УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ РІДІЮЧИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПЕРЕМІШУВАННЯМ. II

The limit theorem proved in the first part of this paper is applied to the well-known schemes of raring processes taking place in queuing theory, mathematical biology, and in problems for counters.

Гранична теорема із першої частини роботи застосовується до відомих схем рідіючих процесів із теорії обслуговування, математичної біології, проблем для лічильників.

Дослідження, викладені в цій статті, базуються на теоремі 1 із першої частини роботи. Схеми рідіючих процесів, які співпадають із схемами з [1], досліджуються більш докладніше та при слабкіших умовах на процеси, що взаємодіють. Зауважимо, що при обчисленні характеристики, необхідної для перевірки умов теореми 1, одержані результати мають самостійний інтерес для характеризації цих моделей.

При цьому нумерація пунктів, теорем та формул продовжується.

2. Потік необслугованих вимог у системі GI / G / 1 / 0. У цьому пункті будуть наведені достатні умови для апроксимації потоку необслугованих вимог у системі GI / G / 1 / 0 потоком, близьким до пуассонового.

Позначимо через τ_i момент надходження i-ї вимоги у систему, $\tau_1 = 0$; θ — тривалість обслуговування однієї вимоги.

Нехай $c(k) = P(\tau_k \le \theta < \tau_{k+1})$, $k \ge 1$, тобто $c(k)$ — ймовірність того, що обслуговування першої вимоги закінчиться у проміжку часу між надходженням до системи k- та $k+1$-ї вимог. Покладемо $c = c(1)$ та припустимо, що $\sum_{k \ge 1} c(k) = 1$.

Присвоїмо i-й вимозі, яка надійшла на обслуговування, номер i, а через $\beta(k)$ позначимо номер k-ї вимоги, яка не обслужилась.

Наприклад, коли перша необслугована вимога надійшла до системи четвертою, то $\beta(1) = 4$, і т. д. Зрозуміло, що $\beta(k) \ge k$.

Визначимо індикатори $\chi(i)$, $i \ge 1$:

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & \text{коли } i\text{-а вимога необслужена;} \\ 0, & \text{коли } i\text{-а вимога обслужена,} \end{cases}$$

та за допомогою останніх визначимо процес $\xi(l)$:

$$\xi(t) = \min\{j \ge 1 : \chi(l+j) = 1\}, \qquad l \ge 0.$$

Тоді для $\beta(k)$ маємо рекурентне співвідношення

$$\beta(k+1) = \beta(k) + \xi(\beta(k)), \qquad k \ge 0, \quad \beta(0) = 0.$$

Як бачимо, процедура переліку номерів необслугованих вимог *співпадає з* процедурою, що досліджена в теоремі 1. Для застосування цієї процедури обчислимо необхідні характеристики процесу $\xi(t)$.

Теорема 2. *Для процесу* $\xi(l)$

$$P(\xi(i)=l) = \begin{cases} c^{l-2}(1-c)q_i & \text{при } l \geq 2; \\ 1-q_i & \text{при } l=1, \end{cases}$$

де q_i *визначаються рекурентно*:

$$q_i = \sum_{k=0}^{i} q_k\, c(i-k), \quad q_0 = 1, \quad c(0) = 0.$$

Доведення. Подія $\{\xi(i)=l\}$, $l \geq 2$, означає, що в інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ закінчилось одне з обслуговувань і вимоги, які надійшли у моменти τ_{i+k}, встигли обслужитися до моменту τ_{i+k+1}, $k=1,\ldots,l-2$, а вимога, яка надійшла у момент τ_{i+l-1}, не встигла обслужитися до моменту τ_{i+l}.

Позначимо через q_i ймовірність того, що $(i+1)$-а вимога надійшла у вільну систему. Беручи до уваги останнє, маємо

$$P(\xi(i)=l) = q_i c^{l-2}(1-c).$$

Таким чином, доведено перше твердження теореми. Надходження $(i+1)$-ї вимоги у вільну систему співпадає з однією з подій: у проміжку $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ закінчилось обслуговування і вимога, яка надійшла у момент τ_{k+1}, $k=1,\ldots,i-1$, обслуговувалась до якогось моменту x з проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Оскільки ці події несумісні, то маємо

$$q_i = \sum_{k=0}^{i} q_k\, c(i-k), \quad c(0) = 0, \quad q_0 = 1.$$

Отже, $q_i \geq 0$ є обмеженим розв'язком дискретного рівняння відновлення. Тепер, використовуючи узлову теорему відновлення, завершуємо доведення другої частини теореми.

Оцінимо коефіцієнт перемішування, визначений у зауваженні до теореми 1.

Через θ_k позначимо момент закінчення обробки k-ї вимоги системою, а ймовірність події $\{\tau_i \leq \theta_k \leq \tau_{i+1}\}$ позначимо через $\theta_k(i)$. Тоді справджуються рівності

$$P(\xi(i)=l,\ \xi(i+n)=m) = \sum_{j=1}^{i} \theta_j(i) c^{l-1} \sum_{j=2}^{n+i-l} \theta_k(n+i-j-l) c^{m-1}(1-c),$$

$$P(\xi(i)=l) P(\xi(i+n)=m) = \sum_{k=1}^{i} \theta_k(i) c^{l-1} \sum_{k=1}^{n+i} \theta_k(n+i) c^{m-1}(1-c).$$

Звідси одержуємо

$$P(\xi(i)=l,\ \xi(i+n)=m) - P(\xi(i)=l) P(\xi(i+n)=m) = \\ = (1-c) c^{m+l-2} J(n),$$

$$J(n) = \sum_{j=2}^{n+i-l} c(j) \sum_{k=1}^{n+i-j-l} \theta_k(n+i-j-l) - \sum_{k=1}^{n+i} \theta_k(n+i)(1-c).$$

Зрозуміло, що

$$q_s = \sum_{k=1}^{s-1} \theta_k (s-1).$$

З останнього випливає

$$J(n) = \sum_{j=2}^{n+i-l} c(j) q_{n+i-j-l+1} + c q_{n+i-l} + c(n+i-l+1) - q_{n+i+1}(1-c) -$$

$$- c q_{n+i+1} - c(n+i-l-1) =$$

$$= (q_{n+i-l+1} - q_{n+i+1}) + c(q_{n+i+1} - q_{n+i-l}) - c(n+i-l+1). \qquad (7)$$

Отже, якщо $n - l \to \infty$, то $J(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Нехай тепер числа $c_n(k)$, $k \geq 1$, залежать від індекса n таким чином, що

$$a_n = (1 - c_n)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Зауважимо, що при побудові $c_n(k)$ випадкові величини τ та θ можуть водночас залежати від n.

Теорема 3. *Якщо існує таке число* $m \leq 1$, *що має місце збіжність*

$$\sup_{i \geq 1} |q_{ia_n}(n) - m| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то

$$P(\beta_n(k) < a_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} R_1 * R_2^{*(k-1)}(x),$$

$$R_1(x) = 1 - \exp(-x), \qquad R_2(x) = 1 - m \exp(-x).$$

Доведення. Застосуємо теорему 1 до послідовності $\beta_n(k)$. Перш за все переконаємось, що коефіцієнт перемішування $\alpha_{\xi_n, r_n}(a_n) = o(a_n^{-1})$.

Цей факт випливає з оцінок для $J(n)$: поклавши в (7) $n = a_n$, $l \geq a_n - r_n$, де $r_n = o(a_n)$, $r_n \to \infty$, будемо мати $J(a_n) = o(1)$. Звідси $\alpha_{\xi_n, r_n}(a_n) = a_n^{-1} o(1) = o(a_n^{-1})$.

Обчислимо граничні функції $R_1(x)$ та $R_2(x)$:

$$P(\xi_n(0) < a_n x) = \sum_{l=2}^{[a_n x]} c_n^{l-2}(1 - c_n) = 1 - (1 - (1 - c_n))^{[a_n x]-1} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp(-x),$$

$$P(\xi_n(i[a_n]) < a_n x) = 1 - q_{i[a_n]}(n) + q_{i[a_n]}(1 - a_n^{-1})^{[a_n x]-1} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - m \exp(-x).$$

Зауваження 3. Фахівцям добре відомий результат Ю. К. Бєляєва [2] стосовно пуассонівської апроксимації потоку необслугованих вимог у системі $GI/G/1/0$. Його результат у наших термінах має вигляд: коли має місце збіжність

$$\frac{1 - c_n(1) - c_n(2)}{1 - c_n(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \tau_n n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu < \infty, \qquad (8)$$

то

$$P(\tau_{\beta_n(k)} < a_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp(-x\mu^{-1}).$$

Щоб переконатись у тому, що теорема 3 погоджується з цим результатом, достатньо показати, що у теоремі 3 при виконанні умови (8) справджується рівність $m = 1$.

З визначення $q_i(n)$ маємо

$$q_i(n) = \sum_{l=0}^{i} c_n(i-l) q_l(n).$$

Далі

$$q_i = c_n(1) q_{i-1}(n) + c_n(2) q_{i-2} + \sum_{l=0}^{i-3} c_n(i-l) q_l(n).$$

Позначимо

$$\varphi_n(s) = \sum_{k\geq 0} q_k(n) s^k,$$

$$Z_n(s) = \sum_{k\geq 3}\left(\sum_{l=0}^{k-3} c_n(k-l)\, q_l(n)\right) s^k = \sum_{l\geq 3} z_l(n) s^l.$$

Маємо

$$\varphi_n(s) = (1 - c_n(1)s - c_n(2)s^2)^{-1}(1 + Z_n(s)) = I_1(n,s) + I_2(n,s).$$

Функція $I_1(n,s)$ є твірною для рекурентної послідовності чисел

$$\hat{q}_m(n) = c_1(1)\hat{q}_{m-1}(n) + c_n(2)\hat{q}_{m-2}(n), \qquad m \geq 2,$$

$$q_0(n) = 1, \qquad q_1(n) = c_n(1).$$

Корені характеристичного рівняння цього рекурентного співвідношення мають вигляд $r_1 = \dfrac{c_n(1) - \sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}{2}$, $r_2 = \dfrac{c_n(1) + \sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}{2}$, а загальний розв'язок —

$$\hat{q}_m(n) = k_1 r_1^m + k_2 r_2^m, \qquad m \geq 0.$$

Сталі k_1, k_2 визначаються за початкових умов

$$k_1 + k_2 = 1; \qquad r_1 k_1 + r_2 k_2 = c_n(1).$$

З останнього випливає

$$k_1(n) = \frac{\sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)} - c_n(1)}{2\sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}, \qquad k_2(n) = \frac{c_n(1) + \sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}{2\sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}.$$

Таким чином, маємо

$$\hat{q}_m(n) = \left(\sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}\right)^{-1}\left(-\left(\frac{c_n(1) - \sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}{2}\right)^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c_n(1) + \sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)}}{2}\right)^{m+1}\right). \tag{9}$$

Далі

$$\sqrt{c_n^2(1) + 4c_n(2)} + c_n(1) =$$

$$= \left(1 - 2\sum_{l\geq 2} c_n(l) + \left(\sum_{l\geq 2} c_n(l)\right)^2 + 4c_n(2)\right)^{1/2} + 1 - \sum_{l\geq 2} c_n(l) =$$

$$= 2 - 2\sum_{l\geq 3} c_n(l) + O(c_n^2(2)),$$

$$c_n(1) - \sqrt{c_n^2 + 4c_n(2)} = 1 - \sum_{l\geq 2} c_n(l) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2}\left(-2\sum_{l\geq 2} c_n(l) + \left(\sum_{l\geq 2} c_n(l)\right)^2 + 4c_n(2)\right) + O(c_n^2(2))\right) =$$

$$= -\sum_{l\geq 3} c_n(l) + O(c_n^2(2)).$$

Тепер з умови (8) для довільного фіксованого i при $n \to \infty$ у (9) має місце збіжність першого доданку до нуля, а другого до одиниці, тобто $\hat{q}_{[ia_n]}(n) \to 1$.

Далі, коефіцієнт $i_{2,k}(n)$ при k-му степені у зображенні $I_2(n, s)$ за допомогою ряду будується як коефіцієнт при цьому степені добутку двох рядів $Z_n(s)$ та $I_1(n, s) = \sum_{l\geq 0} \hat{q}_l(n)s^l$. Таким чином, $i_{2,k}(n) = \sum_{i=0}^{k} z_l(n)\hat{q}_{k-l}(n)$.

Нарешті, беручи до уваги (8) та нерівності $z_l(n) \leq 1 - c_n(1) - c_n(2)$, $\hat{q}_m(n) \leq 1$, для довільної фіксованої обмеженої множини натуральних чисел A маємо збіжність

$$q_{[jc_n]}(n) = \hat{q}_{[jc_n]}(n) + i_{2,[jc_n]}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad j \in A,$$

що і треба було довести.

3. Моменти збудження нейрона. Розглянемо взаємодію двох процесів відновлення.

Нехай $Z = \{\zeta_i,\ i \geq 1\}$ і $H = \{\eta_i,\ i \geq 1\}$ задають два процеси відновлення.

Позначимо через $\tau_i = \sum_{l=1}^{i} \eta_l$ момент появи i-ї події у процесі H. Залишимо i-у подію у H тоді і лише тоді, коли у проміжку $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ не трапилось жодної події з процесу Z. Ця схема взаємодії є математичною моделлю збудження нейрона: до нейрона надходять два потоки імпульсів —збуджуючих (H) та зупиняючих (Z), взаємодія яких визначає ті імпульси, які збуджують нейрон [3, 4]. Позначимо

$$\gamma^+(x) = \sum_{i=1}^{j} \zeta_i, \quad \sum_{i=1}^{j-1} \zeta \leq x < \sum_{i=1}^{j} \zeta,$$

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & \text{коли } i\text{-а подія у } H \text{ залишена;} \\ 0, & \text{коли } i\text{-а подія у } H \text{ ліквідована,} \end{cases}$$

$$\xi(l) = \min\{j \geq 1 : \chi(l+j) = 1\},$$

$$m = \sup_{x\geq 0} P(\gamma^+(x) > \eta_1), \quad i = \inf_{x\geq 0} P(\gamma^+(x) > \eta_1),$$

$$c = P(\zeta_1 > \eta_1), \quad i \leq c \leq m.$$

Таким чином, $\beta(i) = \beta(i-1) + \xi(\beta(i-1))$ є номером i-ї залишеної події у потоці H, відповідно $\tau_{\beta(i)}$ — момент появи цієї події.

Нехай n є номером серії. Процес Z залежить від параметра n так, що $Z_n = \{\zeta_{i,n}, i \geq 1\}$. Отже, процеси та величини у цій схемі також залежать від параметра n: $\gamma_n^+(x)$, $\xi_n(l)$, $\beta_n(i)$, m_n, i_n, c_n.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*:

1) $\dfrac{m_n}{i_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$

2) $\tau_s s^{-1} \xrightarrow[s\to\infty]{p} \mu.$

Тоді має місце збіжність

$$P(\tau_{\beta_n}(k) < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)\right)^{*k}.$$

Доведення. Застосуємо теорему 1. З побудови взаємодії двох процесів відновлення випливає основна рівність для цієї задачі:

$$P(\xi(l) = k) = P(\gamma^+(\tau_l) < \eta_{l+1}, \gamma^+(\tau_{l+1}) < \eta_{l+2}, \ldots$$
$$\ldots, \gamma^+(\tau_{l+k-2}) < \eta_{l+k-1}, \gamma^+(\tau_{l+k-1}) > \eta_{l+k}). \tag{10}$$

З рівності (10), незалежності потоків Z, H та структури лінійчатого процесу $\gamma^+(x)$ випливають наступні нерівності:

$$\begin{gathered} i_n \leq P(\xi_n(l) = 1) \leq m_n, \\ (1 - m_n)\, i_n \leq P(\xi_n(l) = 2) \leq (1 - i_n)\, m_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1 - m_n)^{k-1}\, i_n \leq P(\xi_n(l) = k) \leq (1 - i_n)^{k-1}\, m_n. \end{gathered} \tag{11}$$

Переконаємось у справедливості перших двох. На підставі незалежності H та Z, τ_l, η_{l+1}

$$P(\xi_n(l) = 1) = \int_0^\infty P(\gamma^+(x) > \eta_{l+1})\, P(\tau_l \in dx).$$

Далі з визначення маємо $i_n \leq P(\gamma^+(x) > \eta_{l+1}) \leq m_n$. Звідси випливає перше твердження з (11).

Тепер, зважаючи на те, що події $\{\gamma^+(x) < y\}$, $\{\gamma^+(x+y) > \eta_{l+2}\}$ при фіксованих x, y є незалежними ($\gamma^+(x)$ — лінійчатий процес з точками відновлення x_i: $\gamma^+(x_i) = 0$), маємо

$$P(\xi_n(l) = 2) =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\gamma^+(x) < y)\, P(\gamma^+(x+y) > \eta_{l+2})\, P(\tau_l \in dx)\, P(\eta_{l+1} \in dy).$$

За означенням

$$(1 - m_n)\, i_n \leq P(\gamma^+(x) < y)\, P(\gamma^+(x+y) > \eta_{l+2}) \leq (1 - i_n)\, m_n.$$

Звідси випливає справедливість другого твердження з (11). Подальші нерівності доводяться аналогічно.

Таким чином, з останнього маємо

$$i_n \frac{1-(1-m_n)^k}{m_n} \le \sum_{s=1}^{k} P(\xi_n(l)=s) \le m_n \frac{1-(1-i_n)^k}{i_n}.$$

Беручи до уваги умову 1, одержуємо

$$P(\xi_n(l) < [x m_n^{-1}]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp(-x),$$

$$P(\xi_n(l) < [x i_n^{-1}]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp(-x).$$

Далі

$$\begin{gathered}(1-m_n)^{k+s-3} i_n P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}, \gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1}) \le \\ \le P(\xi(l)=k,\ \xi(l+r)=s) \le \\ \le (1-i_n)^{k+s-3} m_n P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1},\ \gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1}), \\ (1-m_n)^{k+s-3} i_n P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}) P(\gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1}) \le \\ \le P(\xi(l)=k) P(\xi(l+r)=s) \le \\ \le (1-i_n)^{k+s-3} m_n P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}) P(\gamma^+(\tau_{r+l}) < \eta_{l+r+1}).\end{gathered} \tag{12}$$

Знову використовуючи лінійчатість процесу $\gamma^+(x)$, маємо

$$\begin{gathered}|P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1},\ \gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1}) - \\ - P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}) P(\gamma^+(\tau_{l+r}) > \eta_{l+r+1})| \le \\ \le 2P\left(\gamma^+(\tau_{l+k}) \ge \sum_{j=l+k+1}^{l+r} \eta_j\right) \le 2m_n.\end{gathered} \tag{13}$$

З системи співвідношень (12) маємо оцінку зверху

$$\begin{gathered}P(\xi(l)=k) P(\xi(l+r)=s) - P(\xi(l)=k,\ \xi(l+r)=s) \le \\ \le (1-i_n)^{k+s-3} m_n (P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}) P(\gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1}) - \\ - P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1},\ \gamma^+(\tau_{l+r}) < \eta_{l+r+1})) + P(\gamma^+(\tau_{l+k}) > \eta_{l+k+1}, \\ \gamma^+(\tau_{r+l}) > \eta_{l+k+1})((1-i_n)^{k+s-3} m_n - (1-m_n)^{k+s-3} i_n).\end{gathered} \tag{14}$$

Аналогічно, використовуючи (12), одержуємо подібну оцінку знизу. Тепер, підсумовуючи (12) – (14), можна стверджувати, що

$$\max(\alpha_n(i_n^{-1}), \alpha_{\xi_n}(m_n^{-1})) = o(i_n) = o(m_n).$$

Таким чином, виконуються всі вимоги теореми 1, що й завершує доведення теореми 4.

Розглянемо приклад. Нехай $\zeta_{1,n}$ має експоненціальний розподіл:

$$P(\zeta_{1,n} > x) = \exp(-\lambda(n)x), \qquad \lambda(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Тоді одновимірний розподіл процесу $\gamma_n^+(t)$ не залежить від часу t. Таким чином, $m_n = i_n = c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тепер, припустивши, що $M\eta_1 < \infty$, можемо застосувати теорему 4.

4. Моменти конденсації точок. Розглянемо задачу, яка була запропонована у роботі [5].

Нехай відстані між точками-подіями на часовій осі визначаються послідовністю випадкових величин $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$. Зафіксуємо натуральне число k та дійсне $\varepsilon > 0$. Будемо відмічати точку-подію i тоді, коли виконується нерівність

$$\sum_{l=i}^{i+k} \xi_l \leq \varepsilon.$$

Дослідимо потік помічених точок за умови $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, де n — номер серії.

Розглянемо, як і раніше, номери помічених точок:

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & \text{коли } i\text{-а точка помічена;} \\ 0, & \text{коли } i\text{-а точка не помічена,} \end{cases}$$

$$\eta(l) = \min\{j\geq 0:\ \chi(l+j) = 1\},$$

$$\beta(m) = \beta(m-1) + \eta(\beta(m-1)).$$

Дослідження проведемо за умови, що послідовність $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$ є стаціонарною у вузькому значенні. Визначимо коефіцієнт сильного перемішування. Нехай $F_{\leq x} = \sigma(\xi_i,\ i\leq x)$, $F_{\geq x} = \sigma(\xi_i,\ i\geq x)$, тоді

$$\delta(t) = \sup_{A\in F_{\leq s},\ B\in F_{\geq s+t}} |P(AB) - P(A)P(B)|.$$

Позначимо

$$s_i = \sum_{l=i}^{i+k} \xi_l, \quad i\geq 1; \qquad p_n = P(s_i \leq \varepsilon).$$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови*:

1) $p_n \to 0,\quad \varepsilon\to 0;\quad \exists\, a_n\colon \delta(a_n) = O(p_n),\ a_n = o(p_n^{-1}),\ n\to\infty;$

2) $$\lim_{n\to\infty} k_n \sum_{j=1}^{l_n-1} (l_n - j)\, P(s_1\leq\varepsilon_n,\ s_{1+j}\leq\varepsilon_n) = 0,$$

де k_n *та* l_n *— цілочислові функції, які задовольняють умови*:

3) $$k_n\to\infty,\ \ l_n\to\infty,\ \ p_n l_n k_n \to 1,\qquad k_n\delta\left(\left[\frac{p_n^{-1} - k_n l_n}{k_n}\right]\right) \to 0,\ \ n\to\infty.$$

Тоді маємо

$$P(\beta_n(m)p_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - \exp(-x))^{*m}, \qquad x\geq 0.$$

Доведення. Перш за все переконаємось, що є такі функції k_n та l_n, які задовольняють умови 3. Їх побудова базується на міркуваннях роботи [6].

Нехай $\lambda(n)$ — така функція, що для неї виконуються співвідношення

$$\lambda(n)\to 0, \qquad \frac{\lambda(n)}{\delta([p_n^{-1/4}])} \to \infty, \qquad \lambda(n)\,p_n^{-1/4}\to\infty.$$

Можна покласти, наприклад,

$$\lambda(n) = \max\left\{\delta^{1/3}([p_n^{-1/4}]), \frac{1}{\lg(p_n^{-1/4})}\right\}.$$

Перевіримо умову 3:

а) $$k_n := \min\left\{\left[\frac{\lambda(n)}{\delta([p_n^{-1/4}])}\right], [\lambda(n)\,p_n^{-1/4}]\right\} \to \infty,$$

$$l_n := \left[\frac{p_n^{-1} - k_n p_n^{-1/4}}{k_n} \right] > \frac{p_n^{-1} - \lambda(n) p_n^{-1/2}}{\lambda(n) p_n^{-1/4}} = \frac{p_n^{-3/4}}{\lambda(n)} - p_n^{-1/4} \to \infty ;$$

б) $$\frac{(p_n^{-1} - k_n l_n) k_n^{\beta}}{l_n} \sim \frac{k^{1+\beta} p_n^{-1/4}}{l_n} < \frac{p_n^{-1/2-\beta/4}}{p_n^{-3/4}} \lambda^{1+\beta}(n) \to 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_n l_n p_n \to 1, \quad \beta > 0 ;$$

в) $$k_n \delta \left(\left[\frac{p_n^{-1} - k_n l_n}{k_n} \right] \right) \sim k_n \delta([p_n^{-1/4}]) \le \lambda(n) \to 0.$$

З визначення випливає

$$P(\eta(l) = m) = P(\eta(1) = m) = P(s_1 > \varepsilon, \ldots, s_{m-1} > \varepsilon, s_m \le \varepsilon),$$
$$P(\eta(1) < m) = 1 - P(\eta(1) \ge m+1) =$$
$$= 1 - P(s_1 > \varepsilon, s_2 > \varepsilon, \ldots, s_m > \varepsilon).$$

Таким чином, в цьому випадку граничні функції з твердження теореми 1 співпадають. Знайдемо вираз для цих функцій. Застосовуючи тотожність

$$P(CB) = P(C) - P(C\overline{B})$$

та покладаючи

$$A_i := \{ s_i > \varepsilon_n \}, \qquad \overline{A}_i := \{ s_i \le \varepsilon \}, \qquad b_n = \left[\frac{p_n^{-1} - k_n l_n}{k_n} \right],$$

одержуємо

$$P(\eta_n(1) > p_n^{-1}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{p_n^{-1/4}} A_i \right) =$$

$$= P(A_1, \ldots, A_{l_n} A_{l_n+b_n+1} \ldots A_{2l_n+b_n} \ldots A_{(k_n-1)(l_n+b_n)+1} \ldots A_{k_n l_n + (k_n-1) b_n}) -$$
$$- P\left(\bigcap_{j=1}^{k_n-1} (A_{j(l_n+b_n)+1} \ldots A_{(j+1)l_n + j b_n}) \left(\bigcup_{j=0}^{k_n-1} (\overline{A}_{j l_n + (j-1) b_n + 1} \ldots \overline{A}_{j(l_n+b_n)}) \right) \right). \quad (15)$$

Для першого доданку у (9) виконується оцінка (див., наприклад, [7, с. 242])

$$\left| P\left(\bigcap_{i=0}^{k_n-1} (A_{j(l_n+b_n)+1} \ldots A_{(j+1)l_n + j b_n}) \right) - \right.$$
$$\left. - \prod_{j=0}^{k_n-1} P(A_{j(l_n+b_n)+1} \ldots A_{(j+1)l_n + j b_n}) \right| \le \delta(b_n) k_n.$$

Далі

$$P(A_1 \ldots A_{l_n}) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^{l_n} \overline{A}_j \right).$$

Використовуючи нерівність Бонфероні, маємо

$$c_1 - c_2 \le P\left(\bigcup_{j=1}^{l_n} \overline{A}_j \right) \le c_1,$$

де

$$c_1 = \sum_{j=1}^{l_n} P(\overline{A}_j), \qquad c_2 = \sum_{1 \le i \le j \le l_n} P(\overline{A}_i \overline{A}_j) = \sum_{j=1}^{l_n - 1} (l_n - j) P(\overline{A}_1 \overline{A}_{1+j}).$$

Нехай $P\left(\bigcup_{j=1}^{l_n} \overline{A}_j\right) - c_1 = \delta_n$. Звідси робимо висновок, що

$$\prod_{j=0}^{k_n-1} P(A_{j(l_n+b_n)+1} \ldots A_{(j+1)l_n+jb_n}) =$$

$$= (1 - l_n p_n + \Delta_n)^{k_n} = (1 - l_n p_n)^{k_n} + \sum_n . \tag{16}$$

Тут

$$\sum_n = \sum_1^{k_n} C_{k_n}^m (1 - l_n p_n)^{k_n - m} \delta_n^m .$$

Із очевидних нерівностей $(1 - l_n p_n) \le 1$, $\delta_n \le c_2$ випливає

$$\sum_n \le \sum_{1 \le m \le k_n - 1} \frac{(k_n c_2)^m}{m!} \le \exp(k_n c_2) - 1 .$$

Таким чином, з умов 2, 3 випливає, що в (16) має місце збіжність до $\exp(-1)$. Другий доданок у (15) не перевищує величину

$$k_n b_n p_n = k_n \left[\frac{p_n^{-1} - k_n l_n}{k_n} \right] p_n ,$$

яка збігається до нуля завдяки умові 3.

Встановлена збіжність $P(\eta_n(1) < p_n^{-1}) \to 1 - \exp(-1)$. Далі, при заміні p_n^{-1} на $x p_n^{-1}$, а k_n на $k_n x$ для кожного фіксованого $x \ge 0$ неважко одержати

$$P(\eta_n(1) < p_n^{-1} x) \to 1 - \exp(-x).$$

Таким чином, вигляд граничних функцій з теореми 1 отримано.

Перевіримо умову (3′) з теореми 1.

Беручи до уваги, що послідовність $\xi(i)$ стаціонарна, та визначення $\xi(i)$, маємо

$$\alpha_{\eta_n, r_n}([p_n^{-1}]) \le \delta(r_n).$$

Тепер, поклавши $r_n = a_n$, з умови 1 одержуємо

$$r_n p_n \to 0, \qquad p_n^{-1} \delta(r_n) \to 0.$$

Теорему доведено.

1. *Gasanenko V. A.* Applications of thinning processes // Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. comp. – 1991. – **11**. – P. 35–51.
2. *Беляев Ю. К.* Предельные теоремы для редеющих потоков // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – **8**, вып. 2. – С. 175–184.
3. *Coleman R., Gastwirth J. L.* Some models for interaction of renewall processes related to neuron firing // J. Appl. Probab. – 1969. – **6.** – P. 38–58.
4. *Hoopen T., Reuver H.* Selective interaction of two independent reccurent processes // Ibid. – 1965. – **2**. – P.286–292.
5. *Jagers P., Lindwall T.* Thinning and rare events in point processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. and verw. Geb. – 1974. – **28**. – P. 89–98.
6. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применение. – 1984. – **4**, вып. 4. – С. 361–392.
7 *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 428 с.

Одержано 13.12.96