УДК 517.984.5

А. А. Зевин (Ин-т транспорт. систем и технологий НАН Украины, Днепропетровск)

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We consider self-adjoint boundary-value problems with the discrete spectra and with the coefficients periodic in some coordinate. For eigenvalues, we find the upper bounds in terms of eigenvalues of the corresponding problem with averaged coefficients. We illustrate the obtained results by using as examples the Hill vector equation and circular and rectangular plates with periodic parameters.

Розглядаються самоспряжені крайові задачі з дискретним спектром, коефіцієнти яких періодичні за деякою координатою. Знайдені верхні оцінки власних значень, виражені через власні значення відповідної задачі з осередненими коефіцієнтами. Результати ілюструються на прикладі векторного рівняння Хілла, круглої та прямокутної пластинки з періодичними коефіцієнтами.

1. Краевые задачи с периодическими коэффициентами часто встречаются в теории упругости (среды с периодической структурой, гофрированные либо перфорированные пластинки и оболочки и т. д.), в теории фильтрации, теории гетерогенных сред и других разделах механики и физики [1 – 4]. При решении таких задач, в частности при определении собственных значений, периодические коэффициенты часто заменяют их средними значениями (например, в случае подкрепленной пластинки или оболочки такая замена отвечает переходу к конструктивно-ортотропной модели [1]).

Указанная замена коэффициентов наиболее целесообразна в случае, когда в полученной задаче соответствующая переменная разделяется; в результате размерность краевой задачи уменьшается на единицу. Например, определение частот собственных колебаний круглой пластинки с переменными упругими и инерционными характеристиками требует решения двумерной краевой задачи. После осреднения указанных характеристик по угловой координате φ последняя разделяется, в результате собственные функции принимают вид

$$v_k^0(r,\varphi) = v_k^0(r,j)\sin(j\varphi+\varphi_k), \tag{1}$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$. Частоты колебаний и функции $v_k^0(r,j)$ определяются из решения одномерной задачи, зависящей от параметра j. Таким образом, спектр осредненной задачи состоит из спектров λ^j, отвечающих различным значениям j. Аналогичная ситуация имеет место в краевых задачах для круга, шара, тела вращения при осреднении коэффициентов по угловой координате.

Естественно, значительный интерес представляет вопрос о соотношении между собственными значениями исходной и осредненной задач λ_k и λ_k^0, $k = 1, 2, \ldots$. В данной работе показано, что для определенной (обычно, низшей) части спектра справедливо неравенство $\lambda_k < \lambda_k^0$, т. е. указанная замена дает завышенные собственные значения.

Заметим, что при решении задач с быстро осциллирующими коэффициентами часто используют асимптотические методы, причем малым параметром служит период коэффициентов [2 – 4]. Соответствующая процедура приводит к задаче с постоянными коэффициентами, величины которых, вообще говоря, не равны их средним значениям. Поэтому указанное выше неравенство не распространяется на спектр системы, полученной в результате такого осреднения.

2. Перейдем к математической формулировке задачи. Пусть λ_k, $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$, и $v_k(x) = \left(v_k^1(x),\ldots,v_k^r(x)\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ — собственные значения и собственные функции самосопряженной краевой задачи, заданной в некоторой ограниченной области $G \in R^n$. Как известно, k-е собственное значение допускает следующее вариационное определение:

$$\lambda_k = \min I(v), \qquad I(v) = \frac{\int\limits_G K_1(v(x), v(x))\,dx}{\int\limits_G K_2(v(x), v(x))\,dx}. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $v(x) = \left(v^1(x), \ldots, v^r(x)\right)$, $K_1(v(x), v(x))$ и $K_2(v(x), v(x))$ — квадратичные формы компонент $v_k(x)$ и их производных, т. е.

$$\begin{aligned} K_1(v(x), v(x)) &= \sum_{p,k} a_{pk}(x) L_p(v(x)) L_k(v(x)), \\ K_2(v(x), v(x)) &= \sum_{p,k} b_{pk}(x) L_p(v(x)) L_k(v(x)), \end{aligned} \tag{3}$$

где L_r — дифференциальный оператор.

Допустимая функция $v(x)$ в (2) должна удовлетворять заданным граничным условиям и условию ортогональности

$$\int\limits_G K_2\left(v(x), v_p(x)\right) dx = 0, \qquad p = 1, \ldots, k-1. \tag{4}$$

Полагаем, что выполнены следующие условия.

1. Область интегрирования G представляет собой топологическое произведение отрезка $[0, l]$ оси x_1 на некоторую область в пространстве $x_2, \ldots, x_n$.

2. Коэффициенты $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$ периодичны по x_1 с периодом l/q, где $q > 2$ — целое число.

3. В задаче, полученной заменой коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$ их средними по x_1 значениями

$$a^0_{pk}(x^*) = \frac{1}{l}\int\limits_0^1 a_{pk}(x)\,dx_1, \qquad b^0_{pk}(x^*) = \frac{1}{l}\int\limits_0^1 b_{pk}(x)\,dx_1, \qquad x^* = (x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$

собственные функции имеют вид

$$v^0_k(x) = \left(v^{01}_k(x), \ldots, v^{0r}_k(x)\right), \qquad v^{0p}_k(x) = v^{*p}_k(x^*) \sin\left(2\pi j x_1 / l + \varphi^p_k\right), \tag{6}$$

где $j = j(k)$ — целое число, φ^p_k — некоторые постоянные.

4. В исходной и осредненной задачах знаменатель в (2) положителен для любой допустимой функции $v(x)$.

Обозначим через $\lambda^{0j} = \left(\lambda^{0j}_1, \lambda^{0j}_2, \ldots\right)$ множество собственных значений осредненной задачи, отвечающих фиксированному значению j. Таким образом, спектр λ^0 состоит из спектров λ^{0j}, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Учитывая (6), собственное значение λ^{0j}_k можно определить как минимум функционала (2) при дополнительном условии: разложение допустимой функции $v(x)$ в ряд Фурье по координате x_1 содержит только j-ю гармонику (при этом в условии ортогональности (4) также следует положить $v_p = v^{0j}_p(x)$, где $v^{0j}_p(x)$ — собственные функции, отвечающие собственным значениям λ^{0j}_p).

Исключим из спектра λ^0 составляющие λ^{0j} с $j \geq q/2$; оставшуюся часть спектра, соответствующим образом перенумерованную, обозначим через $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_k \leq \bar{\lambda}_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Физически это означает, что $\bar{\lambda}$ включает только такие значения $\overline{\lambda}_k$, что у собственных функций $v_k^{0j}(x)$ длина полуволны $l/2j$ по координате x_1 превышает соответствующий период l/q коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$.

Следующая теорема сравнивает спектры λ и $\overline{\lambda}$.

Теорема. *Собственные значения* λ_k *удовлетворяют неравенству*

$$\lambda_k \leq \overline{\lambda}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\overline{v}_p(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\overline{\lambda}_p$. Тогда

$$\overline{\lambda}_p = \frac{\int\limits_G K_1^0\big(\overline{v}_p(x), \overline{v}_p(x)\big)dx}{\int\limits_G K_2^0\big(\overline{v}_p(x), \overline{v}_p(x)\big)dx}, \tag{8}$$

где выражения K_r^0, $r = 1, 2$, получены из K_r заменой коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$ их средними по x_1 значениями $a_{pk}^0(x^*)$ и $b_{pk}^0(x^*)$. Функции $\overline{v}_g(x)$ и $\overline{v}_h(x)$ $(g \neq h)$ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int\limits_G K_r^0\big(\overline{v}_g(x), \overline{v}_h(x)\big)dx = 0, \quad r = 1, 2. \tag{9}$$

Положим в (2)

$$v(x) = \sum_{p=1}^{k} c_p \overline{v}_p(x). \tag{10}$$

Так как функции $\overline{v}_p(x)$ линейно независимы, то коэффициенты c_p можно выбрать таким образом, чтобы функция $v(x)$ удовлетворяла условию (4) и, следовательно, была допустимой функцией в вариационном определении собственного значения λ_k. Поскольку $\overline{v}_p(x)$ включают гармоники $j < q/2$, то произведения $L_p\big(\overline{v}_g(x)\big)L_k\big(\overline{v}_h(x)\big)$ содержат гармоники, меньшие q. Полагая

$$a_{pk}(x) = a_{pk}^0(x^*) + a'_{pk}(x), \quad b_{pk}(x) = b_{pk}^0(x^*) + b'_{pk}(x), \tag{11}$$

находим, что в силу условия 2 функции $a'_{pk}(x)$ и $b'_{pk}(x)$ содержат только гармоники, кратные q. Поэтому

$$\int\limits_G K_r\big(\overline{v}_g(x), \overline{v}_h(x)\big)dx = \int\limits_G K_r^0\big(\overline{v}_g(x), \overline{v}_h(x)\big)dx, \quad r = 1, 2. \tag{12}$$

С учетом (9) и (12) функционал (2) принимает вид

$$I(v) = \frac{\sum\limits_{p=1}^{k} c_p^2 \int\limits_G K_1^0\big(\overline{v}_p(x), \overline{v}_p(x)\big)dx}{\sum\limits_{p=1}^{k} c_p^2 \int\limits_G K_2^0\big(\overline{v}_p(x), \overline{v}_p(x)\big)dx}. \tag{13}$$

В силу условия 4 интегралы в знаменателе (13) положительны. Как известно, при любых a_p и положительных b_p справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{p=1}^{k} a_p}{\sum_{p=1}^{k} b_p} \leq \max_p \frac{a_p}{b_p},$$

откуда, принимая во внимание (8), получаем $I(v) \le \overline{\lambda}_k$. Так как при выбранных c_k $v(x)$ является допустимой функцией в вариационном определении собственного значения λ_k, то $\lambda_k = \min I(v) \le \overline{\lambda}_k$. Теорема доказана.

Функции $\overline{v}_p(x)$ в выражении (10) являются собственными функциями задачи с осредненными по x_1 коэффициентами, поэтому они, вообще говоря, не удовлетворяют уравнению Эйлера для функционала (2) с периодическими по x_1 коэффициентами. В результате последний не имеет стационарного значения на $v(x)$; следовательно, $\lambda_k < I(v)$, т. е. справедливо строгое неравенство $\lambda_k < \overline{\lambda}_k$. Равенство в (7) выполняется, когда собственные значения λ_k не зависят от коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$ (например, если $j(k) = 0$ и $L_r\left(v_k^0(x)\right) = 0$ для всех операторов L_r, входящих в K_1, то $K_1\left(v_k^0(x)\right) = 0$ и, следовательно, $\lambda_k = 0$ при любых коэффициентах).

Замечание. В приложениях часто встречается случай, когда в (6) $j = s/2$, $s = 1, 3, 5, \ldots$; в частности, он имеет место, если краевые условия антипериодичны по x_1 $\left(v(0, x^*) = -v(l, x^*)\right)$. При этом, как видно из доказательства, теорема остается справедливой. В более общем случае, когда j принимает как целые, так и полуцелые значения, теорема верна, если для любых g и h сохраняется равенство (12).

Утверждение теоремы может быть несколько уточнено с помощью следующих соображений. Использовав периодичность коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$, представим спектр исходной задачи λ в виде объединения конечного числа спектров λ^p. С этой целью разложим в (2) $v(x)$ в ряд по собственным функциям $v_k^{0j}(x)$:

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{0j}(x) = \sum_{p=0}^{m} v^p(x), \tag{14}$$

где $v^p(x)$ включает функции $v_k^{0j}(x)$, у которых $j = p + kq$ и $j = kq - p$, $k = 0,$ $= 1, 2, \ldots$; m — целая часть числа $q/2$.

В силу условия 2 разложения $a'_{pk}(x)$ и $b'_{pk}(x)$ в ряд Фурье по x_1 на $[0, l]$ содержат только гармоники, кратные q, поэтому

$$\int_G K_r\left(v^s(x), v^k(x)\right) dx = 0, \qquad r = 1, 2; \qquad s \ne k. \tag{15}$$

В результате функционал (2) принимает вид

$$I(v) = \frac{\sum\limits_{p=0}^{m} \int\limits_G K_1\left(v^p(x), v^p(x)\right) dx}{\sum\limits_{p=0}^{m} \int\limits_G K_2\left(v^p(x), v^p(x)\right) dx}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что спектр исходной задачи λ распадается на спектры λ^p, $p = 0, \ldots, m$. Собственное значение λ_k^p является минимумом функционала (2) при следующем дополнительном условии: разложение допустимой функции $v(x)$ в ряд Фурье по x_1 содержит только гармоники $p + kq$ и $kq - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Обозначим через $\overline{\lambda}_k^p$, $\overline{\lambda}_k^p \le \overline{\lambda}_{k+1}^p$, $k = 1, 2, \ldots$, объединение спектров λ^{0j}, в которых j принимает значения $p+kq$ и $kq-p$, $k=0,1,2,\dots$ и $j<q/2$. Тогда выполняется неравенство

$$\lambda_k^p \le \bar{\lambda}_k^p, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы; при этом вместо (2) используется функционал (16). Заметим, что неравенство (17) более содержательно, чем (7) (последнее представляет собой объединение неравенств (17), отвечающих различным p).

Обычно низшая часть спектра осредненной системы отвечает меньшим значениям j, поэтому $\lambda_k^0 = \bar{\lambda}_k$ при $k \le N$, где $N+1$ — номер наименьшей частоты в отброшенной (при переходе к $\bar{\lambda}$) части спектра λ^0.

Следовательно, низшие частоты исходной и осредненной систем удовлетворяют неравенству

$$\lambda_k \le \lambda_k^0, \quad k = 1, \dots, N. \tag{18}$$

Так как $\bar{\lambda}$ образуется из λ^0 удалением λ^{0j} с $j \ge q/2$, то при увеличении q (т. е. при уменьшении периода коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$) число N возрастает (не убывает).

В некоторых приложениях (например, в задачах устойчивости упругих систем) интерес представляет только наименьшее собственное значение λ_1. Предположим, что константы φ_k^p в собственных функциях (6) осредненной задачи определены с точностью до постоянной φ (такая ситуация, в частности, имеет место, когда x_1 — угловая координата). Покажем, что в этом случае независимо от величины $j(1)$ и периодичности коэффициентов $a_{pk}(x)$ и $b_{pk}(x)$ справедливо неравенство

$$\lambda_1 \le \lambda_1^0. \tag{19}$$

Пусть $v_1^{0p}(x) = v_1^{*p}(x^*)\sin\left(2\pi j x_1/l + \varphi_1^p + \varphi\right)$, $p = 1, \dots, r$, — компоненты собственной функции $v_1^0(x)$, отвечающей собственному значению λ_1^0. Положив в (2) $a = a_{pk}^0(x^*)$, $b = b_{pk}^0(x^*)$, $v(x) = v_1^0(x)$, получим $\lambda_1^0 = A/B$. При $a = a_{pk}(x)$, $b = b_{pk}(x)$, $v(x) = v_1^0(x)$ отношение (2) представим в виде

$$I(v) = \frac{A + A_1(\varphi)}{B + B_1(\varphi)}.$$

Так как в представлении (11) средние значения $a'_{pk}(x)$ и $b'_{pk}(x)$ по x_1 на $[0, l]$ равны нулю, то средние значения $A_1(\varphi)$ и $B_1(\varphi)$ по φ на $[0, 2\pi]$ также равны нулю. Поэтому найдется такое φ', что $A_1(\varphi') \le 0$ и $B_1(\varphi') \ge 0$, в результате $I(\varphi') \le A/B = \lambda_1^0$, а следовательно, и $\lambda_1 \le \lambda_1^0$. Если $v_1^0(x)$ не является также собственной функцией исходной задачи, то справедливо строгое неравенство $\lambda_1 < \lambda_1^0$.

3. Проиллюстрируем применение доказанной теоремы на конкретных примерах.

Рассмотрим задачу на собственные значения для векторного уравнения Хилла с периодическими краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left[M(x)\frac{dv}{dx} \right] + \lambda C(x)v = 0, \qquad v(0) = v(l). \tag{20}$$

Здесь x — скаляр, $v(x) = \left(v^1(x), \dots, v^r(x)\right)$, $M(x)$ и $C(x)$ — симметричные положительно определенные матрицы порядка r, периодические по x с периодом l/q, $q>2$.

Соответствующий функционал (2) имеет вид

$$I(v) = \frac{\int_0^1 \left(M(x)\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)dx}{\int_0^1 (C(x)v(x), v(x))\,dx}, \tag{21}$$

где (a, b) означает скалярное произведение векторов a и b.

Пусть M_0 и C_0 — средние значения $M(x)$ и $C(x)$ на $[0, l]$, z_p, $p = 1, \ldots$ $\ldots, r$, $0 < z_k \le z_{k+1}$, и v_p^0 — собственные значения и соответствующие векторы матрицы $M_0^{-1}C_0$. Очевидно, что при $M = M_0$, $C = C_0$ спектр λ^0 задачи (20) состоит из r нулевых собственных значений, которым отвечают постоянные собственные функции ($j = 0$), и расположенных в порядке возрастания величин $4\pi^2 j^2/(l^2 z_p)$, $p = 1, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots$. Соответствующие собственные функции имеют вид $v_p^0 \sin(2\pi j x/l + \varphi_k)(x)$; так как φ_k может принимать любые значения, то при фиксированных p и j существуют две линейно независимые собственные функции, т. е. ненулевые собственные значения двукратны.

Удалив из спектра λ^0 собственные значения λ_k^0, отвечающие $j \ge q/2$, и перенумеровав оставшуюся часть, получим конечное число величин $\overline{\lambda}_k$, $k = 1, \ldots, N$. В соответствии с доказанной теоремой собственные значения исходной задачи удовлетворяют неравенству $\lambda_k \le \overline{\lambda}_k$ при $k \le N$. Так как при $j \ne 0$ собственные функции исходной и осредненной задач не совпадают, то для ненулевых собственных значений справедливо строгое неравенство $\lambda_k < \overline{\lambda}_k$. Заметим, что если $z_r/z_1 \le 4$, то собственные значения λ_k^0, отвечающие различным j, не перемежаются, поэтому $\overline{\lambda}_k = \lambda_k^0$ и, следовательно, $\lambda_k < \lambda_k^0$ при $k \le N$.

Аналогичные оценки можно получить и в случае антипериодических краевых условий $v(0) = -v(l)$. Здесь собственные значения λ_k^0 и функции $v_k^0(x)$ определяются приведенными выше выражениями, где $j = s/2$, $s = 1, 3, 5, \ldots$. Как отмечено выше, при таких значениях j теорема остается справедливой. Так как $j \ne 0$, то $\lambda_k > 0$ и $\lambda_k < \overline{\lambda}_k$ при $k \le N$. Если $z_r/z_1 \le 9$, то $\overline{\lambda}_k = \lambda_k^0$ и, следовательно, $\lambda_k < \lambda_k^0$ при $k \le N$.

В задачах о параметрических колебаниях линейных систем [5] большой интерес представляет собственное значение λ_1 антипериодической краевой задачи для уравнения (20) при $q = 1$ (при $\lambda < \lambda_1$ все решения уравнения (20) ограничены на $(0, \infty)$, т. е. система устойчива). Некоторые верхние оценки величины λ_1, выраженные с помощью матриц $M(x)$ и $C(x)$, получены в [6]. Неравенство (19) позволяет получить нижнюю оценку указанной величины $\lambda_1^0 = \pi^2/(l^2 z_r)$. Заметим, что если в (11) возле функций $a'_{pk}(x)$ и $b'_{pk}(x)$ поставить множитель μ, то $\lambda_1(\mu)$ монотонно убывает на $[0, 1]$ [7].

Проиллюстрируем применение доказанной теоремы в случае $n > 1$ на примере частот собственных колебаний пластинок. Квадраты частот определяются с помощью функционала вида (2) [8], где $x = (x_1, x_2)$, $v(x)$ — скалярная функция ($r = 1$), квадратичные формы K_1 и K_2 содержат в качестве коэффициентов, вообще говоря, переменные величины $D(x)$, $\nu(x)$ и $p(x)$ (цилиндрическая жесткость, коэффициент Пуассона и плотность), зависящие от физических характеристик пластинки.

Рассмотрим сначала круглую пластинку; пусть ρ, φ — полярные координаты. Предположим, что $D(\rho, \varphi)$, $\nu(\rho, \varphi)$ и $p(\rho, \varphi)$ периодичны по координате φ с периодом $2\pi / q$ (последнее, в частности, имеет место в радиально армированных и перфорированных пластинках). Формы колебаний системы с осредненными по φ коэффициентами $D^0(r)$, $\nu^0(r)$ и $p^0(r)$ имеют вид (1), где функции $v_k^0(r, j)$ и соответствующие квадраты частот собственных колебаний λ_k^{0j} определяются из решения одномерной задачи и зависят от условий на контуре пластинки.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче условия доказанной теоремы выполняются. Исключив из спектра λ^0 частоты, отвечающие гармоникам $j \geq q/2$, и перенумеровав оставшуюся часть, получим спектр $\bar{\lambda}$. Учитывая, что собственные функции исходной и осредненной задач различны, найдем, что квадраты частот заданной системы удовлетворяют неравенству $\lambda_k < \bar{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что последнее, в отличие от случая $n = 1$, включает счетное множество собственных значений.

Рассмотрим теперь прямоугольную пластинку $(0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$, шарнирно опертую по сторонам $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ $(v = \partial^2 v / \partial x_1^2 = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1)$. Предположим, что коэффициенты $D(x_1, x_2)$, $\nu(x_1, x_2)$ и $p(x_1, x_2)$ периодичны по x_1 с периодом l_1 / q и четны относительно $x_1 = l_1 / 2$. В задаче с осредненными по x_1 коэффициентами собственные функции имеют вид [8]

$$v_k^0(x_1, x_2) = v_k^0(x_2) \sin(2\pi j x_1 / l_1), \quad j = s/2, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Функции $v_k^0(x_2)$ и собственные значения определяются из решения одномерной задачи в зависимости от условий на краях $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$. Так как здесь величины j принимают и полуцелые значения, то теорема справедлива при дополнительном условии (12); последнее выполняется в силу четности $D(x_1, x_2)$, $\nu(x_1, x_2)$ и $p(x_1, x_2)$ относительно $x_1 = l_1 / 2$. Поэтому собственные значения исходной задачи также удовлетворяют неравенствам $\lambda_k < \bar{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

1. *Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.* Метод осреднения в статике и динамике ребристых оболочек. – М.: Наука, 1985. – 221 с.
2. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Усреднение собственных значений краевой задачи теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1983. – **24**, № 5. – С. 50–58.
3. *Kesavan S.* Homogenization of elliptic eigenvalue problems // Appl. Math. and Optim. – 1979. – **5**. – Pt I. – P. 153–167; Pt II. – P. 197–216.
4. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
7. *Зевин А. А.* Симметризация функционалов и ее применение в задачах механики // Изв. АН СССР. МТТ. – 1991. – № 5. – С. 109–118.
8. *Вибрации* в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под. ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.

Получено 06.03.95