УДК 517. 5

М. Є. Дудкін (Нац. техн. ун-т України "КПІ")

ІНВАРІАНТНІ СИМЕТРИЧНІ ЗВУЖЕННЯ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА*. I

Necessary and sufficient conditions of the S-invariance are proved for a subset dense in the separable Hilbert space $\mathcal{H}$.

Доведені необхідні та достатні умови S-інваріантності щільної в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ підмножини.

1. Вступ. Опишемо коротко основні результати роботи. Нехай в $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ задано необмежений самоспряжений оператор A і підмножина $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$, яка задовольняє умови:

1) множина Φ є ядром форми γ_A, тобто $\overline{\gamma_A \quad \Phi} = \gamma_A$, де $\gamma_A(f, g) = (Af, Ag)$;

2) для будь-яких $f_1, f_2 \in \Phi$ маємо $f_1 \cdot f_2 \in \Phi$, тобто підмножина Φ замкнена відносно операції множення;

3) для будь-якої обмеженої множини $T \subset \mathbb{R}^n$ знайдеться вектор $f \in \Phi$ такий, що $f(x) = 1$ м. с. (майже скрізь за мірою dx) на T;

4) для будь-якого $f \in \Phi$ $\operatorname{supp}(f)$ — обмежений (носій $f \in \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ розуміється в сенсі узагальнених функцій).

Припустимо, що в просторі $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ існує нормальний оператор S, який задовольняє умови:

5) простір $\mathcal{H}_+$ — S-інваріантний (де $\mathcal{H}_+$ — простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_+ = (Af, Ag)\ \forall f, g \in \mathcal{D}(A)$);

6) існує стандартно пов'язане з оператором S оснащення

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \tag{1}$$

таке, що:

а) $\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно із $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$;

б) узагальнений спектр $\sigma(S)$ оператора S, породжений оснащенням (1), простий і збігається з цілком узагальненим: $\sigma(S) = \tilde{\sigma}(S)$.

Під цілком узагальненим спектром оператора S розуміємо узагальнений спектр без власних значень оператора S в $\mathcal{H}$.

Розглядаються звуження оператора A на підмножини

$$\Phi\left(N_0^c\right) = \{ f \in \Phi \mid f(x) = 0 \text{ м. с. } x \in N \},$$

де N — замкнена в $\mathbb{R}^n$ підмножина, та

$$\Phi(N^c) = \{ f \in \Phi \mid \operatorname{supp}(f) \cap N = \varnothing \},$$

де N — відкрита в $\mathbb{R}^n$ підмножина. В роботі встановлено, що оператор $\dot{A} = A \restriction \Phi\left(N_0^c\right) \vee \Phi(N^c)$ є симетричним оператором з ненульовими індексами дефекту і S-інваріантною областю визначення тоді і тільки тоді, коли:

$$\rho(\Lambda) = 0, \quad \operatorname{Cap}(N) \neq 0,$$

---

* Частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій (проект № 1/238).

де Λ — підмножина цілком узагальненого спектра $\tilde{\sigma}(S)$ оператора S, яка відповідає звуженню $\dot{A}$ за правилом

$$\mathcal{D}_\Lambda \equiv \mathcal{D}(\dot{A}) = \{ f \in \mathcal{H}_+ \mid \langle \omega_\lambda, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda \subset \sigma(S) \}$$

($\rho(\cdot)$ — спектральна міра оператора S в його розкладі за узагальненими власними векторами в оснащенні (1); $\mathrm{Cap}(\cdot)$ — ємність множини).

Множини N і Λ знаходяться у взаємно однозначній відповідності.

Цей результат базується на двох допоміжних.

I. Оператор A, звужений на множину $\Phi\left(N_0^c\right)$ або $\Phi\,(N^c)$, є істотно самоспряженим тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Cap}(N) = 0$.

II. Оператор A, звужений на множину $\Phi\left(N_0^c\right)$ або $\Phi\,(N^c)$, не є щільно визначеним тоді і тільки тоді, коли $\rho(\Lambda) \neq 0$.

2. Попередні відомості. Введемо основні поняття і позначення та сформулюємо відомі твердження, що будуть використовуватись в подальшому.

Позначимо через $\mathcal{H}$ сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Розглянемо в просторі $\mathcal{H}$ необмежений самоспряжений оператор $A = A^*$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$.

Утворимо по оператору A оснащення простору $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{2}$$

де $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ зі скалярним добутком $(u, v)_+ = (Au, Av)$ і нормою $\|u\|_+ = \sqrt{(u,u)_+}$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$, $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- = \|A^{-1}\cdot\|$. Нехай $\langle \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$ — спарення в оснащенні (2), де $\omega \in \mathcal{H}_-$, $\varphi \in \mathcal{H}_+$.

Позначимо через $I_{x,y}$ оператор канонічного ізометричного ізоморфізму, що діє із простору $\mathcal{H}_x$ в простір $\mathcal{H}_y$, де індекси x, або y позначають +, або –, або 0.

Для скалярних добутків $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_+$, $(\cdot,\cdot)_-$ та спарення $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ виконуються співвідношення [1 – 4]

$$\begin{gathered}
(I_{+,-}\omega, \varphi)_+ = (\omega, I_{-,+}\varphi)_-, \quad \omega \in \mathcal{H}_-,\ \varphi \in \mathcal{H}_+, \\
(I_{0,-}\omega, f)_+ = (\omega, I_{-,0} f)_-, \quad \omega \in \mathcal{H}_-,\ f \in \mathcal{H}, \\
(f, I_{0,+}\varphi) = (I_{+,0} f, \varphi)_+, \quad f \in \mathcal{H},\ \varphi \in \mathcal{H}_+, \\
\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = (f, \varphi), \quad f \in \mathcal{H},\ \varphi \in \mathcal{H}_+, \\
I_{x,y} = I_{y,x}^{-1} \quad \forall\, x, y \in \{+, -, 0\}, \\
I_{+,-} = I_{+,0} I_{0,-}, \\
I_{0,-} \restriction \mathcal{H} = I_{+,0},
\end{gathered} \tag{3}$$

де $\restriction$ позначає звуження оператора на відповідну множину (в даному випадку звуження $I_{0,-}$ на простір $\mathcal{H}$).

Розглянемо шкалу гільбертових просторів

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{4}$$

де трійка просторів

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \tag{5}$$

сама утворює деяке оснащення $\mathcal{H}$. Нехай $\langle \omega, \varphi \rangle_{\mathfrak{H}}$ позначає спарення в оснащенні (5), де $\omega \in \mathfrak{H}_-$, $\varphi \in \mathfrak{H}_+$.

Для спарень $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ та $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$ виконується

$$\langle \omega, \varphi \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \omega \in \mathfrak{H}_+,\ \varphi \in \mathcal{H}_-. \tag{6}$$

За допомогою вектора $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ або підмножини $F \in \mathcal{H}_-$ такої, що $\overline{F} \subset \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H} = \{0\}$, можна вводити у просторі $\mathcal{H}$ щільні підмножини, використовуючи певну конструкцію, яка описана в наступних твердженнях [5 – 8]. (Множину $\mathfrak{D}$ будемо називати щільною у просторі $\mathcal{H}$, якщо її замикання за нормою $\mathcal{H}$ збігається з $\mathcal{H}$, тобто $\overline{\mathfrak{D}} = \mathcal{H}$. Риска над виразом тут і надалі позначатиме замикання множини за нормою відповідного простору.)

Теорема 1 [5]. *Кожна множина $F \in \mathcal{H}_-$ (2) породжує множину*

$$\mathfrak{D}_F = \{ f \in \mathcal{H}_+ \mid \langle \omega_\lambda, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \ \forall\, \omega \in F \},$$

яка є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Множина $\mathfrak{D}_F$ є щільною в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{F} \in \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

Доведення. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що множина F замкнена, тобто $\overline{F} = F$. Покажемо, що множина $\mathfrak{D}_F$ є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Нехай $f_n \in \mathfrak{D}_F$ — збіжна послідовність в $\mathcal{H}_+$ $(f_n \to f)$. Тоді з неперервності кожного лінійного функціоналу $l_\omega(f_n) := \langle f_n, \omega \rangle_{\mathcal{H}}$ $\forall\, \omega \in F$ випливає, що $l_\omega(f) = 0$, тобто $f \in \mathfrak{D}_F$. Таким чином, $\mathfrak{D}_F$ — замкнена множина в $\mathcal{H}_+$.

Далі доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що існує вектор $\omega \in F$ такий, що $\omega \in \mathcal{H}$. Тоді за властивостями (3) оснащення (2): $\langle \omega, f \rangle_{\mathcal{H}} = (\omega, f) = 0$ $\forall\, f \in \mathfrak{D}_F$, тобто $(\omega, \mathfrak{D}_F) = 0$ або $\omega \perp \mathfrak{D}_F$. Отже, множина $\mathfrak{D}_F$ не щільна в $\mathcal{H}$: $\overline{\mathfrak{D}_F} \neq \mathcal{H}$.

Навпаки, припустимо, що $F \in \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H}$, але $\overline{\mathfrak{D}_F} \neq \mathcal{H}$. Тоді існує вектор $0 \neq f \in \mathcal{H}$ такий, що $f \perp \mathfrak{D}_F$. Звідси, враховуючи властивості (3) оснащення (2), маємо

$$0 = (f, \mathfrak{D}_F) = \langle f, \mathfrak{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = (I_{+,-} f, \mathfrak{D}_F)_+. \tag{7}$$

За означенням $\mathfrak{D}_F$

$$0 = \langle F, \mathfrak{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = (I_{+,-} F, \mathfrak{D}_F)_+. \tag{8}$$

Порівнюючи вирази (7) і (8), знаходимо, що $I_{+,-} f \in I_{+,-} F$ або $f \in F \not\subset \mathcal{H}$, що можливо тільки для $f = 0$. Одержана суперечність завершує доведення.

Покладемо $\mathfrak{N}_+ = I_{+,-} F$, $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{N}_+ \oplus \mathfrak{D}_+$, де $\mathfrak{D}_+ \equiv \mathfrak{D}_F$; $\mathcal{H} = \mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{D}_0$, де $\mathfrak{N}_0 = I_{0,+} \mathfrak{N}_+$ і $\mathfrak{D}_0 = I_{0,+} \mathfrak{D}_+$.

Теорема 2 [8]. *Замкнена в $\mathcal{H}_+$ підмножина $\mathfrak{D}_+$ є щільною в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{N}_0$ має нульовий перетин з $\mathcal{H}_+$, тобто*

$$\overline{\mathfrak{D}}_+ = \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ = \{0\}.$$

Доведення. Нехай $g \in \mathcal{H}$, $g \perp \mathfrak{D}_+$. Тоді

$$0 = (g, \mathfrak{D}_+) = \langle g, \mathfrak{D}_+ \rangle_{\mathcal{H}} = (I_{+,-} g, \mathfrak{D}_+)_+,$$

тобто $I_{+,-} g \in \mathfrak{N}_+$. Використовуючи тотожність $I_{0,+} I_{+,-} = I_{0,-}$, маємо

$I_{0,+}I_{+,-}g = I_{0,-}g \in \mathfrak{N}_0$. Враховуючи, що оператор $I_{0,-}: \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}$ збігається з оператором $I_{+,0}$ на $\mathcal{H}_0$ (див. (3)), одержуємо $I_{0,-}g = I_{+,0}g \in \mathcal{H}_+$. Остаточно маємо

$$g \in \mathcal{H}, \quad g \perp \mathfrak{D}_+ \Rightarrow I_{+,0}g \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{H}_+,$$

або, інакше кажучи, якщо $\mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{H} = \{0\}$, то множина $\mathfrak{D}_+$ щільна в $\mathcal{H}$.

Навпаки, нехай $\overline{\mathfrak{D}}_+ = \mathcal{H}$. Візьмемо $0 \neq g \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{H}_+$. З того, що $g \perp \mathfrak{D}_0$, одержуємо

$$0 = (g, \mathfrak{D}_0)_0 = \langle g, \mathfrak{D}_0 \rangle_{\mathcal{H}} = (I_{0,+}g, I_{0,-}\mathfrak{D}_0) = (I_{0,+}g, \mathfrak{D}_+),$$

де використано властивості (3) оснащення (2) $I_{0,-} \restriction \mathcal{H} = I_{+,0}$ та $I_{0,-}\mathfrak{D}_0 = I_{+,0}\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_+$. Оскільки $\overline{\mathfrak{D}}_+ = \mathcal{H}$, то $I_{0,+}g = 0$, і тому $g = 0$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Розглянемо в $\mathcal{H}$ нормальний* оператор S і припустимо, що існує оснащення простору $\mathcal{H}$:

$$\mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supset D, \tag{9}$$

де D — лінійна, сепарабельна топологічна підмножина $\mathcal{H}$, яка щільно і неперервно вкладена в гільбертів простір $\mathfrak{H}_+$ так, що $D \subseteq \mathcal{D}(S)$ і звуження S на D: $S \restriction D$ діє неперервно із D в $\mathfrak{H}_+$, та вкладення $\mathfrak{H}_+$ в $\mathcal{H}$ є оператором Гільберта – Шмідта.

Оператор S, який має описані вище властивості в оснащенні (9), називається стандартно пов'язаним з оснащенням (9) [1, 2, 10].

Ненульовий вектор $\omega_\lambda \in \mathfrak{H}_-$ називається узагальненим власним вектором оператора S з відповідним узагальненим власним значенням $\lambda \in \mathbb{C}$ в стандартно пов'язаному з оператором S оснащенні (9), якщо

$$\langle \omega_\lambda, Sf \rangle_{\mathfrak{H}} = \lambda \langle \omega_\lambda, f \rangle_{\mathfrak{H}} \quad \forall f \in D.$$

Власний вектор визначається із точністю до сталого множника.

Сукупність $\sigma(S)$ узагальнених власних значень λ, породжених оснащенням (9), називається узагальненим спектром оператора S, стандартно пов'язаним з оснащенням (9).

Означення 1. *Підмножина* $\tilde{\sigma}(S) \subset \sigma(S)$ *називається цілком узагальненим спектром оператора* S, *стандартно пов'язаним з оснащенням* (9), *якщо для будь-якого узагальненого власного вектора* $\omega_\lambda \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$ *випливає, що* λ *належить* $\tilde{\sigma}(S)$, *тобто*

$$\tilde{\sigma}(S) := \{\lambda \in \sigma(S) \mid \omega_\lambda \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}\}.$$

Зрозуміло, що як узагальнений $\sigma(S)$, так і цілком узагальнений спектр $\tilde{\sigma}(S)$ оператора S залежать від вибору стандартно пов'язаного з оператором S оснащення (9).

Означення 2. *Довільна множина* $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ *називається* S*-інваріантною, тобто інваріантною відносно дії оператора* S, *якщо* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(S)$ *і* $S\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$.

Наведемо описове означення узагальнено S-інваріантної множини для оснащення (9), стандартно пов'язаного із оператором S. Розглянемо білінійний функціонал $l(g,f) = \langle g, Sf \rangle_{\mathfrak{H}}, f, g \in \mathcal{D}(l) \equiv \mathcal{D}$. Нехай $l^*(g,f) = \langle S^*g, f \rangle_{\mathfrak{H}}$ — функціонал, спряжений до $l(g,f)$. Розширимо $l^*(g,f)$ за неперервністю на

* Означення нормального оператора можна знайти, наприклад, в [2, 9].

весь простір $\mathfrak{H}_-$. Розширений функціонал позначимо через $\tilde{l}^*(g, f)$. Цьому функціоналу відповідає оператор $\tilde{S}^*$, тобто $\tilde{l}^*(g, f) = \langle \tilde{S}^* \omega, \varphi \rangle_{\mathfrak{H}}$, $\omega, \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{l}^*) \equiv \mathfrak{H}_-$. Тепер можна розглядати множину $F \subset \mathfrak{H}_-$, яка є S^*-інваріантною в сенсі означення (2). Таку множину ми називатимемо узагальненою S-інваріантною.

Наведемо строге лаконічне означення узагальненої S-інваріантності без використання громіздкого опису.

Означення 3. *Множина $F \in \mathfrak{H}_-$ називається узагальнено S-інваріантною в оснащенні* (9), *якщо вона задовольняє умову:*

$$\{ \forall \varphi \in F,\ \exists \psi \in \mathfrak{H}_- : \langle \varphi, Sf \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \psi, f \rangle_{\mathfrak{H}},\ \forall f \in D \subset \mathfrak{H}_+ \} \Rightarrow \psi \in F.$$

В наступному пункті наведені необхідні і достатні умови S-інваріантності та часткової S-інваріантності щільної та довільної підмножини із $\mathcal{H}$.

3. Інваріантність в оснащенні, стандартно пов'язаному із оператором. Нехай в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано нормальний оператор S з областю визначення $\mathcal{D}(S)$. З цим оператором стандартно пов'язане оснащення (9).

Виберемо інше оснащення $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{10}$$

так що:

А.1) простір $\mathcal{H}_+$ є S-інваріантним, тобто $\mathcal{D}(S) \supseteq \mathcal{H}_+$, $S\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{H}_+$;

А.2) $\mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+$ в топологічному сенсі і оператор S діє неперервно із $\mathcal{H}_+$ в $\mathfrak{H}_+$.

Припустимо, що цілком узагальнений спектр оператора S, стандартно пов'язаний з оснащенням (9), не порожній.

Візьмемо набір узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$ оператора S, так що $F = \operatorname{span}\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \cap \mathcal{H} = \{0\}$, і визначимо підмножину $\mathcal{D}_F \subset \mathcal{H}$:

$$\mathcal{D}_F = \{ f \in \mathcal{H}_+ \mid \langle \omega_\lambda, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \ \forall\, \omega \in F \}. \tag{11}$$

Очевидно, що при $k < \infty$ $F \cap \mathcal{H} = \{0\}$. В наступних пунктах буде наведено критерій, за допомогою якого визначається потужність множини $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty}$, так що задовольняється умова $F \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

Твердження 1. *Нехай для нормального оператора S в $\mathcal{H}$ існують оснащення* (9) *і* (10), *які задовольняють умови* А.1) *і* А.2). *Тоді кожному скінченному (зчисленному) набору узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$ оператора S в стандартно пов'язаному оснащенні* (9) *однозначно відповідає в $\mathcal{H}$ за правилом* (11) *щільна, замкнена в $\mathcal{H}_+$ підмножина $\mathcal{D}_F$, яка є S-інваріантною:*

$$S\,\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_F. \tag{12}$$

При цьому $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{D}_F) = k$.

Доведення. З того, що $F \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$, на підставі теореми 1 випливає, що множина $\mathcal{D}_F$ щільна в $\mathcal{H}$ і є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$.

Використовуючи умови А.1) і А.2), поєднаємо оснащення (9) і (10), покладаючи $D = \mathcal{H}_+$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathfrak{H}_- \supseteq \mathcal{H} \supseteq \mathfrak{H}_+ \supseteq \mathcal{H}_+. \tag{13}$$

Оскільки $S\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{H}_+$ та $F \in \mathfrak{H}_- \subseteq \mathcal{H}_-$, то, використовуючи властивості (6), маємо

$$\langle \omega_i, S\mathcal{H}_+ \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \omega_i, S\mathcal{H}_+ \rangle_{\mathcal{H}} \tag{14}$$

і аналогічно

$$\langle \omega_i, \mathcal{H}_+ \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \omega_i, \mathcal{H}_+ \rangle_{\mathcal{H}}. \tag{15}$$

Використовуючи оснащення (13), тотожності (14), (15) та означення (11), одержуємо

$$\forall\ i = \overline{1, \infty} \quad \langle \omega_i, S\mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \omega_i, S\mathcal{D}_F \rangle_{\mathfrak{H}} =$$

$$= \lambda_i \langle \omega_i, \mathcal{D}_F \rangle_{\mathfrak{H}} = \lambda_i \langle \omega_i, \mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

де λ_i — відповідне до ω_i узагальнене власне значення. Таким чином,

$$\langle F, S\mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, \mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

або

$$(I_{+,-}F, S\mathcal{D}_F)_+ = (I_{+,-}F, \mathcal{D}_F)_+ = 0,$$

і тому $S\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_F$, оскільки $\mathcal{D}_F$ є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Очевидно, що $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{D}_F) = \dim F = k \leq \infty$. Твердження доведено.

Виберемо довільну узагальнено S-інваріантну підмножину $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{H}_-$ і утворимо за правилом (11) множину $\mathcal{D}_F$. Взагалі кажучи, множина $\mathcal{D}_F$ не є щільною в $\mathcal{H}$.

Твердження 2. *Нехай для нормального оператора S в $\mathcal{H}$ існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* A.1) *і* A.2). *Тоді кожній узагальнено S-інваріантній підмножині $\mathcal{D}_F \subseteq \mathfrak{H}_-$ в стандартно пов'язаному з оператором S оснащенні* (9) *однозначно відповідає в $\mathcal{H}$ за правилом* (11) *замкнена в $\mathcal{H}_+$ підмножина $\mathcal{D}_F$, яка є S-інваріантною:*

$$S\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_F. \tag{16}$$

Доведення. Використовуючи оснащення (13), тотожності (14), (15), означення (11) та означення узагальненої S-інваріантності, маємо

$$\langle \mathcal{F}, S\mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{F}, S\mathcal{D}_F \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{D}_F \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{D}_F \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

і тому $S\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_F$, оскільки $\mathcal{D}_F$ є замкненим підпростором в $\mathcal{H}$, що і доводить твердження.

При додаткових умовах справедливий обернений до тверджень 1 і 2 результат, тобто S-інваріантність множини $\mathcal{D}$ гарантує те, що ця множина породжена узагальненим власним вектором $\omega_\lambda \in \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$, або набором таких векторів, або узагальнено S-інваріантною підмножиною $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{H}_-$.

Припустимо, що оператор S окрім умов A.1) і A.2) задовольняє і умову:

A.3) якщо для деякого вектора $\omega \in \mathcal{H}_-$ існує $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що $\langle \omega, Sf \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda \langle \omega, f \rangle_{\mathcal{H}}$ $\forall f \in D$, то $\omega \in \mathfrak{H}_-$.

Інакше кажучи, всі узагальнені власні вектори оператора S із $\mathcal{H}_-$ належать $\mathfrak{H}_-$.

Твердження 3. *Нехай для нормального оператора* S *в* $\mathcal{H}$ *існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* А.1) – А.3). *Тоді кожній* S-*інваріантній, щільній в* $\mathcal{H}$ *і замкненій в* $\mathcal{H}_+$ *підмножині* $\mathcal{D}$ *такій, що* $\dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}) = k$, $k = \overline{1, \infty}$ *однозначно відповідає за правилом* (11) *деякий зчисленний набір узагальнених власних векторів* $\{\omega_i\}_{i=1}^{k \le \infty}$ *оператора* S *в стандартно пов'язаному оснащенні* (9).

Доведення. Визначимо множину $F = I_{-,+}(\mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{D}) \subset \mathcal{H}_-$. Оскільки $\mathcal{D}$ щільна в $\mathcal{H}$, то за теоремою 1 $F \subset \mathfrak{H}_- \setminus \mathcal{H}$ і, більше того, множина F за правилом (11) визначає множину $\mathcal{D}$. Очевидно, що $\dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}) = \dim F = k$. Покажемо, що $F = \operatorname{span}\{\omega_i\}_{i=1}^{k \le \infty}$, де ω_i — узагальнені власні вектори оператора S.

За визначенням множини $\mathcal{D}$

$$0 = \langle F, \mathcal{D} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle I_{+,-} F, \mathcal{D} \rangle_+ . \tag{17}$$

За умовою S-інваріантності множини $\mathcal{D}$

$$0 = \langle F, S\mathcal{D} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle I_{+,-} F, S\mathcal{D} \rangle_+ = \langle S^+ I_{+,-} F, \mathcal{D} \rangle_+ , \tag{18}$$

де S^+ — оператор, спряжений до S в $\mathcal{H}_+$.

Порівнюючи (17) і (18), знаходимо

$$S^+ I_{+,-} F \subseteq I_{+,-} F.$$

Оскільки оператор S^+ замкнений і визначений всюду в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}_+$, то він є обмеженим і тому має повну систему власних векторів — $\{h_i\}$, $i = \overline{1, \infty}$. Тоді $\omega_i = I_{-,+} h_i$, $i = \overline{1, \infty}$, є узагальненими власними векторами оператора S в оснащенні (9). Дійсно, $S^+ h_i = \lambda_i h_i$, $i = \overline{1, \infty}$;

$$\forall f \in \mathcal{H}_+, \quad (h_i, Sf)_+ = (S^+ h_i, f)_+ = \lambda_i (h_i, f),$$

або

$$\langle \omega_i, S\mathcal{H}_+ \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_i \langle \omega_i, \mathcal{H}_+ \rangle_{\mathcal{H}}$$

і за умовою А.3)

$$\langle \omega_i, S\mathcal{D} \rangle_{\mathfrak{H}} = \lambda_i \langle \omega_i, \mathcal{D} \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

Замінимо умову А.3 умовою

А.3′) якщо в $\mathcal{H}_-$ існує хоча б одна узагальнено S-інваріантна множина F, то $F \in \mathfrak{H}_-$.

Інакше кажучи, простір $\mathfrak{H}_-$ містить в собі всі узагальнено S-інваріантні підмножини.

Твердження 4. *Нехай для нормального оператора* S *в* $\mathcal{H}$ *існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* А.1), А.2) *і* А.3′). *Тоді кожній* S-*інваріантній і замкненій в* $\mathcal{H}_+$ *підмножині* $\mathcal{D}$ *однозначно відповідає за правилом* (11) *деяка узагальнено* S-*інваріантна підмножина* $\mathcal{F} \subset \mathfrak{H}_-$ *в стандартно пов'язаному з оператором* S *оснащенні* (9).

Доведення. Визначимо множину $\mathcal{F} = I_{-,+}(\mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{D}) \subset \mathcal{H}_-$. Множина $\mathcal{F}$ за правилом (11) визначає множину $\mathcal{D}$. Дійсно,

$$0 = (I_{+,-} \mathcal{F}, \mathcal{D})_+ = \langle \mathcal{F}, \mathcal{D} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

За умовою S-інваріантності множини $\mathcal{D}$

$$0 = (I_{+,-}\mathcal{F}, S\mathcal{D})_{+} = \langle \mathcal{F}, S\mathcal{D}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Враховуючи ще й умову А.3′), отримуємо дане твердження.

Поєднаємо разом твердження 1 і 3 та 2 і 4 у теоремі, які є основним результатом першої частини роботи.

Теорема 3. *Нехай для нормального оператора* S *в* $\mathcal{H}$ *існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* А.1) – А.3). *Тоді між зчисленними наборами узагальнених власних векторів* $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \subset \mathfrak{H}_{-} \setminus \mathcal{H}$ *в стандартно пов'язаному оснащенні* (9) *та* S*-інваріантними, щільними в* $\mathcal{H}$ *і замкненими в* $\mathcal{H}_{+}$ *підмножинами* $\mathcal{D}$ *такими, що* $\dim(\mathcal{H}_{+} \ominus \mathcal{D}) = k \le \infty$, *існує взаємно однозначна відповідність, що встановлюється за правилом* (11).

Доведення. Із твердження 1 випливає, що кожний зчисленний набір узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \subset \mathfrak{H}_{-} \setminus \mathcal{H}$ нормального оператора S однозначно визначає множину $\mathcal{D}$, яка S-інваріантна, щільна в $\mathcal{H}$ і є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_{+}$ із корозмірністю $k = \dim(\mathcal{H}_{+} \ominus \mathcal{D}) \le \infty$. Твердження 3 дає обернене включення, тобто кожна множина $\mathcal{D}$, яка S-інваріантна, щільна в $\mathcal{H}$ і є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_{+}$ із корозмірністю $k = \dim(\mathcal{H}_{+} \ominus \mathcal{D}) \le \infty$, однозначно визначається деяким зчисленним набором узагальнених власних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^{k\le\infty} \subset \mathfrak{H}_{-} \setminus \mathcal{H}$ нормального оператора S.

Теорема 4 [11]. *Нехай для нормального оператора* S *в* $\mathcal{H}$ *існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* А.1), А.2) *і* А.3′). *Тоді між узагальнено* S*-інваріантними підмножинами* $\mathcal{F} \subset \mathfrak{H}_{-}$ *в стандартно пов'язаному оснащенні* (9) *та* S*-інваріантними, щільними в* $\mathcal{H}$ *і замкненими в* $\mathcal{H}_{+}$ *підмножинами* $\mathcal{D}$ *в стандартно пов'язаному оснащенні* (9) *такими, що* $\dim(\mathcal{H}_{+} \ominus \mathcal{D}) = k \ne 0$, *існує взаємно однозначна відповідність, що встановлюється за правилом* (11).

Припустимо, що цілком узагальнений спектр $\tilde{\sigma}(S)$ оператора простий. Тоді теорему 3 можна переформулювати таким чином.

Наслідок 1. *Нехай для нормального оператора* S *в* $\mathcal{H}$ *існують оснащення* (9) *і* (10) *такі, що задовольняють умови* А.1) – А.3). *Тоді між зчисленними наборами точок* $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k\le\infty}$ *цілком узагальненого спектра* $\sigma(S)$ *оператора* S *в стандартно пов'язаному оснащенні* (9) *та* S*-інваріантними, щільними в* $\mathcal{H}$ *і замкненими в* $\mathcal{H}_{+}$ *підмножинами* $\mathcal{D}$ *такими, що* $\dim(\mathcal{H}_{+} \ominus \mathcal{D}) = k \le \infty$, *існує взаємно однозначна відповідність, що встановлюється за правилом* (11).

4. Приклад. Проілюструємо ситуацію, що описана у попередньому пункті. Нехай $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, dx)$, $\mathfrak{H}_{+} = W_2^{(2,q)}$ [3], де

$$W_2^{(2,q)} = \left\{ f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}, dx) \,\middle|\, q(x) f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}, dx),\ q(x) \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (19)$$

Відомо, що функцію $q(x)$ можна вибрати так, що оператор вкладення $W^{(2,q)}$ в $L_2(\mathbb{R}, dx)$ є оператором Гільберта – Шмідта. Виберемо функцію $p(x)$ так, що $p(x) > q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, і утворимо аналогічно $W_2^{(2,q)}$ за правилом (19) простір $W_2^{(2,p)}$. Покладемо $\mathcal{H}_{+} \equiv D = W_2^{(2,p)}$. Таким чином, побудовано ланцюжок типу (13).

Нехай S — оператор множення на функцію $\xi(x)$ від незалежної змінної x, так що $\xi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, dx)$ і $\xi(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, де $\mathcal{S}(\mathbb{R}, dx)$ — простір Шварца. Так побудований оператор S має δ-функції Дірака своїми узагальненими власними векторами:

$$\langle \delta_\lambda(x), Sf(x) \rangle_{\mathfrak{H}} = \lambda \langle \delta_\lambda(x), f(x) \rangle_{\mathfrak{H}} \quad \forall f(x) \in \mathcal{D}(S).$$

Відомо, що $\delta_\lambda(x) \in W_2^{-2} \subseteq W_2^{-(2,q)}$, оскільки $W_2^2 \supseteq W^{(2,q)}$, де W_2^{-2} і $W_2^{-(2,q)}$ — негативні простори, відповідні до W_2^2 і $W_2^{(2,q)}$.

Неважко переконатися, що простір $W_2^{(2,q)}$ є S-інваріантним. Також S-інваріантними є множини $\mathcal{D}$, породжені наборами δ-функцій $F = \{\delta_\lambda(x)\}_{\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}}$ за правилом

$$\mathcal{D}_F = \left\{ f \in W_2^{(2,p)}(\mathbb{R}, dx) \,\middle|\, \langle \delta_\lambda, f(x) \rangle_{\mathfrak{H}} \equiv f(\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R} \right\}.$$

Якщо множина Λ скінченна, то підмножини $\mathcal{D}_F$ є щільними в $L_2(\mathbb{R}, dx)$ і замкненими підпросторами в $W_2^{(2,p)}$.

В наступній частині роботи будуть наведені умови на множину Λ, за яких підмножина $\mathcal{D}$ гільбертового простору $\mathcal{H}$, що побудована за допомогою Λ, щільна в $\mathcal{H}$. Цей факт буде проілюстровано на просторі $L_2(\mathbb{R}, dx)$.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
3. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ: Курс лекций. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 178 с.
6. *Koshmanenko V. D.* Singular operators and forms in the scale of Hilbert spaces // Meth func. anal. in probl. math. phys. – Kiev, 1992. – P. 73–87.
7. *Koshmanenko V. D.* Perturbations of self-adjoint operators by singular bilinear forms // Ukr. Math. J. – 1989. – **41,** № 1. – P. 3–19.
8. *Koshmanenko V. D.* Dence subspace in A-scale of Hilbert spaces // ITP UWr. – Preprint № 835, 1993. – 22 p.
9. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 590 с.
10. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 800 с.
11. *Дудкін М. Є.* Ермітові інваріантні звуження самоспряжених операторів. – Київ, 1994. – 20 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; № 94.31).

Одержано 24.04.96