|\varphi - \psi\|^2,$$

то при деяких $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ можна одержати [4] оцінку

$$E\{\|y_{s+t}(s, \varphi)\|^p\} \leq E\{\|y_{s+t}(s, \varphi)\|^2\}^{p/2} \leq c_1 e^{c_2 t}\|\varphi\|^p$$

для всіх $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$, $t \geq 0$ і $s \geq 0$. Тому з (30) при будь-якому $k \in \mathbb{N}$ випливає нерівність

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\{\|x_{s+kT+t}(s, \varphi)\|^p\} \leq c_1 e^{c_2 T}\left(\frac{1}{2}\right)^k \|\varphi\|^p.$$

Звідси при всіх $\varepsilon_1 > 0$, $s > 0$ та $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ маємо

$$P\left(\left\{\sup_{t \geq s}|y(t, s, \varphi)| \geq \varepsilon_1\right\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left\{\sup_{(k-1)T \leq t \leq kT}|y(t+s, s, \varphi)|^p \geq \varepsilon_1^p\right\}\right) \leq$$
$$\leq \frac{c_1}{\varepsilon_1^p} e^{c_2 T}\|\varphi\|^p.$$

Крім того, виконується ланцюжок нерівностей

$$\lim_{m \to \infty} P\left(\left\{ \sup_{t \geq mT} |y(t+s, s, \varphi)| \geq \varepsilon_1 \right\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} P\left(\left\{ \sup_{kT \leq t \leq (k+1)T} |y(t+s, s, \varphi)|^p \geq \varepsilon_1^p \right\}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon_1^{-p} c_1 e^{c_2 T} \|\varphi\|^p \lim_{m \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0,$$

а це й доводить твердження теореми.

Теорема 3. *Нехай знос і дифузія в* (1) *неперервні за сукупністю змінних і при всіх* $r > 0$ *задовольняють умову Ліпшіца* (6). *Якщо існує функціонал Ляпунова – Красовського* $v \in D(L^+)$ *такий, що при всіх* $s \geq 0$ *і* $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ *і при деяких* $p > 0$, $k_1 > 0$ *і* $k_2 > 0$ *виконуються нерівності*

$$(L^+ v)(s, \varphi) \leq -k_1 |\varphi(0)|^p, \tag{31}$$

$$|\varphi(0)|^p \leq v(s, \varphi) \leq k_2 \|\varphi\|^p, \tag{32}$$

то тривіальний розв'язок (1) *асимптотично стохастично стійкий в цілому.*

Доведення. Регулярність СДФР (1) випливає з нерівності

$$P(\{\tau_r \geq t\}) = P(\{\tau_r(t) = \tau_r\}) \leq$$

$$\leq P(\{v(\tau_r(t), x_{\tau_r(t)}(s, \varphi)) \geq r^p\} \leq \frac{v(s, \varphi)}{r^p},$$

оскільки при всіх $t \geq 0$ справедлива нерівність [4]

$$\mathrm{E}\{v(\tau_r(t), x_{\tau_r(t)}(s, \varphi))\} \leq v(s, \varphi) + \mathrm{E}\left\{\int_s^{\tau_r(t)} (L^+ v)(\theta, x_\theta(s, \varphi))\, d\theta\right\},$$

або з урахуванням (31)

$$\mathrm{E}\{v(\tau_r(t), x_{\tau_r(t)}(s, \varphi))\} \leq v(s, \varphi) - k_1 \mathrm{E}\left\{\int_s^{\tau_r(t)} |x(u, s, \varphi)|^p\, du\right\}. \tag{33}$$

Тепер замість $\tau_r(t)$ можна підставити t і при всіх $r > 0$ отримати нерівність

$$P\left(\left\{\sup_{t \geq s} |x(t, s, \varphi)| \geq \varepsilon_1\right\}\right) \leq \frac{v(s, \varphi)}{\varepsilon_1^p} \leq \frac{k_2 \|\varphi\|^p}{\varepsilon_1^p},$$

яка гарантує стохастичну стійкість тривіального розв'язку СДФР (1). Крім того, з (33) можна одержати нерівність [2]

$$P\left(\left\{\int_0^\infty |x(u, s, \varphi)|^p\, du \geq R\right\}\right) \leq \frac{1}{R}\int_0^\infty \mathrm{E}\{|x(u, s, \varphi)|^p\}\, du \leq \frac{v(s, \varphi)}{R}$$

при всіх $s \in \boldsymbol{R}_+$, $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$ і $R > 0$. Отже, з імовірністю одиниця

$$\int_0^\infty |x(u+s, s, \varphi)|^p\, du < \infty \tag{34}$$

при всіх $s \in \boldsymbol{R}_+$, $\varphi \in \boldsymbol{D}_n([-h, 0])$.

Поряд з (1) розглянемо „зрізане" рівняння

$$dx^{(r)}(t) = g_r(\|x_t^{(r)}\|)\, a(t, x_t^{(r)})dt + g_r(\|x_t^{(r)}\|)\, b(t, x_t^{(r)})\, dw(t) + \\ + \int_U g_r(\|x_t^{(r)}\|)\, c(t, x_t^{(r)}, u)\, \tilde{\nu}(du, dt), \tag{35}$$

де функція $g_r(\cdot)$ визначається таким чином [3]:

$$g_r(\|\varphi\|) = \begin{cases} 1 & \text{при } \|\varphi\| \in [0, r); \\ \dfrac{2r - \|\varphi\|}{r} & \text{при } \|\varphi\| \in [r, 2r); \\ 0 & \text{при } \|\varphi\| \geq 2r. \end{cases}$$

Внаслідок того, що виконується умова $a(t, 0) = b(t, 0) = c(t, 0, u) \equiv 0$ (бо досліджується на стійкість неперервний розв'язок), можна стверджувати, що знос і дифузія в (35) задовольняє умову Ліпшіца (6) з константою $L_r' = M L_{2r}$. Отже, для розв'язку (35) виконується оцінка

$$P\left(\left\{\sup_{\substack{|t-\tau|<\Delta,\\ t\geq\tau\geq s}} \left||x^{(r)}(t, s, \varphi)|^p - |x^{(r)}(\tau, s, \varphi)|^p\right| \geq R\Delta^\alpha\right\}\right) \leq$$

$$\leq P\left(\left\{\sup_{\substack{|t-\tau|<\Delta,\\ t\geq\tau\geq s}} |x^{(r)}(t, s, \varphi) - x^{(r)}(\tau, s, \varphi)|^p \geq R\Delta^\alpha\right\}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\sup_{\substack{|t-\tau|<\Delta,\\ t\geq\tau\geq s}} |x^{(r)}(t, s, \varphi) - x^{(r)}(\tau, s, \varphi)|^2 \geq R^{2/p}\Delta^{2\alpha/p}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{(2\Delta + 8)\, L_r' r^2{}_r}{R^{2/p}}\, \Delta^{1-2\alpha/p}$$

при всіх $\alpha \in (0, p)$ і достатньо малих $\Delta > 0$. Поклавши $\Delta = (1/m)^4$, $\alpha = p/4$, отримаємо

$$P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{|t-\tau|<(1/m)^4} |x^{(r)}(t, s, \varphi) - x^{(r)}(\tau, s, \varphi)|^2 \geq R^{2/p}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{10\, L_r' r^2}{R^{2/p}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} =: \frac{L(r)}{R^{2/p}}. \tag{36}$$

Позначимо $A^{(r)} = \{\omega \in \Omega : \{|x^{(r)}(t, s, \varphi)|^p,\ t \geq s\}\}$, $A = \{\omega \in \Omega : \{|x(t, s, \varphi)|^p,\ t \geq s\}\}$. Зрозуміло, що із (31) [4] буде випливати

$$\lim_{t\to\infty} |x(t, s, \varphi)|^p = 0.$$

Отже,

$$P\left(\left\{\lim_{t\to\infty} |x(t, s, \varphi)|^p = 0\right\}\right) \geq P(A) \geq P(A \cap \{\tau_r = \infty\}) =$$

$$= P(A^{(r)} \cap \{\tau_r = \infty\}) \geq P(A^{(r)}) - P\left(\left\{\sup_{t \geq s} |x(t, s, \varphi))| \geq r\right\}\right). \qquad (37)$$

При кожному $r > 0$, використовуючи (36), легко отримати нерівність

$$P(A^{(r)}) \geq$$

$$\geq P\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\substack{|t-\tau| < (1/m)^4, \\ t \geq \tau \geq s}} \left| |x^{(r)}(t, s, \varphi)|^p - |x^{(r)}(t, s, \varphi)|^p \right| < R\left(\frac{1}{m}\right)^{p/4} \right\}\right) \geq$$

$$\geq 1 - \frac{L(r)}{R^{2/p}}.$$

З нерівності (37) можна записати

$$P\left(\left\{ \lim_{t \to \infty} |x(t, s, \varphi)| = 0 \right\}\right) \geq 1 - \frac{L(r)}{R^{2/p}} - \frac{v(s, \varphi)}{r^p}.$$

Оскільки r і R — довільні додатні константи, то остання нерівність і доводить твердження теореми 3.

Наведемо декілька модельних прикладів.

***Приклад* 1.** Розглянемо скалярне рівняння

$$dx(t) = -[a x(t) + dx(t-1)]dt + \sigma x(t)\, dw(t) + \int_U x(t)\, c(u)\, \tilde{\nu}(dt, du). \qquad (38)$$

У роботі [5] для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості для рівняння (38) запропоновано квадратичний функціонал Ляпунова – Красовського

$$v(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi(0)|^2 + \alpha \int_{-1}^{0} |\varphi(\theta)|^2 d\theta, \qquad \alpha > 0.$$

Очевидна рівність $v(\varphi) = \dfrac{1}{2}|\varphi(0)|$, а з результатів § 2.1.4 [2] випливає, що $v \in$ $\in D(L^+)$. Легко бачити, що

$$(L^+ v)(\varphi) = (Lv)(\varphi) = -\alpha\, |\varphi(0)|^2 - b\varphi(0)\,\varphi(-1) +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2}|\varphi(0)|^2 + \frac{1}{2}|\varphi(0)|^2 \int_U |c(u)|^2\, \Pi(du) + \alpha\,|\varphi(0)|^2 - \alpha\,|\varphi(-1)|^2 =$$

$$= \left(-a + \alpha + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}\int_U |c(u)|^2\, \Pi(du)\right)|\varphi(0)|^2 - b\varphi(0)\,\varphi(-1) - \alpha\,|\varphi(-1)|^2.$$

Це квадратична форма відносно $\varphi(0)$ та $\varphi(-1)$. Для того щоб вона була від'ємно визначеною, необхідно і досить виконання умови

$$\frac{b^2}{4} < \alpha\left(a - \alpha - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}\int_U |c(u)|^2\, \Pi(du)\right).$$

При оптимальному підборі α одержуємо

$$b^2 < \left(a - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}\int_U |c(u)|^2\, \Pi(du)\right)^2,$$

що і є умовою асимптотичної стохастичної стійкості рівняння (38).

***Приклад* 2.** Розглянемо СДФР вигляду

$$dx(t) = -[a\,x(t) + b\,x(t-h)]\,dt + \sigma\,x(t-h)\,dw(t) + \\ + \gamma\int_U x(t-h)\,c(u)\,\tilde{\nu}(dt,du). \tag{39}$$

Для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості рівняння (39) пропонується квадратичний функціонал

$$v(\varphi) = \varphi^2(0) + \alpha\int_{-h}^{0}\varphi^2(\theta)\,d\theta.$$

Якщо $\alpha > 0$, то

$$\varphi^2(0) \le v(\varphi) \le (1 + \alpha h)\,\|\varphi\|^2.$$

Підрахуємо інфінітезимальний оператор

$$(L^+ v)(\varphi) = (-2a + \alpha)\,\varphi^2(0) + \\ + \left(\sigma^2 + \gamma^2\int_U |c(u)|^2\,du - \alpha\right)\varphi^2(-h) - 2b\,\varphi(0)\,\varphi(-h).$$

Зауважимо, що $(Lv)(\varphi)$ є від'ємно визначеною квадратичною формою відносно $\varphi(0)$ і $\varphi(-h)$, якщо виконується умова

$$2a > \alpha; \quad (\alpha - 2a)\left(\sigma^2 + \gamma^2\int_U |c(u)|^2\,\Pi(du) - \alpha\right) > b^2.$$

Вибираючи

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \gamma^2\int_U |c(u)|^2\,\Pi(du)\right) + a,$$

отримуємо достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості розв'язку рівняння (39).

Ця умова не відображає величини загаювання h і є грубою. В монографії [6] для дослідження стійкості розв'язку рівняння (39) $(a \ge 0,\ b \ge 0)$ запропоновано функціонал

$$v(\varphi) = \left(\varphi(0) - b\int_{-h}^{0}\varphi(\theta)\,d\theta\right)^2 + \\ + \sigma^2\int_{-h}^{0}\varphi^2(\theta)\,d\theta + (b + a)\,a\int_{-h}^{0}\int_{s}^{0}\varphi^2(\theta)\,d\theta\,ds.$$

За допомогою теореми 3 можна одержати умову асимптотичної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку (39) у вигляді

$$bh < 1; \quad 2b(1 - bh) > \sigma^2 + (1 + bh)\,a.$$

Зауважимо, що процес обчислення Lv і перетворень квадратичної форми дуже складний.

***Приклад* 3.** Розглянемо СДФР вигляду

$$dx(t) = [a(t)x^3(t) + b(t)x^3(t-h)]\,dt + \sigma(t)\,x^2(t)\,dw(t), \tag{40}$$

де $x(t) \in \boldsymbol{R}^1$; $\{a(t), b(t)\} \subset \boldsymbol{C}$ такі, що $a(t) \le -\delta < 0$, $|b(t)| \le q\delta$, $q \in (0, 1]$, $\delta > 0$. Для отримання достатніх умов асимптотичної стохастичної стійкості тривіального розв'язку рівняння (40) виберемо функціонал $v \in D(L)$ у вигляді

$$v(\varphi) = \frac{\varphi^4(0)}{4} + \frac{\delta}{2}\int_{-h}^{0} \varphi^6(\theta)\,d\theta.$$

Неважко переконатися, що $v(\varphi) \ge \frac{1}{4}\varphi^4(0)$ і $v \in D(L)$.

Підрахуємо інфінітезимальний оператор

$$(L^+ v)(\varphi) = \left[a(t) + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\sigma^2(t)\right]\varphi^6(0) + b(t)\varphi^3(-h)\,\varphi^3(0) - \frac{\delta}{2}\varphi^6(-h).$$

Отже, $(L^+ v)(\varphi)$ є квадратичною формою відносно $\varphi^3(0)$ і $\varphi^3(-h)$ з матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\delta}{2} & \dfrac{b(t)}{2} \\ \dfrac{b(t)}{2} & a(t) + \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{3}{2}\sigma^2(t) \end{pmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра отримана квадратична форма від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність

$$-\frac{\delta}{2}\left[a(t) + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\sigma^2(t)\right] > \frac{b^2(t)}{4},$$

або з урахуванням обмежень на $\{a(t)\}$ та $\{b(t)\}$ умова

$$\frac{\delta}{3} \le \sigma^2(t) < \frac{\delta}{3}(1+q^2),$$

є достатньою умовою асимптотичної стохастичної стійкості тривіального розв'язку рівняння (40).

***Приклад* 4.** Розглянемо систему СДФР вигляду

$$dx_1(t) = x_2(t)\,dt,$$

$$dx_2(t) = \left\{-h(x_1(t)) + \int_{-h}^{0} f(\theta)\,q(x_1(t+\theta) - x_1(t))\,d\theta\right\}dt +$$

$$+ \sigma(\vec{x}_t)\,dw(t) + \int_U x_1(t+\theta)\,c(u)\,\tilde{\nu}(du, dt), \qquad \vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_1(t+\theta) \\ x_2(t+\theta) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Пропонується функціонал вигляду

$$v(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi_2^2(0) + H(\varphi_1(0)) + \int_{-h}^{0} f(\theta)\,G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0))\,d\theta,$$

де

$$H(z) = \int_0^z h(\lambda)\,d\lambda; \qquad G(z) = \int_0^z g(\lambda)\,d\lambda,$$

причому $h(\lambda)\lambda > 0$ і $g(\lambda)\lambda > 0$ при $\lambda > 0$, $h(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$; функції $f(\theta)$, $g(\lambda)$ і $h(\lambda)$ — неперервно диференційовні; $\sigma(z)$ і $h(z)$ задовольняють умову Ліпшіца. Згідно з формулою

$$(L^+ v)(s, \varphi) = l(0) H(s, \varphi(0), \varphi(0)) - l(-h) H(s, \varphi(-h), \varphi(0)) -$$

$$- \int_{-h}^{0} \frac{dl(\theta)}{d\theta} H(s, \varphi(\theta), \varphi(0))\, d\theta + \int_{-h}^{0} l(\theta)(L_2 H)(s, \varphi(\theta), \varphi(0))\, d\theta,$$

де оператор L_2 діє на $H(s, \varphi(\theta), \varphi(0))$ по першому і третьому аргументах при фіксованому значенні другого аргументу за правилом

$$(L^+ g)(s, \varphi) = \frac{\partial g(s, \varphi(0))}{\partial s} + ((\nabla g)(s, \varphi(0)), a(s, \varphi)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sp}((\nabla^2 g)(s, \varphi(0))\, b(s, \varphi)\, b^T(s, \varphi)) +$$

$$+ \int_U [g(s, \varphi(0) + c_t(s, \varphi, u)) - g(s, \varphi(0)) - ((\nabla g)(s, \varphi(0)), c(s, \varphi, u))]\, \Pi(du),$$

легко підрахувати

$$(L^+ v)(\bar\varphi) = \varphi_2(0) \Bigg\{ -h(\varphi_1(0)) + \int_{-h}^{0} f(\theta) g(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0))\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_U \varphi_2(0) c^2(u)\, \Pi(du) \Bigg\} + \frac{1}{2} \sigma^2(\bar\varphi) + h(\varphi_1(0)) \varphi_2(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \frac{df(\theta)}{d\theta} G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0))\, d\theta + \int_U f(\theta) [G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0) \varphi_1(\theta) c(u)) -$$

$$- G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) - g(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) \varphi_1(\theta) c(u)]\, d\theta\, \Pi(du) =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2(\bar\varphi) + \int_{-h}^{0} \frac{df(\theta)}{d\theta} G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0))\, d\theta - f(-h) G(\varphi_1(-h) - \varphi_1(0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_U \varphi_2^2(0) c^2(u)\, \Pi(du) + \int_U \int_{-h}^{0} f(\theta) [G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0) - \varphi_1(\theta) c(u)) -$$

$$- G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) - g(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) \varphi_1(\theta) c(u)]\, d\theta\, \Pi(du).$$

Якщо при $\theta \in [-h, 0]$ $f(\theta) > 0$, $\dfrac{df(\theta)}{d\theta} \le 0$ та виконується нерівність

$$\frac{1}{2} \left(\sigma(\bar\varphi) + \int_U \varphi_2^2(0) c^2(u)\, \Pi(du) \right) + \int_U \int_{-h}^{0} f(\theta) [G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0) - \varphi_1(\theta) c(u)) -$$

$$- G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) - g(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0)) \varphi_1(\theta) c(u)]\, d\theta\, \Pi(du) \le$$

$$\le f(-h) G(\varphi_1(-h) - \varphi_1(0)), \qquad (42)$$

то в силу недодатності підінтегрального виразу

$$\int_{-h}^{0} \frac{df(\theta)}{d\theta} G(\varphi_1(\theta) - \varphi_1(0))\, d\theta \le 0$$

маємо $(L^+ v)(\vec{\varphi}) \le 0$ і тривіальний розв'язок рівняння (41) стохастично стійкий при виконанні умови (42).

Наступний аналіз асимптотичної стійкості пов'язаний з припущенням про існування такого $\rho \in [-h, 0]$, що $\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=-\rho} < 0$. Тоді спочатку із збіжності інтеграла

$$\int_{0}^{\infty} \int_{-h}^{0} \frac{df}{d\theta} G(x_1(t+\theta) - x_1(t))\, d\theta\, dt$$

випливає

$$P\left(\lim_{t\to\infty} |x_1(t+\theta) - x_1(t)| = 0\right) = 1$$

та

$$P\left(\lim_{t\to\infty} \int_{-\rho-\varepsilon}^{-\rho+\varepsilon} G(x_1(t+\theta) - x_1(\theta))\, d\theta = 0\right) = 1$$

при деякому $\varepsilon > 0$, а потім із супермартингальних властивостей $v(\vec{\varphi})$ доводяться нерівності

$$P\left(\lim_{t\to\infty} h(x_1(t)) = 0\right) = 1; \qquad P\left(\lim_{t\to\infty} |x_1(t)| = 0\right) = 1,$$

а також із рівності

$$x_1(t) - x_1(t-s) = \int_{t-s}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$$

та із властивостей розв'язку виводиться рівність

$$P\left(\lim_{t\to\infty} |x_2(t)| = 0\right) = 1.$$

***Приклад* 5.** Розглянемо систему нелінійних СДФР вигляду

$$dx(t) = y(t)\, dt,$$

$$dy(t) = \left[-\frac{a}{h} y(t) - \frac{b}{h}\sin x(t) + \frac{b}{h}\int_{-h}^{0} (\cos x(t+\theta))\, y(t+\theta)\, d\theta\right] dt \; +$$

$$+ \; \frac{c}{h} y(t)\, dw(t), \tag{43}$$

де a, b, c і h — додатні константи.

Ця система еквівалентна рівнянню

$$\ddot{x}(t) + \frac{a}{h}\dot{x}(t) + \frac{b}{h}\sin x(t-h) - \frac{c}{h}\dot{x}(t)\, dw(t) = 0.$$

Розглянемо функціонал

$$v(x_t, y_t) = \frac{L}{2} y^2(t) + b(1 - \cos x(t)) + \frac{a}{2h} \int_{-h}^{0} \int_{s}^{0} y^3(t+\tau)\, d\tau\, ds .$$

Обчислимо

$$(L^+ v)(x_t, y_t) = b \sin(x(t))\, y(t) +$$

$$+ \; h y(t) \left[-\frac{a}{h} y(t) - \frac{b}{h} \sin x(t) + \frac{b}{h} \int_{-h}^{0} y(t+\theta) \cos x(t+\theta)\, d\theta \right] +$$

$$+ \; \frac{c^2}{h^2} y^2(t) - \frac{a}{2h} \int_{-h}^{0} y^2(t+\theta)\, d\theta \; =$$

$$= \; -a y^2(t) + b \int_{-h}^{0} y(t+\theta)\, y(t) \cos x(t+\theta)\, d\theta \; +$$

$$+ \; \frac{c^2}{h^2} y^2(t) - \frac{a}{2h} \int_{-h}^{0} y^2(t+\theta)\, d\theta \; =$$

$$= \int_{-h}^{0} \left[-\frac{a}{h} y^2(t) + b\, y(t)\, y(t+\theta) \cos x(t+\theta) + \frac{c^2}{h^3} y^2(t) - \frac{a}{2h} y^2(t+\theta) \right] d\theta \; \le$$

$$\le \int_{-h}^{0} \left[\left(\frac{c^2}{h^3} - \frac{a}{h} \right) y^2(t) + b\, y(t)\, y(t+\theta) - \frac{a}{2h} y^2(t+\theta) \right] d\theta .$$

Якщо $2a(a^2h^2 - c^2) > b^2h^4$, то квадратична форма під знаком інтеграла відносно $\{ y(t), y(t+\theta) \}$ від'ємно визначена, а це означає, що тривіальний розв'язок рівняння асимптотично стохастично стійкий в середньому квадратичному.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
2. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
5. *Kushner H. J.* On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations // J. Different. Equat. – 1968. – **4**. – P. 424–443.
6. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Одержано 20.09.95