УДК 517.9

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

We investigate linear integral equations on a semiaxis which appear when constructing solutions of boundary-value problems in the theory of elasticity in domains such as a semi-infinite strip or a cylinder. By using the Mellin transformation and the theory of perturbations of linear operators, we establish general statements about solvability and asymptotic properties of solutions of the equations under consideration. We give the examples of application of the obtained general statements to concrete integral equations in the theory of elasticity.

Досліджено лінійні інтегральні рівняння на півосі, які виникають при побудові розв'язків граничних задач теорії пружності у таких областях, як півнескінченні смуга або циліндр. Використовуючи перетворення Мелліна та теорію збурень лінійних операторів, встановлено загальні твердження про розв'язність та асимптотичні властивості розв'язків таких рівнянь. Наведено приклади щодо застосування одержаних загальних тверджень до конкретних інтегральних рівнянь теорії пружності.

1. Использование метода суперпозиции [1] (гл. 8) при построении решений различных граничных задач линейной теории упругости в полуполосе или полубесконечном цилиндре приводит к необходимости исследования линейных интегральных уравнений на полуоси

$$X(s) - \int_0^\infty Q(s,t)X(t)\,dt = F(s), \qquad s>0, \tag{1}$$

где вид ядра $Q(s,t)$ определяется конкретной граничной задачей и выбором определенных систем функций, используемых при построении решения. Общие характерные свойства этих ядер в абстрактном виде можно сформулировать следующим образом. Функция Q представима суммой $Q = Q_0 + Q_1$, „главная" часть которой

$$Q_0(s,t) = t^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(st_n^{-1})\varphi_2(t_n t^{-1})t_n^{-1}, \tag{2}$$

где $t_n = t_1 + n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, для некоторого $t_1 \in (0, 1]$. При этом функции φ_j являются аналитическими в некотором секторе комплексной плоскости $\Sigma = \{\lambda: |\arg\lambda| < \theta_0\}$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, и допускают оценки

$$|\varphi_j(\lambda)| \le c|\lambda|^{\nu_1}(1+|\lambda|)^{-(\nu_1+\nu_2)}, \qquad \lambda\in\Sigma,\ j=1,2, \tag{3}$$

а Q_1 — непрерывная функция переменных $s \ge 0$, $t \ge 0$ с оценками

$$|Q_1(s,t)| \le cs^{\nu_0}(1+s)^{-(\nu_0+\nu_3)}(1+t)^{-(1+\nu_4)}, \qquad s,t\ge 0, \tag{4}$$

и показателями $\nu_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, и $\nu_0 \ge 0$.

В данной работе исследуются некоторые общие свойства разрешимости и асимптотические свойства решений при $s \to \infty$ интегральных уравнений вида (1) – (4). Отмеченная структура ядра Q дает возможность использовать при этом технику преобразования Меллина и теорию возмущений линейных операторов. Приведены конкретные примеры применения полученных общих утверждений.

2. Введем в рассмотрение необходимые для дальнейшего изложения функциональные пространства. Через $B_{\nu,\mu}$ для вещественных ν, μ обозначим банахово пространство комплекснозначных измеримых (по мере Лебега) на полуоси $R_+ = (0, \infty)$ функций с нормой

$$\|X\|_{B_{\nu,\mu}} = \operatorname{vrai}\sup_{t>0}\left|X(t)(1+t^{-1})^{\nu}(1+t)^{\mu}\right|,$$

причем полагаем $B = B_{0,0}$, так что $B = L_\infty(R_+)$. Пусть $C_0^\infty(R_+)$ — множество финитных бесконечно дифференцируемых на полуоси функций с носителями из R_+, а H_σ, $\sigma \in R$ — гильбертово пространство функций на R_+ с нормой

$$\|X\|_{H_\sigma} = \left\|X(t)t^{\sigma-1/2}\right\|_{L_2(R_+)} \equiv \left\{\int_0^\infty |X(t)|^2\, t^{2\sigma-1}dt\right\}^{1/2}.$$

Для вещественных σ через P_σ обозначим прямую $\operatorname{Re}\gamma = \sigma$, параллельную мнимой оси комплексной плоскости. Для $-\infty < b_1 < b_2 \le \infty$ введем в рассмотрение гильбертово пространство $H_2(b_1, b_2)$ [2] (гл. 7, § 2) аналитических в полосе $\operatorname{Re}\gamma \in (b_1, b_2)$ функций с равномерной по $\sigma \in (b_1, b_2)$ оценкой в норме $\|\cdot\|_{L_2(P_\sigma)}$.

Определим линейные интегральные операторы A и A_j, $j = 0, 1$:

$$A = A_0 + A_1, \qquad (A_jX)(s) = \int_0^\infty Q_j(s,t)X(t)\,dt, \qquad s > 0.$$

В принятых обозначениях уравнение (1) записывается в виде

$$X - AX = F$$

с линейным оператором A, непрерывно действующим в пространстве B (см. оценки (3), (4)). Наряду с уравнением (1) будем рассматривать также „невозмущенное" уравнение

$$X - A_0X = F_0. \tag{5}$$

Далее через I обозначим тождественное преобразование.

Введем в рассмотрение интегральное преобразование Меллина [3]

$$M[X](\gamma) = \int_0^\infty X(t)t^{\gamma-1}dt,$$

которое осуществляет изометрию (с точностью до нормировки) между пространствами H_σ и $L_2(P_\sigma)$, а его обращение имеет вид

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M[X](\xi)t^{-\xi}d\xi. \tag{6}$$

В частности, если $\mu > \nu$ и $\nu + \mu > 0$ функция $X \in B_{\nu,\mu}$, то $M[X] \in H_2(-\nu+\delta, \mu-\delta)$ для любого $\delta \in (0, \mu-\nu)$. Пусть функции

$$\Phi_j(\gamma) = M[\varphi_j](\gamma), \qquad \Phi(\gamma) = \Phi_1(\gamma)\Phi_2(\gamma), \qquad D(\gamma) = 1 - \Phi(\gamma). \tag{7}$$

Из условия аналитичности функций φ_j в секторе Σ и оценок (3) следует [3, с. 64], что функции $\Phi_j(\gamma), j = 1, 2$, аналитичны в полосе $\operatorname{Re}\gamma \in (-\nu_1\, \nu_2)$ и для любых $\delta \in (0, \nu_1 + \nu_2)$, $\theta \in (0, \theta_0)$ справедлива оценка

$$|\Phi_j(\gamma)| \le c(\delta,\theta)e^{-\theta|\operatorname{Im}\gamma|}, \qquad \operatorname{Re}\gamma \in (-\nu_1 + \delta, \nu_2 - \delta). \tag{8}$$

Введем в рассмотрение линейный сингулярный оператор S_σ:

$$(S_\sigma M)(\gamma) = \frac{1}{\pi}\fint_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{M(\xi)}{\xi-\gamma}d\xi$$

и интегральный оператор K_σ:

$$(K_\sigma M)(\gamma) = \left(1-\frac{\Phi(\gamma)}{2}\right)M(\gamma) + \frac{\Phi_1(\gamma)}{2\pi i}\fint_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_2(\xi)\zeta(\xi-\gamma+1, t_1)M(\xi)d\xi,$$

где $\zeta(\lambda, t_1)$ — обобщенная дзэта-функция [4] (гл. 13). Функция $\zeta(\lambda, t_1)$ является мероморфной во всей комплексной плоскости с единственным простым полюсом в точке $\lambda = 1$, причем для любого $\delta > 0$ найдутся такие $c = c(\delta)$ и $c_1 = c_1(\delta)$, что

$$|\zeta(\lambda, t_1) - (\lambda-1)^{-1}| \le c\big(|\operatorname{Im}\lambda|c_1 + 1\big), \qquad |\operatorname{Re}\lambda| \le \delta. \tag{9}$$

В частности, оператор K можно записать в виде

$$(KM)(\gamma) = \left(1-\frac{\Phi(\gamma)}{2}\right)M(\gamma) - \frac{1}{2}\Phi(\gamma)(S_\sigma M)(\gamma) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}V(\gamma,\xi)M(\xi)d\xi$$

с регулярным ядром (см. оценки (8), (9))

$$V(\gamma,\xi) = \Phi_1(\gamma)\big\{\Phi_2(\gamma)(\xi-\gamma) - \Phi_2(\xi)\zeta(\xi-\gamma+1, t_1)\big\} \in L_2(P_\sigma\times P_\sigma). \tag{10}$$

Таким образом, в силу оценок (8) и свойства непрерывности оператора S_σ в пространстве $L_2(P_\sigma)$ [3] (§ 5.3) заключаем, что при $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ оператор K непрерывно действует в пространстве $L_2(P_\sigma)$.

Теорема 1. *Для любого* $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ *в пространстве* $L_2(P_\sigma)$ *справедливо соотношение*

$$M[(I-A_0)X] = K_\sigma M[X], \qquad X \in H_\sigma, \tag{11}$$

т. е. операторы $I - A_0$ *и* K_σ *унитарно эквивалентны как операторы в пространствах* H_σ *и* $L_2(P_\sigma)$ *соответственно.*

Доказательство. Из непрерывности операторов $M[X]\colon H_\sigma \to L_2(P_\sigma)$ и $K_\sigma\colon L_2(P_\sigma) \to L_2(P_\sigma)$ и $A_0\colon H_\sigma \to H_\sigma$ при $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ с учетом плотности вложения $C_0^\infty(R_+)$ в H_σ получаем, что для доказательства теоремы достаточно установить справедливость соотношения (11) для функций из $C_0^\infty(R_+)$. Для $X \in C_0^\infty(R_+)$ и $\operatorname{Re}\gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$ из (2) имеем соотношение

$$M[A_0X](\gamma) = \Phi_1(\gamma)\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty t_n^{\gamma-1}\varphi_2(t_n t^{-1})t^{-1}X(t)dt.$$

Применяя здесь формулу обращения (6) при $\sigma \in (\operatorname{Re}\gamma, \nu_2)$ и меняя порядки суммирования и интегрирования, получаем

$$M[A_0X](\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\Phi_1(\gamma)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_2(\xi)\zeta(\xi-\gamma+1, t_1)M[X](\xi)d\xi, \tag{12}$$

где $-\nu_1 < \operatorname{Re}\gamma < \sigma < \nu_2$. Тогда, используя в (12) формулы Сохоцкого, с учетом оценок (8), (9) и включения $M[X] \in H_2(-\nu_1, \nu_2)$, $X \in C_0^\infty(R_+)$ получаем равенство (11). Теорема доказана.

Напомним [5, с. 44], что линейный замкнутый оператор T, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, называется нетеровым, если образ оператора T является замкнутым в B_2, а ядро $\ker T$ и коядро $\operatorname{coker} T$ оператора T конечномерны. При этом число

$$\varkappa(T) = \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$$

называется индексом оператора T. На основании теоремы 1 устанавливаем следующее утверждение относительно свойств нетеровости оператора $I - A$.

Лемма 1. *Пусть для некоторого*

$$\sigma \in (-\nu_1, \nu_2) \cap (-\min(\nu_0, \nu_4), \min(1, \nu_3)), \tag{13}$$

выполнено условие

$$D(\gamma) \neq 0, \qquad \gamma \in P_\sigma. \tag{14}$$

Тогда оператор $I - A$ является нетеровым в пространстве H_σ с индексом

$$\varkappa_\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{D'(\gamma)}{D(\gamma)} d\gamma. \tag{15}$$

Доказательство. Отметим, что из (8) и аналогичных оценок для производных $\Phi'_j(\gamma)$ при выполнении условий (13), (14) вытекает конечность величины $\varkappa_\sigma$ из (15). Далее, для σ из интервала (13) верно включение (см. оценки (3), (4))

$$Q_1(s,t) s^{\sigma - 1/2} t^{-\sigma + 1/2} \in L_2(R_+ \times R_+),$$

а значит [6, с. 382], при этих σ оператор A_1 является вполне непрерывным оператором в пространстве H_σ. Тогда [5, с. 41] утверждение леммы достаточно доказать для оператора $I - A_0$ а из теоремы 1 получаем, что для этого достаточно установить нетеровость оператора K_σ в пространстве $L_2(P_\sigma)$ и определить его индекс. Пусть, для определенности, $\sigma < 0$. Рассмотрим на функциях $M \in L_2(P_\sigma)$ отображение U:

$$(UM)(\lambda) = \lambda^{-1} M(\lambda^{-1}), \qquad \lambda \in \Gamma_\sigma = \left\{ \lambda \in C \colon \left| \lambda - (2\sigma)^{-1} \right| = |2\sigma|^{-1} \right\}.$$

Оператор U унитарно отображает пространство $L_2(P_\sigma)$ на $L_2(\Gamma_\sigma)$ и

$$T_\sigma U = U K_\sigma, \tag{16}$$

где оператор T_σ имеет вид

$$(T_\sigma z)(\lambda) = \left(1 - \frac{\Phi(\lambda^{-1})}{2}\right) z(\lambda) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \Phi(\lambda^{-1}) \int\limits_{\Gamma_\sigma} \frac{z(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\sigma} \frac{V(\lambda^{-1}, \tau^{-1}) z(\tau)}{\tau\lambda} d\tau.$$

При этом функция $\Phi(\lambda^{-1})$ является непрерывной на окружности Γ_σ (см. оценки (8)) и согласно (10) имеем

$$\lambda^{-1} \tau^{-1} V(\lambda^{-1}, \tau^{-1}) \in L_2(\Gamma_\sigma \times \Gamma_\sigma).$$

Тогда с учетом условия (14) заключаем [5, с. 139], что оператор T_σ является нетеровым в пространстве $L_2(\Gamma_\sigma)$ с индексом, определяемым выражением

$$\varkappa(T_\sigma) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{1}{D(\lambda^{-1})} \right]_{\Gamma_\sigma} \equiv \varkappa_\sigma,$$

откуда и из (16) получаем утверждение леммы.

3. Следующее утверждение, наряду с теоремой 1, играет важную роль при получении оценок на бесконечности ограниченных решений интегральных уравнений (1) и (5).

Теорема 2. *Пусть* $-\nu_1 < -\nu < \mu < \nu_2$ *и предположим, что* $X \in H_\sigma$, $\sigma \in (-\nu, \mu)$ *— решение уравнения* (5) *с правой частью* $F_0 \in B_{\nu,\mu}$. *Тогда функция* $D(\gamma)M[X](\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1)$ *для любого* $\sigma_1 \in (\sigma, \mu)$ *и для нее справедливо представление*

$$D(\gamma)M[X](\gamma) = M[F_0](\gamma) + \Phi_1(\gamma)N_\sigma(\gamma), \quad \operatorname{Re}\gamma \in (\sigma, \mu), \tag{17}$$

где $N_\sigma(\gamma)$ *— аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Re}\gamma > \sigma$ *функция, для которой при любом* $\delta > 0$ *верна оценка*

$$|N_\sigma(\gamma)| \leq c(\delta)\|X\|_{H_\sigma}(|\operatorname{Im}\gamma| + 1)^{c_1(\delta)}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in (\sigma + \delta, \delta^{-1}). \tag{18}$$

Доказательство. Положим

$$N_\sigma(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_2(\xi)\zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)M[X](\xi)\,d\xi, \quad \operatorname{Re}\gamma > \sigma. \tag{19}$$

Аналитичность $N_\sigma(\gamma)$ при $\operatorname{Re}\gamma > \sigma$ и оценка (18) вытекают из условия $M[X](\gamma) \in L_2(P_\sigma)$ и оценок (8), (9). Используя включение

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{M(\xi)}{\xi - \gamma}\,d\xi \in H_2(\sigma, \infty)$$

и соотношение

$$L_2(P_\sigma) - \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{M(\xi)}{\xi - \gamma - \varepsilon}\,d\xi = -M(\gamma) + (S_\sigma M)(\lambda), \quad M \in L_2(P_\sigma)$$

(см. [3]), получаем, что функция $\Phi_1(\gamma)N_\sigma(\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1)$ для любого $\sigma_1 \in (\sigma, \nu_2)$ и ее граничное значение (в смысле $L_2(P_\sigma)$) на прямой P_σ определяется выражением

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_1(\gamma + \varepsilon)N_\sigma(\gamma + \varepsilon) = -\frac{1}{2}\Phi(\gamma)M[X](\gamma) + \Phi_1(\gamma)N_\sigma(\gamma).$$

Отсюда и из (5), (11) с учетом $M[F_0](\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1)$ для всех $\sigma_1 \in (\sigma, \mu)$ следует, что функция $D(\gamma)M[X](\gamma)$, $\gamma \in P_\sigma$, является граничным значением функции из $H_2(\sigma, \sigma_1)$, выражаемой правой частью формулы (17) с $N_\sigma(\gamma)$, определенной согласно (19). Теорема доказана.

Приведем два следствия из теоремы 2.

***Следствие* 1.** *Предположим, что в некоторой полосе* $\operatorname{Re}\gamma \in (\nu_-, \nu_+)$, *где числа* $-\nu_1 \leq \nu_- < 0 < \nu_+ \leq \nu_2$, *функция* $D(\gamma)$ *имеет единственный простой корень в точке* $\gamma = 0$. *Пусть* $\nu_0 > 0$ *и* $X \in H_\sigma$, $\sigma \in (-\min(\nu_0, \nu_4, -\nu_-), 0)$, *— решение интегрального уравнения* (1) *с правой частью* $F \in B_{\nu,\mu}$ *для некоторых* $\nu > |\sigma|$ *и* $\mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3))$. *Тогда найдется такая постоянная* a, *что*

$$X(s) - a \in B_{0,\alpha} \tag{20}$$

для произвольных $\alpha \in (0, \mu)$.

Доказательство. Можно считать, что функция $X \in H_\sigma$ является решением уравнения (5) с правой частью

$$F_0 = A_1 X + F, \quad A_1 X \in B_{\nu_0, \nu_3}, \quad F \in B_{\nu, \mu} \tag{21}$$

(см. оценку (4)). Тогда согласно теореме 2 функция $M[X](\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1)$ для любого $\sigma_1 \in (\sigma, 0)$ и выражение (17) дает мероморфное продолжение $M[X](\gamma)$ в полосу $\operatorname{Re}\gamma \in (\sigma, \mu)$ с единственным простым полюсом в точке $\gamma = 0$. Используя в (17) формулу обращения (6) и оценки (8), (18), получаем в пространстве H_σ равенство

$$X(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{M[F_0](\gamma+\varepsilon) + \Phi_1(\gamma+\varepsilon) N_\sigma(\gamma+\varepsilon)}{D(\gamma+\varepsilon)} s^{-\gamma} d\gamma =$$

$$= F_0(s) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \Phi_1(\gamma)[\Phi_2(\gamma) M[F_0](\gamma) + N_\sigma(\gamma)] \frac{s^{-\gamma}}{D(\gamma)} d\gamma,$$

где $\sigma_1 \in (\sigma, 0)$. Применяя далее теорему о вычетах, для $\alpha \in (0, \mu)$ имеем

$$X(s) - F_0(s) = -\left\{ \frac{M[F_0](0) + \Phi_1(0) N_\sigma(0)}{D'(0)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Phi_1(\gamma)[\Phi_2(\gamma) M[F_0](\gamma) + N_\sigma(\gamma)] \frac{s^{-\gamma}}{D(\gamma)} d\gamma =$$

$$= a + O(s^{-\alpha}), \quad s \to \infty. \tag{22}$$

Из (21) и (22) получаем утверждение (20).

Следствие 2. *Пусть функция* $D(\gamma)$ *удовлетворяет условиям следствия* 1. *Предположим, что* $X \in B$ — *решение уравнения* (1) *с правой частью* $F \in B_{0,\mu}$ *для некоторого* $\mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3))$. *Тогда для функции* X *справедливо утверждение* (20).

Доказательство. Функция $X_1 = X - A_1 X - F \equiv A_0 X$ принадлежит пространству $B_{\nu_1, 0}$, значит, $X_1 \in H_\sigma$ для $\sigma \in (-\nu_1, 0)$. При этом X_1 удовлетворяет уравнению (5) с правой частью $F_0 = A_0(F + A_1 X) \in B_{\nu_1, \mu}$ (см. оценки (3), (4)). Таким образом, утверждение следствия вытекает из следствия 1, примененного к уравнению (5).

4. Всюду в этом пункте, в том числе и в формулировках утверждений, предполагается, что функция $D(\gamma)$ удовлетворяет условиям следствия 1, причем индекс $\kappa_\sigma = 0$ при некотором (а значит, и при любом) $\sigma \in (\nu_-, 0)$. Кроме того, считается, что показатели ν_j из (3), (4) удовлетворяют неравенствам

$$\nu_j \geq 1, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \nu_4 > 0. \tag{23}$$

Введем в рассмотрение союзный к A оператор A^*:

$$(A^* Y)(s) = \int\limits_0^\infty Q(t, s) Y(t) dt$$

и линейные пространства функций

$$E = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_{0,\varepsilon}, \quad E^* = \bigcap_{\varepsilon \in (0,1)} B_{0,\varepsilon}.$$

Для дальнейшего важно с учетом (23), что оператор A действует из E в E, а оператор A^* переводит $B_{0,1} \subset E^*$ в E^*, причем

$$(AX, Y) = (X, A^*Y), \quad X \in E, \quad Y \in B_{0,1}, \tag{24}$$

где билинейная форма

$$(X, Y) = \int_0^\infty X(t)Y(t)dt, \quad X \in E, \quad Y \in E^*.$$

Лемма 2. *Однородное уравнение*

$$Y(s) - (A^*Y)(s) = 0, \quad s > 0, \tag{25}$$

имеет нетривиальное решение $Y \in B_{0,1}$.

Доказательство. Сделаем в (25) замену неизвестной функции $Y^*(s) = s\,Y^*(s)$, тогда для $Y^*(s)$ получим уравнение

$$Y^*(s) - \int_0^\infty Q^*(s,t)Y^*(t)dt = 0 \tag{26}$$

с ядром

$$Q^*(s,t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^\infty \varphi_1^*\left(st_n^{-1}\right)\varphi_2^*\left(t_n t^{-1}\right)t_n^{-1} + \frac{s}{t}Q_1(t,s),$$

$$\varphi_j^*(\lambda) = \varphi_{3-j}(\lambda^{-1}), \quad j = 1, 2, \quad \lambda \in \Sigma.$$

Из (3), (4) имеем оценки

$$\left|\varphi_j^*(\lambda)\right| \le c|\lambda|^{\nu_2}(1+|\lambda|)^{-(\nu_1+\nu_2)}, \quad \lambda \in \Sigma,$$

$$st^{-1}|Q_1(t,s)| \le cs(1+s)^{-(1+\nu_4)}(1+t)^{-(1+\nu_3)}, \quad s, t \ge 0.$$

Таким образом, уравнение (26) имеет вид (1) – (4), причем соответствующая (7) функция

$$D^*(\gamma) \equiv M\left[\varphi_1^*\right](\gamma)M\left[\varphi_2^*\right](\gamma) = D(-\gamma), \quad \mathrm{Re}\,\gamma \in (-\nu_2, \nu_1)$$

удовлетворяет условиям следствия 1 на функцию $D(\gamma)$ (с заменой ν_- на $-\nu_+$ и ν_+ на $-\nu_-$). Для соответствующей величины индекса κ_σ^* из (15), используя теорему Коши, получаем $\kappa_\sigma^* = 1 - \kappa_{\sigma_1} = 1$, $\sigma \in (-\nu_+, 0)$, $\sigma_1 \in (\nu_-, 0)$. Так как $\kappa_\sigma^* > 0$, то согласно лемме 1 и следствию 1 заключаем, что найдется нетривиальное решение $Y^* \in B_{1,0}$ уравнения (26), а значит, существует нетривиальное решение $Y(s) = s^{-1}Y^*(s) \in B_{0,1}$ уравнения (25).

Следуя [7, с. 37], назовем интегральное уравнение (1) регулярным, если выполнено условие

$$1 - \int_0^\infty |Q(s,t)|dt \equiv q(s) > 0, \quad s \ge 0. \tag{27}$$

При выполнении условия (27) для любой $F \in B$ с оценкой $|F(s)| \le cq(s)$ (для почти всех $s > 0$) существует решение $X \in B$ интегрального уравнения (1). Это следует из общих результатов Л. В. Канторовича о разрешимости функциональных уравнений в полуупорядоченных K-пространствах (см., например, [8] гл. 13).

Введем в рассмотрение функцию

$$q_0(s) = 1 - \int_0^\infty Q(s,t)\,dt \in B.$$

Используя преобразование Меллина и теорему о вычетах, имеем

$$\int_0^\infty Q_0(s,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\Phi_2(0)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_1(\gamma)\zeta(1-\gamma,t_1)s^{-\gamma}d\gamma =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi}\Phi_2(0)\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\Phi_1(\gamma)\zeta(1-\gamma,t_1)s^{-\gamma}d\gamma = 1 + O(s^{-\sigma_1}), \quad s\to\infty,$$

где $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ и σ_1 — произвольное число из интервала $(0, \nu_2)$. Таким образом, функция $q_0(s) \in E$.

Лемма 3. *Пусть уравнение* (1) *является регулярным. Тогда уравнение* (25) *имеет единственное (с точностью до нормировки) нетривиальное решение* $Y_0 \in B_{0,1}$, *причем* $(q_0, Y_0) \neq 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно установить, что $(q_0, Y) \neq 0$ для любой нетривиальной функции Y из утверждения леммы 2. Пусть $X \in B$ — решение уравнения (1) с $F \in E$, тогда согласно следствию 2 функция $X - a \in E$ для некоторой константы a и из (1) имеем

$$(I-A)X_1 = F - a\,q_0, \quad X_1 = X - a \in E. \tag{28}$$

Пусть $Y \in B_{0,1}$ — произвольная функция из утверждения леммы 2, тогда, используя (24), (25), получаем из (28) равенство

$$a(q_0, Y) = (F, Y). \tag{29}$$

В силу условия регулярности (27) уравнение (1) имеет решение $X \in B$ (по крайней мере, одно) для любой правой части $F \in C_0^\infty(R_+)$. Поэтому если предположить, что $(q_0, Y) = 0$, то из (29) имеем $(F, Y) = 0$ для любой функции $F \in C_0^\infty(R_+)$, откуда заключаем, что функция $Y = 0$. Итак, $(q_0, Y) \neq 0$, если $Y \neq 0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *является регулярным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *уравнение* (1) *однозначно разрешимо в пространстве* H_σ *для любого* $\sigma \in (\nu_-, 0)$;

2) *для любой функции* $F \in E$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* X *в пространстве* B. *Если, кроме того,* $F \in B_{0,\mu}$ *для некоторого* $\mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3))$, *то для этого решения*

$$X - a \in B_{0,\alpha} \quad \forall\,\alpha \in (0,\mu), \quad a = (F, Y_0)/(q_0, Y_0), \tag{30}$$

где $Y_0 \in B_{0,1}$ — *нетривиальное решение однородного уравнения* (26).

Доказательство. В силу леммы 1, следствия 1 и леммы 3 (с учетом (29)) доказательство теоремы сводится к установлению единственности решений уравнения (1) в пространстве B. Предположим, что $X_0 \in B$ — решение однородного уравнения (1). Тогда, в частности, функция $X_0(s)$ является непрерывной при $s \geq 0$ и согласно соотношениям (28), (29) заключаем, что $X_0(s) \to 0$, $s \to \infty$. Пусть $s_0 \geq 0$ — такая точка, что $|X_0(s_0)| = \|X_0\|_B$, тогда, используя (27), получаем

$$\| X_0 \|_B \leq (1 - q(s_0)) \| X_0 \|_B < \| X_0 \|_B,$$

т. е. функция $X_0(s) \equiv 0$. Теорема доказана.

5. Рассмотрим примеры использования полученных результатов.

При рассмотрении задачи о статическом деформировании упругой полуполосы [9] методом суперпозиции получаем интегральное уравнение (1) с ядром

$$Q(s, t) = \frac{16 s^3 \operatorname{ch}^2 s}{\pi \Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2 (t^2 + \alpha_n^2)^2}, \tag{31}$$

где $\Delta(s) = \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s + s$, последовательность $\alpha_n = \pi(n - 1/2)$, $n = 1, 2, \ldots$. При этом уравнение (1) является регулярным с функцией $q(s) = 2s/\Delta(s)$, причем

$$Q(s, t) = Q_0(s, t) + \left(\frac{\operatorname{ch}^2 s}{\Delta(s)} - 1 \right) Q_0(s, t), \tag{32}$$

где Q_0 имеет вид (2) с функциями

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\lambda^2 + \pi^2)^2}, \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\lambda^2 \pi^2 + 1)^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

и последовательностью $t_n = n - 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Параметры ν_j из оценок (3), (4) в рассматриваемой ситуации принимают значения: $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 1$, $\nu_0 = 2$, ν_3 — любое положительное число, а ν_4 — любое число, меньшее трех. В силу равенства [3, с. 251]

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{\gamma+2}}{(s^2 + 1)^2} ds = \frac{\pi(\gamma + 1)}{4 \cos(\pi\gamma/2)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1),$$

для функции $D(\gamma)$ из (7) получаем выражение

$$D(\gamma) = 1 - \frac{(\gamma + 1)^2}{\cos^2 \pi\gamma/2}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1).$$

При этом $D(\gamma)$ в полосе $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, 1)$ имеет лишь один простой корень в точке $\gamma = 0$, а величина $\kappa_\sigma = 0$, $\sigma \in (-2, 0)$ (см. (15)). Таким образом, к уравнению (1) с ядром (31) применима теорема 3 с $\nu_- = -2$, $\nu_+ = 1$. В рассматриваемой ситуации можно определить постоянную a из утверждения (30) явным образом через правую часть $F \in E$. Действительно, в случае ядра (31) непосредственно проверяется, что однородное уравнение (25) имеет решение $Y(t) = \Delta(t)/(t \operatorname{ch}^2 t) \in B_{0,1}$. Тогда с учетом $q_0(s) = 2s/\Delta(s)$ получаем для a из (30) выражение

$$a = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(t) \frac{\Delta(t)}{t \operatorname{ch}^2 t} dt.$$

Построение решения смешанной плоской граничной задачи для упругой полуполосы по методу суперпозиции [10] приводит к исследованию интегрального уравнения (1) с ядром

$$Q(s, t) = -\frac{16 s \operatorname{ch}^2 s}{\pi(3 - 4\nu) \Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(s) Q_n(t)}{(s^2 + \alpha_n^2)^2 (t^2 + \alpha_n^2)^2}, \tag{33}$$

где $\Delta(t)$ и α_n — те же, что и в (31), параметр $\nu \in (0, 1/2)$, а функции

$Q_n(s) = \nu\alpha_n^2 - (1-\nu)s^2$. Простые оценки показывают, что уравнение (1) с ядром (33) является регулярным, причем $q(s) \geq 1 - 2/\pi > 0$, $s \geq 0$. Таким образом, норма оператора $\| A \|_B < 1$ и для любой функции $F \in B$ существует единственное решение $X \in B$ уравнения (1). Для получения оценки этого решения при $s \to \infty$ воспользуемся теоремой 2. Прежде всего ядро (33) можно записать в виде (32), где Q_0 определяется выражением (2) с функциями

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{16\lambda(\nu\pi^2 - (1-\nu)\lambda^2)}{\pi(3-4\nu)(\lambda^2+\pi^2)^2}, \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{\pi\lambda(\nu\pi^2\lambda^2 - (1-\nu))}{(\lambda^2\pi^2+1)^2}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

и $t_n = n - 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$. При этом (см. 3), (4)) $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_0 = 0$, ν_3 — любое положительное число, а ν_4 — любое число, меньшее единицы. Для функции $D(\gamma)$ из (7) получаем

$$D(\gamma) = 1 - \frac{(1-2\nu)^2 - \gamma^2}{(3-4\nu)\cos^2 \pi\gamma/2}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in (-1, 1).$$

В полосе $|\operatorname{Re}\gamma| < 1$ эта функция имеет лишь два простых корня $\pm\gamma_0$, причем $\gamma_0 = \gamma_0(\nu) \in (1/2, 1)$. Пусть $X \in B$ — решение уравнения (1) с ядром (33) и правой частью $F \in B_{0,\mu}$ для некоторого $\mu \in (\gamma_0, 1)$. Положим функцию $X_1 = X - A_1X - F \equiv A_0X \in B_{1,0}$, тогда X_1 удовлетворяет уравнению (5) с правой частью $F_0 = A_0(A_1X + F) \in B_{1,\mu}$. Отсюда и из теоремы 2, аналогично доказательству следствия 1, для непрерывной функции $X - F \in B$ получаем асимптотику

$$X(s) - F(s) = as^{-\gamma_0} + O(s^{-\alpha}), \quad s \to \infty,$$

справедливую для любого $\alpha \in (\gamma_0, \mu)$. Отметим, что эта асимптотика играет важную роль при анализе свойств решения исходной смешанной граничной задачи теории упругости в окрестностях угловых точек полуполосы.

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
3. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 480 с.
4. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: В 2 т. – М.: Физматгиз, 1963. – Т. 2. – 516 с.
5. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 496 с.
6. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 798 с.
8. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 408 с.
9. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О методах однородных решений и суперпозиции в статических граничных задачах для упругой полуполосы // Прикл. механика. – 1986. – **22,** № 8. – С. 84–93.
10. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Методы однородных решений в смешанной задаче для упругой полуполосы // Там же. – 1990. – **26,** № 2. – С. 98–108.

Получено 21.10.96