УДК 512.5

О. Ю. Кирнасовський (Вінниц. пед. ін-т)

ВРІВНОВАЖЕНА ТОТОЖНІСТЬ, ЯКА ОПИСУЄ n-АРНІ ІЗОТОПИ ГРУП У КЛАСІ ВСІХ n-АРНИХ КВАЗІГРУП

A balanced identity is found which holds in a primitive n-ary quasigroup if and only if the multiplace quasigroup associated with the considered primitive n-ary quasigroup is a multiplace group isotope.

Знайдено врівноважену тотожність, яка виконується в примітивній n-арній квазігрупі тоді й тільки тоді, коли багатомісна квазігрупа, якій відповідає ця примітивна n-арна квазігрупа, є багатомісним груповим ізотопом.

Багатомісний групоїд (Q, f) називається *n-арною квазігрупою*, якщо рівняння

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i$$

має в (Q, f) єдиний розв'язок відносно змінної x при будь-яких значеннях параметрів $a_1, \ldots, a_n$ та i. Цей розв'язок позначимо через $f^i(a_1, \ldots, a_n)$. Коли $n = 2$, а $f = (\cdot)$, то f^1 та f^2 позначають через $(/)$ та $(\backslash)$.

Багатомісна квазігрупа (Q, f) називається *n-арним (груповим) ізотопом групи* $(H; \cdot)$, якщо існують біекції $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ та α з множини Q на множину H, для яких виконується тотожність

$$\alpha(f(x_1, \ldots, x_n)) = \alpha_1(x_1) \ldots \alpha_n(x_n).$$

Тотожність називається *врівноваженою*, якщо в її запису немає предметних констант, а кожна предметна змінна, що входить в запис цієї тотожності, входить в нього точно по два рази, причому по одному разу в ліву та праву частини тотожності.

Позначимо через $\overset{n}{u}$ послідовність, яка складається з n елементів u, а через $\overline{u}$ — вираз $f^1\left(\overset{n}{u}\right)$, якщо f — операція n-арної квазігрупи.

Послідовність $x_m, x_{m\pm1}, \ldots, x_n$ скорочено позначатимемо через x_m^n, якщо $m \le n$, і через $[\,x\,]_m^n$, — якщо $m \ge n$.

З [1, 2] випливає, що n-арна квазігрупа (Q, f) є n-арним груповим ізотопом тоді й тільки тоді, коли в ній виконується неврівноважена тотожність

$$f\left(f^1\left(f\left(x_1, f^2\left(\overline{u}, x_2, \overset{n-2}{u}\right), f^3\left(\overline{u}, u, x_3, \overset{n-3}{u}\right), \ldots, f^n\left(\overline{u}, \overset{n-2}{u}, x_n\right)\right), \overset{n-1}{u}\right),\right.$$

$$\left. f^2\left(\overline{u}, x_{n+1}, \overset{n-2}{u}\right), x_{n+2}^{2n-1} \right) =$$

$$= f\left(x_1, f^2\left(\bar{u}, f\left(f^1\left(x_2, \overset{n-1}{u}\right), f^2\left(\bar{u}, x_3, \overset{n-2}{u}\right), f^3\left(\bar{u}, u, x_4, \overset{n-3}{u}\right), \ldots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\ldots, f^n\left(\bar{u}, \overset{n-2}{u}, x_{n+1}\right)\right)\right), \overset{n-2}{u}\right), x_{n+2}^{2n-1}\right). \tag{1}$$

Теорема. *Багатомісна квазігрупа* (Q, f) *арності* n *є* n*-арним груповим ізотопом тоді й тільки тоді, коли в ній виконується врівноважена тотожність*

$$f\left(f^1\left(f(x_1, f^2\left([x]_2^2, x_3, [x]_{n+1}^4\right), f^3\left([x]_{n+3}^{n+2}, x_{n+4}, [x]_{2n+1}^{n+5}\right),\right.\right.$$
$$f^4\left([x]_{2n+4}^{2n+2}, x_{2n+5}, [x]_{3n+1}^{2n+6}\right), \ldots$$
$$\left.\ldots, f^n\left([x]_{(n-2)n+n}^{(n-2)n+2}, x_{(n-2)n+n+1}\right)\right), [x]_{n^2}^{n^2-n+2}\right),$$
$$\left.f^2\left(x_{n^2+1}, x_{n^2+2}, [x]_{n^2+n}^{n^2+3}\right), x_{n^2+n+1}^{n^2+2n-2}\right) =$$
$$= f\left(x_1, f^2\left(x_2, f\left(f^1\left(x_3, [x]_{n+2}^4\right), f^2\left([x]_{n+3}^{n+3}, x_{n+4}, [x]_{2n+2}^{n+5}\right),\right.\right.\right.$$
$$f^3\left([x]_{2n+4}^{2n+3}, x_{2n+5}, [x]_{3n+2}^{2n+6}\right), \ f^4\left([x]_{3n+5}^{3n+3}, x_{3n+6}, [x]_{4n+2}^{3n+7}\right), \ldots$$
$$\left.\left.\left.\ldots, f^n\left([x]_{(n-1)n+n+1}^{(n-1)n+3}, x_{(n-1)n+n+2}\right)\right), [x]_{n^2+n}^{n^2+3}\right), x_{n^2+n+1}^{n^2+2n-2}\right). \tag{2}$$

Доведення. Нехай спочатку виконується тотожність (2). Замінимо в (2) змінні $x_2, x_{n+3}, x_{2n+4}, \ldots, x_{n^2-n}, x_{n^2+1}$ виразом $f^1\left(\overset{n}{u}\right)$, тобто на $\bar{u}$. Далі замінимо змінні $x_3, x_{n+4}, x_{2n+5}, \ldots, x_{n^2-n+1}, x_{n^2+2}$ відповідно змінними $y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n, y_{n+1}$. Після цього замінимо змінну x_1 змінною y_1, змінні $x_{n^2+n+1}, x_{n^2+n+2}, \ldots, x_{n^2+2n-3}, x_{n^2+2n-2}$ — відповідно змінними $y_{n+2}, y_{n+3}, \ldots$ $\ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}$, а решту досі незамінених змінних — змінною u. Одержана після таких замін тотожність також виконується. Але ця тотожність відрізняється від тотожності (1) лише позначеннями деяких змінних: (1) замість змінних $y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}$ містить змінні $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}$. Отже, згідно з [1, 2] багатомісна квазігрупа (Q, f) є n-арним груповим ізотопом. Навпаки, нехай (Q, f) є n-арним груповим ізотопом. Доведемо тотожність (2). З роботи [3] випливає, що для n-арного групового ізотопу (Q, f) існують група $(Q, \cdot)$ та її підстановки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для яких виконується тотожність

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1(x_1) \ldots \alpha_n(x_n). \tag{3}$$

Звідси для кожного не більшого ніж n натурального числа i маємо тотожність

$$f^i(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_i^{-1}\left(\left(\alpha_{i-1}(x_{i-1})\right)^{-1} \ldots (\alpha_1(x_1))^{-1} \times\right.$$
$$\left.\times\, x_i(\alpha_n(x_n))^{-1} \ldots \left(\alpha_{i+1}(x_{i+1})\right)^{-1}\right). \tag{4}$$

Підставляючи тотожності (3) та (4) в тотожність (2), переходимо в останній від операції f до операції $(\cdot)$ та підстановок $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. В результаті одержуємо очевидну тотожність

$$\alpha_1\left(\alpha_1^{-1}\left(\alpha_1(x_1)\alpha_2\left(\alpha_2^{-1}\left((\alpha_1(x_2))^{-1} x_3 (\alpha_n(x_4))^{-1} \ldots \left(\alpha_3(x_{n+1})\right)^{-1}\right)\right) \times\right.\right.$$

$$\times\, \alpha_3\Big(\alpha_3^{-1}\Big(\big(\alpha_2(x_{n+2})\big)^{-1}\big(\alpha_1(x_{n+3})\big)^{-1} x_{n+4}\big(\alpha_n(x_{n+5})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_4(x_{2n+1})\big)^{-1}\Big)\Big) \times \ldots$$

$$\ldots \times \alpha_n\Big(\alpha_n^{-1}\Big(\big(\alpha_{n-1}(x_{n^2-2n+2})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_2(x_{n^2-n-1})\big)^{-1}\big(\alpha_1(x_{n^2-n})\big)^{-1} x_{n^2-n+1}\Big)\Big) \times$$

$$\times\, \big(\alpha_n(x_{n^2-n+2})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_2(x_{n^2})\big)^{-1}\Big)\Big) \times$$

$$\times\, \alpha_2\Big(\alpha_2^{-1}\Big(\big(\alpha_1(x_{n^2+1})\big)^{-1} x_{n^2+2}\big(\alpha_n(x_{n^2+3})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_3(x_{n^2+n})\big)^{-1}\Big)\Big) \times$$

$$\times\, \alpha_3(x_{n^2+n+1})\ldots\alpha_n(x_{n^2+2n-2}) =$$

$$= \alpha_1(x_1)\alpha_2\big(\alpha_2^{-1}\big((\alpha_1(x_2))^{-1}\alpha_1\big(\alpha_1^{-1}\big(x_3(\alpha_n(x_4))^{-1}\ldots\big(\alpha_2(x_{n+2})\big)^{-1}\big)\big) \times$$

$$\times\, \alpha_2\big(\alpha_2^{-1}\big(\big(\alpha_1(x_{n+3})\big)^{-1} x_{n+4}\big(\alpha_n(x_{n+5})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_4(x_{2n+2})\big)^{-1}\big)\big) \times$$

$$\times\, \alpha_3\Big(\alpha_3^{-1}\Big((\alpha_2(x_{2n+3}))^{-1}(\alpha_1(x_{2n+4}))^{-1}x_{2n+5}\big(\alpha_n(x_{2n+6})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_4(x_{3n+2})\big)^{-1}\Big)\Big) \times \ldots$$

$$\ldots \times \alpha_n\Big(\alpha_n^{-1}\Big(\big(\alpha_{n-1}(x_{n^2-n+3})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_2(x_{n^2})\big)^{-1}\big(\alpha_1(x_{n^2+1})\big)^{-1} x_{n^2+2}\Big)\Big) \times$$

$$\times\, \big(\alpha_n(x_{n^2+3})\big)^{-1}\ldots\big(\alpha_3(x_{n^2+n})\big)^{-1}\Big)\Big)\alpha_3(x_{n^2+n+1})\ldots\alpha_n(x_{n^2+2n-2}).$$

Отже, виконується і тотожність (2).

В роботах [1, 4] знайдено відповідно врівноважену та неврівноважену (але з меншою кількістю змінних) тотожності, кожна з яких має місце в бінарній квазігрупі тоді й тільки тоді, коли ця квазігрупа є бінарним груповим ізотопом. При $n = 2$ тотожність (2) тривіальними замінами зводиться до такої тотожності з роботи [4].

Автор дякує своєму науковому керівникові Ф. М. Сохацькому за керівництво.

1. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп. II // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1692–1703.
2. *Sokhatskii F. M.* Multiplace isotopical closures of classes of groups // Третья междунар. конф. по алгебре им. М. И. Каргапалова: Тез. докл. – Красноярск: ИНО ПРОФ, 1993. – С. 440–441.
3. *Sokhatsky F.* On superassociative group isotopes // Quasigroups and related systems. – 1995. – **2**, № 1. – P. 101–119.
4. *Белоусов В. Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сб. – 1966. – **70**, № 1. – С. 55–97.

Одержано 25.06.97