УДК 514

В. Ф. Игнатенко (Симферопол. ун-т)

ДИАМЕТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ *. I

The current state of diametrical theory of algebraic hypersurfaces in the real Euclidean space is considered.

Розглядається сучасний стан діаметральної теорії алгебраїчних гіперповерхонь в дійсному евклідовому просторі.

Введение. В теории инвариантов можно выделить ряд современных тенденций (см. [3, 4]). Одну из них определяет теория инвариантов бесконечных групп G_μ, порожденных косыми отражениями относительно $(m-1)$-мерных плоскостей, в вещественном евклидовом пространстве E^m. Необходимость развития указанной теории обусловливается как ее внутренними потребностями, так и широким проникновением в смежные дисциплины — в алгебраическую геометрию, дифференциальные уравнения и т. д. [5]. Группы G_μ определяют, в частности, группы симметрий в псевдоевклидовых пространствах и находят применение в теоретической физике и механике [6, 7].

Теория инвариантов групп симметрий G (конечных и бесконечных) является составной частью диаметральной теории $(m-1)$-мерных алгебраических поверхностей F_n порядка n, развитие которой представляет и самостоятельный интерес. Идеи диаметральной теории F_n проникают в комбинаторную геометрию [8]. В этом направлении также следует ожидать глубоких результатов. „Теория алгебраических кривых над конечными полями сейчас стала прикладной математикой ... " [9, с. 4] и поэтому естественно, что диапазон применения диаметральной теории поверхностей F_n необычайно широк.

Диаметральной теории алгебраических поверхностей F_n посвящена настоящая статья. При этом рассматриваются аффинные свойства поверхностей как относящиеся к геометрии проективного пространства с выделенной в нем несобственной плоскостью (эффективность такого подхода хорошо известна). Вещественное пространство предполагается погруженным в комплексное пространство, т. е. пространство считается пополненным мнимыми (не вещественными) точками.

Результаты, приведенные в статье, принадлежат преимущественно автору.

1. Диаметральные поверхности. Их геометрическая интерпретация.

1.1. Пусть в пространстве E^m задана декартова система координат Ox_i, $i = \overline{1, m}$. Алгебраическую поверхность F_n зададим уравнением

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varphi_{n-s}(\vec{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi_{n-s}(\vec{x})$ — формы степеней $n-s$ относительно координат вектора $\vec{x} = (x_i)$. В однородных координатах y_j, $j = \overline{1, m+1}$, уравнение (1) имеет вид

---

* В основу статьи положены доклады автора на международной конференции по геометрии „в целом" [1] и на второй крымской математической школе „Метод функций Ляпунова и его приложения" [2].

$$\varphi(y_j) \equiv \sum_{s=0}^{n} \varphi_{n-s}(y_i)\, y_{m+1}^{s} = 0. \tag{2}$$

Направление, определяемое вектором $\vec{u} = (u_i)$, называется *асимптотическим* для поверхности F_n, если $\varphi_n(\vec{u}) = 0$.

При этом несобственная (бесконечно удаленная) точка $U(u_1 : \ldots : u_m : 0)$ лежит на поверхности F_n.

1.2. Пусть поверхность F_n задана уравнением (2). Тогда $(n-k)$-й *полярной поверхностью* $P_k(U)$ порядка $1 \le k \le n-1$ точки $U(u_1 : \ldots : u_{m+1})$ относительно F_n называется поверхность, определяемая уравнением

$$\left(\sum_j u_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^{n-k} \varphi(y_j) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно переписать так:

$$\left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right)^{k} \varphi(u_j) = 0. \tag{4}$$

Если точка $U\,(= U_\infty)$ является несобственной, то $P_k(U_\infty)$ называется $(n-$ $-k)$-й диаметральной поверхностью $D_k(\vec{u})$, сопряженной вектору $\vec{u} = (u_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Поверхность $P_k(U_\infty)$ содержит несобственную плоскость компонентой кратности $0 \le h \le k$. Будем считать направление $\vec{u}$ таким, что $h < k$. Тогда порядок поверхности $D_k(\vec{u})$ равен $k - h$.

1.3. Пусть прямая $d \parallel \vec{u}$ пересекает поверхность F_n в $r \ge 2$ точках $B_s(x_{si})$, $s = \overline{1, r}$. Произвольную точку диаметральной поверхности $D_k(\vec{u})$, лежащую на прямой d, обозначим через $A(x_i)$. Если $|\vec{u}| = 1$, то $x_{si} = x_i + \lambda_s u_i$, где параметры λ_s показывают отклонения точек B_s от A. Они равны длинам векторов $\overrightarrow{AB_s}$, взятым со знаком плюс или минус. Для любой из диаметральных поверхностей справедливо одно из следующих равенств [10]:

$$\sum \lambda_s = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_t} \lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \ldots \lambda_{s_t} = 0, \qquad 1 < t \le r - 1. \tag{6}$$

1.4. Если направление вектора $\vec{u}$ является неасимптотическим для поверхности F_n (см. п. 1.1), то диаметральные поверхности $D_t(\vec{u})$, $1 < t \le r-1$, полностью характеризуются равенствами (6). Для диаметральной плоскости $D_{\vec{u}}$ $(= D_1(\vec{u}))$ координаты

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_s x_{si}. \tag{7}$$

Поэтому плоскость $D_{\vec{u}}$ есть геометрическое место центров тяжести (средних расстояний) точек пересечения с F_n прямых направления $\vec{u}$. Верно и обратное.

1.5. Пусть вектор $\vec{u}$ задает простое асимптотическое направление для поверхности F_n (U_∞ — простая точка F_n). Тогда плоскость $D_{\vec{u}}$ касается поверхности F_n в точке U_∞, т. е. является ее асимптотической плоскостью. Поэтому *самосопряженная* диаметральная плоскость $(\vec{u} \parallel D_{\vec{u}})$ — асимптотическая плоскость F_n.

Равенства (5) и (6) характеризуют в общем диаметральную квадрику $D_2(\vec{u})$ и поверхности $D_{t+1}(\vec{u})$, $t \le r-1$.

Отметим, что здесь центры тяжести точек пересечения с поверхностью F_n прямых направления $\vec{u}$ распределяются уже́ нелинейно (лежат на квадрике).

Пример. Рассмотрим в E^2 гиперболу C_3 $(= F_3)$, определяемую уравнением $x_1 x_2^2 + x_1^2 - x_2 + 1 = 0$ [11]. Вектор $\vec{u} = (1, 0)$ задает простое асимптотическое направление для кривой C_3. Ему сопряжена диаметральная коника (парабола) с уравнением $2x_1 + x_2^2 = 0$ (см. (4)). Точка параболы, лежащая на прямой $d \parallel \vec{u}$, является центром тяжести двух точек $B_s = d \cap C_3$ (вещественных или мнимых).

Асимптота (ось x_2) пересекает C_3 в одной собственной точке, но любая другая прямая, параллельная новому вектору $\vec{u} = (0, 1)$, — в двух. Указанная ось является асимптотой и гиперболы $D_2(\vec{u})$, определяемой уравнением $2x_1x_2 - 1 = 0$.

1.6. Пусть направление вектора $\vec{u}$ является $(n-r)$-кратным асимптотическим направлением для поверхности F_n; U_∞ — особая точка кратности $n-r$ поверхности F_n, причем $1 < r \le n-2$. Тогда поверхности $D_{k'}(\vec{u})$, $k' < n-r$, неопределены. Равенства (5) и (6) характеризуют поверхности $D_{n-r+1}(\vec{u})$ и $D_{k'+t+1}(\vec{u})$.

1.7. Свойство диаметральной плоскости, определяемое равенством (7), обобщает следующее предложение.

Предложение 1 [10]. *Если диаметральная поверхность $D_k(\vec{u})$ сопряжена асимптотическому направлению $\vec{u}$ кратности $k-1 \ge 0$ для поверхности F_n, то каждая прямая $d \parallel \vec{u}$, отличная от асимптоты F_n, пересекает поверхность $D_k(\vec{u})$ в одной точке, которая является центром тяжести точек $B_s = d \cap F_n$.*

1.8. Номер диаметральной поверхности $D_k(\vec{u})$ задает число $n-k$ (см. п. 1.2).

Предложение 2 [10]. *Для того чтобы плоскость π, являющаяся компонентой кратности $p \ge 0$ поверхности F_n, была плоскостью симметрии F_n по направлению $\vec{u}$, необходимо и достаточно, чтобы плоскость $\pi \not\parallel \vec{u}$ входила в состав всех нечетных (четных) диаметральных поверхностей F_n, сопряженных вектору $\vec{u}$, соответственно четному (нечетному) p.*

Это предложение дает метод нахождения плоскостей симметрии поверхности F_n. Его можно использовать, в частности, при изучении k-мерных поверхностей в пространстве E^m [12–14].

1.9. В случае $r = 1$ (см. п. 1.3) U_∞ является $(n-1)$-кратной точкой поверхности F_n, $n > 2$. Поверхность $D_{n-1}(\vec{u})$ — цилиндр с образующей, параллельной $\vec{u}$. Он представляет собой касательный конус поверхности F_n в ее несобственной точке U_∞.

Если $Ox_1 \parallel \vec{u}$, то в (1) многочлен $\varphi = x_1 \xi(x_\alpha) + \zeta(x_\alpha)$, $\alpha = \overline{2, m}$. При этом цилиндр $D_{n-1}(\vec{u})$ задает уравнение $\xi = 0$.

1.10. Конус называется *граничным* для поверхности F_n, если каждая его образующая не имеет с F_n общих собственных точек (вещественных или мнимых) [15].

Цилиндр $D_{n-1}(\vec{u})$ (см. п. 1.9) будет граничным в том случае, когда не имеет с поверхностью, определяемой уравнением $\zeta = 0$, общих собственных точек.

1.11. Пусть диаметральная поверхность $D_k(\vec{u})$ сопряжена асимптотическому направлению $\vec{u}$ кратности $p = k - 1 > 0$ для F_n и содержит плоскость симметрии π поверхности $F_n \not\ni \pi$ по направлению симметрии $\vec{u}$. Тогда число $n - k$ нечетно (предложение 2).

Обозначим через $\Phi_p(\vec{u})$ компоненту $D_k(\vec{u})$ порядка p, отличную от π. Как и в п. 1.9, выберем $Ox_1 \parallel \vec{u}$; $x_1 = 0$ — уравнение π. Многочлен $\varphi = x_1^s \xi(x_\alpha) + \kappa(x_i)$, где $s = n - p$, $\deg \xi = p$; степень κ относительно x_1 равна $t \le s - 1$. Поверхность $\Phi_p(\vec{u})$ является цилиндром с уравнением $\xi = 0$. Следовательно, геометрические интерпретации $D_{n-1}(\vec{u})$ (см. п. 1.9) и $\Phi_p(\vec{u})$ одинаковы: $\Phi_p(\vec{u})$ — касательный конус F_n в точке U_∞ [15].

Любая образующая $\Phi_p(\vec{u})$ — асимптота F_n. Порядок ее касания с F_n в точке U_∞ равен $s - t$. Цилиндр $\Phi_p(\vec{u})$ входит в состав F_n при $\zeta = \xi\zeta'$, $\kappa = \xi\kappa'$; хотя бы один из многочленов ζ', κ' не равен тождественно нулю.

2. Диаметральные плоскости. Случай их вырождения.

2.1. Пусть поверхность F_n определяется уравнением (1). Тогда диаметральная плоскость $D_{\vec{u}}$, сопряженная вектору $\vec{u}$, задается уравнением

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right)_{\vec{x} = \vec{u}} x_i + \varphi_{n-1}(\vec{u}) = 0. \tag{8}$$

Случай простого асимптотического направления $\vec{u}$ для F_n рассмотрен в п. 1.5.

Уравнение (8) показывает, что множество всех $D_{\vec{u}}$ совпадает с множеством диаметральных плоскостей моноида с $(n-1)$-кратной точкой O, определяемого уравнением $\varphi_n(\vec{x}) + \varphi_{n-1}(\vec{x}) = 0$.

2.2. Члены φ_n и φ_{n-1} могут иметь общий множитель χ степени ρ, входящих в них, вообще говоря, в разных степенях σ и τ:

$$\varphi_n = \chi^\sigma \psi, \qquad \varphi_{n-1} = \chi^\tau \omega;$$

ψ и ω — формы степеней $n - \rho\sigma$ и $n - \rho\tau - 1$ соответственно.

Множитель χ выделим только тогда, когда $\sigma > 1$ и $\tau \ge 1$.

В этом случае, если положить $\mu = \min(\sigma - 1, \tau)$, уравнение (8) принимает вид

$$\chi^\mu(\vec{u}) \left[\sum_i \left(\sigma \chi^{\sigma-\mu-1} \psi \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi^{\sigma-\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_{\vec{x} = \vec{u}} x_i + \chi^{\tau-\mu}(\vec{u})\,\omega(\vec{u}) \right] = 0; \tag{9}$$

хотя бы одно из чисел $\sigma - \mu - 1$, $\tau - \mu$ равно нулю.

Опустив в (9) множитель $\chi^\mu(\vec{u})$, получим уравнение плоскости

$$P_{\vec{u}}: \quad \sum_i A_i(\vec{u}) x_i + C(\vec{u}) = 0; \tag{10}$$

обозначения $A_i(\vec{u})$ и $C(\vec{u})$ ясны из (9), (10).

2.3. В случае $\chi(\vec{u}) \ne 0$ множество векторов $\vec{u}$, для которых все $A_i(\vec{u}) = 0$, распадается на два множества R_1 и R_2: $\vec{u} \in R_1$, если $C(\vec{u}) \ne 0$, и $\vec{u} \in R_2$, если $C(\vec{u}) = 0$; коллинеарные векторы заменяются одним их представителем.

Если $\vec{u} \in R_2$, то поверхность не имеет определенной $D_{\vec{u}}$. Вектор $\vec{u}$ задает кратное асимптотическое направление для поверхности F_n (см. п. 1.6).

Если же $\vec{u} \in R_1$, то уравнение (10) в однородных координатах y_j, $j = \overline{1, m+1}$, принимает вид $y_{m+1} = 0$, т. е. $P_{\vec{u}}$ — несобственная плоскость Π_∞. Поверхность F_n пересекает эту плоскость в простой точке U_∞.

2.4. Пусть $\chi(\vec{u}) = 0$, где $\vec{u} \in R_2$. Уравнение (10) задает плоскость $P_{\vec{u}}$, которая уже не удовлетворяет определению диаметральной плоскости, сопряженной вектору $\vec{u}$. В этом случае плоскость $P_{\vec{u}}$ назовем *вырожденной диаметральной плоскостью* ($V_{\vec{u}}$ — ее обозначение).

Для асимптотических векторов конуса с уравнением $\chi(\vec{u}) = 0$ будем полагать $\chi^0 = 1$. Плоскость $K_{\vec{u}}$, касательная к этому конусу в точке U_∞, задается уравнением

$$\sum_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right)_{\vec{x}=\vec{u}} x_i = 0.$$

Предложение 3 [16]. *Плоскость* $V_{\vec{u}}$ *или совпадает с плоскостью* $K_{\vec{u}}$ *и является асимптотической для поверхности* F_n ($\tau > \sigma - 1$, $\psi(\vec{u}) \neq 0$), *или параллельна плоскости* $K_{\vec{u}}$ *и смещена от нее на вектор с координатами*

$$-\frac{\omega(\vec{u})\left(\dfrac{\partial \chi}{\partial x_i}\right)_{\vec{x}=\vec{u}}}{\sigma\psi(\vec{u})\sum_i \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial x_i}\right)^2_{\vec{x}=\vec{u}}}, \quad \tau = \sigma - 1, \quad \psi(\vec{u})\omega(\vec{u}) \neq 0.$$

В случае $\psi(\vec{u}) = 0$ и $\omega(\vec{u}) = 0$ мы ничего нового не получим.

Предложение 3 решает задачу, поставленную Дю Валем.

2.5. Члены φ_n и φ_{n-1} могут иметь несколько кратных множителей (см. п. 2.2):

$$\varphi_n = \prod_k \chi_{r_k}^{\sigma_k}, \quad \varphi_{n-1} = \zeta_{n'} \prod_k \chi_{r_k}^{\tau_k}, \quad k = \overline{1, t}. \tag{11}$$

Формы χ_{r_k} степеней $r_k \geq 1$ имеют кратности σ_k (или τ_k) ≥ 0, $\chi_{r_k}^0 = 1$; $n' = \deg \zeta_{n'} = n - \sum_k r_k \tau_k - 1$. При этом уравнение (8) запишем так:

$$w(\vec{u})\left[w_1(\vec{u})\sum_i B_i(\vec{u})x_i + H(\vec{u})\right] = 0, \tag{12}$$

где

$$w(\vec{u}) = \prod_k \chi_{r_k}^{\mu_k}(\vec{u}), \quad w_1(\vec{u}) = \prod_k \chi_{r_k}^{\sigma_k - \mu_k - 1}(\vec{u}),$$

$$\mu_k = \min(\sigma_{k-1}, \tau_k),$$

$$B_i(\vec{u}) = \sum_k \sigma_k \frac{\partial \chi_{r_k}(\vec{u})}{\partial u_i} \prod_{k' \neq k} \chi_{r_{k'}}(\vec{u}), \quad k' = \overline{1, t},$$

$$H(\vec{u}) = \zeta_{n'}(\vec{u}) \prod_k \chi^{\tau_k - \mu_k}(\vec{u}).$$

Если в уравнении (12) опустить $w(\vec{u})$, то оно будет определять плоскость $P_{\vec{u}}$. Если $w(\vec{u}) = 0$, то $P_{\vec{u}} = V_{\vec{u}}$.

2.6. Обозначим через R множество всех векторов $\vec{x} \neq 0$, для которых плоскости $P_{\vec{x}}$ совпадают с данной плоскостью $P_{\vec{u}} \neq \Pi_\infty$. Тогда

$$\frac{B_1(\vec{x})}{B_1(\vec{u})} = \ldots = \frac{B_m(\vec{x})}{B_m(\vec{u})} = \frac{H(\vec{x})}{H(\vec{u})}. \tag{13}$$

В пространстве E^3 множество R конечно. Но при $m > 3$ оно может быть бесконечным. Такое R в E^4 определяет поверхность с уравнением $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) + 2x_3^2 = c$.

Если R конечно и $n_0 = \sum_k r_k - 1$ (см. п. 2.5), то согласно обобщенной теореме Безу, примененной к (13), R имеет размерность

$$r \leq r_0 = n_0^{m-1}. \tag{14}$$

Предложение 4 [16]. *Плоскость* $P_{\vec{u}} = D_{\vec{u}}$ (*или* $V_{\vec{u}}$) *сопряжена в общем* r_0 *направлениям.*

2.7. Оценка (14) характеризует и размерность множества S всех ненулевых решений системы $B_i(\vec{x}) = 0$, $i = \overline{1, m}$, если оно конечно.

Поэтому конечное число несобственных кратных точек поверхности F_n не больше r_0.

3. Главные диаметральные плоскости.

3.1. Пусть формы $\varphi_n(\vec{x})$ и $\varphi_{n-1}(\vec{x})$ уравнения поверхности F_n в прямоугольной системе координат имеют вид (11).

Вектор $\vec{u}$ задает *главное* направление для поверхности F_n, если

$$\frac{B_1(\vec{u})}{u_1} = \ldots = \frac{B_m(\vec{u})}{u_m}. \tag{15}$$

Плоскость $P_{\vec{u}}$, сопряженная главному направлению, также называется *главной*.

3.2. Для каждого вектора $\vec{u} \in S$ (см. п. 2.7) не существует определенной собственной плоскости $P_{\vec{u}}$.

Если все ненулевые решения системы (15) составляют множество B, а нормальные векторы всех главных плоскостей $P_{\vec{u}}$ — множество P, то $B = P \bigcup S$.

При конечном B положим $N_B = \dim B$, $N_P = \dim P$, $N_P \leq N_B$. Розина [17] установил, что в E^3

$$N_p \leq n^2 - n = 1. \tag{16}$$

Пример. Число $N_B = N_P = 13$ $(S = \varnothing)$ для поверхности в E^3 с уравнением $\sum x_i^4 - 2\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 = c$. Эта поверхность инвариантна относительно группы симметрий куба. Уравнения $x_i = 0$, $x_i \pm x_j = 0$, $i < j$, определяют ее плоскости симметрии. Все они являются главными диаметральными плоскостями. Кроме них множество P содержит плоскости с уравнениями $x_1 \pm x_2 \pm \pm x_3 = 0$.

3.3. Уравнения (15) запишем так:

$$B_i = \rho\, u_i, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{17}$$

Положим $\rho = v^{n_0 - 1}$, где $n_0 = \sum_k r_k - 1 > 1$ (см. п. 2.6). Уравнения (17) определяют следующие системы уравнений от переменных u_i и u_i, v соответственно:

$$B_1 u_j - u_1 B_j = 0, \quad j = \overline{2, m}, \tag{18}$$

$$B_i - v^{n_0 - 1} u_i = 0. \tag{19}$$

Оценку (16) обобщает на пространство E^m следующая теорема.

Теорема 1 [18]. *Пусть асимптотический конус поверхности F_n распадается на t компонент порядков r_k и кратностей $\sigma_k < n$ соответственно, $k = \overline{1, t}$, $n = \sum_k r_k \sigma_k$. Тогда размерность конечного множества плоскостей $P_{\bar{u}}$ поверхности F_n не превышает*

$$\sum_i \left(\sum_k r_k - 1 \right)^{m-i}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании системы (19). Розина (см. п. 3.2) получил оценку (16) из системы вида (18).

Следствие. *Пусть Π^{γ} — пересечение осей вращения асимптотического конуса K_n поверхности F_n; $(\gamma - 1)$-конус $\Pi^{\gamma} \cap K_n$ является цилиндром с h-образующими, параллельными Π^h, и состоит из l компонент порядков p_s и кратностей $q_s < n$ соответственно, $s = \overline{1, l}$, $n = \sum_s p_s q_s$. Тогда размерность конечного множества главных плоскостей $P_{\bar{u}}$, параллельных ортогональному дополнению $(\gamma - h)$-плоскости $\Pi^{\gamma} \ominus \Pi^h$, не превышает*

$$\sum_i \left(\sum_s p_s - 1 \right)^{\gamma - h - i}, \quad i = \overline{1, r - h}.$$

3.4. Если поверхность F_n имеет конечное множество плоскостей ортогональной симметрии, нормали которых не определяют асимптотические направления для F_n, то его размерность не больше числа (20).

Конечная группа косых симметрий изоморфна некоторой группе, порожденной ортогональными отражениями [19]. Поэтому (20) оценивает сверху размерность конечного множества плоскостей косой (в отдельных случаях ортогональной) симметрии поверхности F_n с неасимптотическими для нее направлениями симметрии.

3.5. Пусть нормальный вектор плоскости ортогональной симметрии поверхности F_n есть вектор неасимптотического направления для F_n. Тогда эта плоскость будет главной диаметральной плоскостью поверхности F_n. Алгебра J^G инвариантов заданной конечной группы симметрий G имеет такой многочлен $\varphi(\bar{x})$ некоторой степени $n > 2$, что все плоскости симметрии поверхности с уравнением $\varphi(\bar{x}) = 0$ принадлежат $\{D_{\bar{u}}\}$. Более того, множество инвариантов типа $\varphi(\bar{x})$ бесконечно.

Если группа G содержит центральную инверсию, то в качестве n можно взять любое четное число, не меньшее степени неквадратичного базисного инварианта J^G.

Таким образом, в пространстве E^m естественно выделяется класс поверхностей F_n, для которых теория инвариантов групп G является составной частью теории главных диаметральных плоскостей F_n.

3.6. Одна из фундаментальных проблем теории групп G заключается в нахождении всех многогранников, инвариантных относительно G. Ее решение во многом сводится к построению конечных множеств плоскостей с заданной группой G (см., например, [20]). Их дают инварианты алгебры J^G, состоящие из различных линейных множителей. Распад элемента J^G на линейные множители связан с наличием различных вещественных корней уравнения от одной переменной. Это определяет глубокую связь теории однородных многогранников с теорией Галуа.

Выделение поверхностей F_n с конечным множеством плоскостей $P_{\vec{u}}$ — еще один путь к новым однородным многогранникам.

В теории этих многогранников одной из актуальных является проблема вписывания правильного m-симплекса в m-куб (обзор соответствующих результатов см. в [10]). По-видимому, в такой постановке указанная проблема впервые была предложена в Харьковской геометрической школе [21].

4. Взаимно сопряженные диаметральные плоскости. Фундаментальная h-плоскость поверхности.

4.1. Вектор $\vec{u} = (u_i)$ называется *сопряженным* вектору $\vec{v} = (v_i)$ относительно поверхности F_n, если

$$\sum_i \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\right)_{\vec{x}=\vec{v}} u_i = 0. \tag{21}$$

Согласно этому определению вектор $\vec{u}$ сопряжен каждому асимптотическому вектору конуса порядка $n-1$ с уравнением

$$\sum_i \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i} u_i = 0.$$

Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются *взаимно сопряженными,* если условие (21) симметрично относительно них.

Предложение 5 [16]. *Существование h-плоскости Π^h такой, что каждый параллельный ей вектор сопряжен относительно поверхности F_n любому вектору пространства E^m, необходимо и достаточно для того, чтобы асимптотический конус поверхности был цилиндром с h-образующими, параллельными Π^h.*

4.2. Запишем условие (21) в случае (11) (см. п. 2.5) :

$$w(\vec{v})\, w_1(\vec{v}) \sum_i B_i(\vec{v})\, u_i = 0. \tag{22}$$

При $\sigma_k = \mu_k + 1$, $k = \overline{1, t}$, множитель $w_1(\vec{v}) = 1$.

Каждый вектор пространства E^m сопряжен любому вектору множества, состоящего из множества S (см. п. 2.7) и асимптотических векторов для приводимого конуса с уравнением $w(\vec{x})\, w_1(\vec{x}) = 0$, число различных компонент которого равно числу индексов $k \,|\, \sigma_k > 1$. Векторы этого конуса самосопряжены, некоторые асимптотические векторы для конуса могут находиться в S.

Пусть множество W состоит из множества S и асимптотических векторов для конуса с уравнением $w_1(\vec{x}) = 0$; в случае $w_1 = \text{const}$ множество $W = S$. Плоскость $P_{\vec{u}}$ ($\vec{u} \in W$) либо не определена, если $H(\vec{u}) = 0$ (см. (12)), либо совпадает с несобственной плоскостью, если $H(\vec{u}) \neq 0$. При $H(\vec{u}) = 0$ любая плоскость E^m сопряжена вектору $\vec{u}$.

Две плоскости $P_{\vec{u}}$ и $P_{\vec{v}}$ называются *взаимно сопряженными* относительно поверхности F_n, если каждая из них параллельна вектору, сопряженному другой.

Предложение 6 [22]. *Если векторы* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *принадлежат множеству* W *и* $H(\vec{u}) = H(\vec{v}) = 0$, *то произвольные две плоскости пространства* E^m, *параллельные соответственно* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$, *будут взаимно сопряженными относительно поверхности* F_n. *При этом* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ *задают две такие* $(m-2)$*-параметрические связки плоскостей с несобственными центрами* U_∞ *и* V_∞, *что каждая плоскость одной связки взаимно сопряжена с произвольной плоскостью другой.*

Асимптотический вектор $\vec{u} \notin W$ для поверхности F_n параллелен сопряженной ему плоскости $P_{\vec{u}}$. Самосопряженность вектора $\vec{u}$ относительно поверхности F_n есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы он был ее асимптотическим вектором (см. пп. 1.5 и 2.2).

4.3. Рассмотрим множество всех собственных диаметральных плоскостей $D_{\vec{u}}$ поверхности F_n.

Предложение 7 [16]. *Множество всех диаметральных плоскостей* $D_{\vec{u}}$ *поверхности* F_n *можно рассматривать, вообще говоря,* а) *как объединение бесконечных множеств, состоящих из* s*-параллельных плоскостей* $(s < m-1)$ *и* б) *как объединение конечных множеств, каждое из которых состоит из* $(n-1)^{m-1}$ *параллельных плоскостей.*

Множество плоскостей $D_{\vec{u}}$ имеет в некотором смысле огибающую, которая может быть использована при изучении F_n. Например, Розина [23, 24] разработал метод классификации плоских алгебраических кривых с помощью указанной огибающей.

Для вырожденных диаметральных плоскостей (см. п. 2.4) справедливо утверждение, аналогичное предложению 7.

4.4. Назовем h-плоскость Π^h $(0 \le h \le m-2)$ *фундаментальной* h-плоскостью поверхности F_n, если через нее проходят все диаметральные плоскости $D_{\vec{u}}$. Здесь $D_{\vec{u}}$ — определенные плоскости.

Пример. Поверхность F_n с уравнением $x_1^n + \ldots + x_{m-1}^n + x_m^{n-2} + c = 0$ имеет фундаментальную прямую $(h = 1)$ — ось x_m. Плоскость $D_{\vec{u}}$, сопряженная вектору $\vec{u} = (0, \ldots, 0, 1)$, является неопределенной.

Теорема 2 [16]. *Общее уравнение поверхности* F_n, *которая имеет собственную фундаментальную* h*-плоскость, можно записать так*:

$$\varphi_n(z_l) + \zeta(z_i) = 0, \qquad l = \overline{h+1, m}, \tag{23}$$

где z_i, $i = \overline{1, m}$, *есть линейные функции от* x_i, $\deg \zeta \le n-2$.

В случае $m = 3$ уравнение F_n типа (23) привел Розина [17].

На основании (23) асимптотический конус K_n поверхности F_n, $n > 1$, является цилиндром с h-образующей. Значит, из предложения 5 и теоремы 2 вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Каждый вектор, параллельный собственной фундаментальной* h*-плоскости поверхности* F_n, *сопряжен относительно* F_n *любому вектору пространства* E^m.

Следствие 2. *Для того чтобы все диаметральные плоскости поверхности* F_n *были параллельны некоторой* h*-плоскости* Π^h, *необходимо и достаточно, чтобы ее асимптотический конус был цилиндром с* h*-образующими, параллельными* Π^h.

Выделим случай $h = m-1$: для того чтобы все диаметральные плоскости поверхности F_n были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы ее асимптотический конус был n-кратной плоскостью. Этот факт отмечен в статье [17] при $m = 3$.

4.5. Если $\{V_{\vec{u}}\} \neq \varnothing$ (см. п. 2.4), то все плоскости $V_{\vec{u}}$ проходят через фундаментальную Π^h. Как и в п. 4.4, речь идет о собственных и определенных $V_{\vec{u}}$. В случае $\tau_k < \sigma_k$, $k = \overline{1, t}$ (см. п. 2.5) справедливо обратное утверждение — *характеристический признак* фундаментальной h-плоскости.

Предложение 8 [22]. *Если в формах* (11) *числа* $\tau_k < \sigma_k$, $k = \overline{1, t}$, *и все плоскости множества* $V_{\vec{u}}$, *содержащего хотя бы два элемента, проходят через одну и ту же собственную* h*-плоскость* $(0 \leq h \leq m - 2)$, *то она является фундаментальной* h*-плоскостью поверхности* F_n.

Требование $\tau_k < \sigma_k$ для всех $k = \overline{1, t}$ существенно.

Пример. Рассмотрим в E^3 поверхность F_5, определяемую уравнением $x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) + x_2^2 x_3^2 - x_1 + c = 0$. Согласно п. 2.5, $\chi_1 = x_2 x_3$, $\chi_2 = x_2 + x_3$, $r_1 = \sigma_1 = \tau_1 = 2$, $r_2 = \sigma_2 = 1$, $\tau_2 = 0$ $(t = 2)$, функция $w = \chi_1$. Множество $V_{\vec{u}}$ состоит из двух координатных плоскостей с общей осью x_1, которая не является фундаментальной прямой.

4.6. Взаимно сопряженные направления во многих случаях можно применить для упрощения уравнения поверхности F_n.

Действительно, пусть взаимно ортогональные векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ принадлежат множеству B (см. п. 3.2). Тогда из (15) и равенства $\sum_i u_i v_i = 0$ находим $\sum_i B_i(\vec{u}) v_i = 0$. Согласно (22) вектор $\vec{v}$ сопряжен $\vec{u}$. Более того, векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ являются взаимно сопряженными, что и позволяет упростить уравнение F_n, имеющей попарно ортогональные главные направления. Для этого оси $x_1, \ldots, x_j$, $2 \leq j \leq m$, надо выбирать так, чтобы базисные векторы, им параллельные, принадлежали множеству B.

5. Вырожденные диаметральные поверхности. Их строение.

5.1. Множество $(n - k)$-х диаметральных поверхностей $D_k(\vec{u})$ в общем порядка k поверхности F_n (см. п. 1.2) совпадает с множеством $D_k(\vec{u})$ поверхности Φ_n с уравнением

$$\sum_{t=0}^{k} \varphi_{n-t}(\vec{x}) = 0. \tag{24}$$

Эта поверхность Φ_n имеет $(n - k)$-кратную точку в начале координат O. Номер $D_k(\vec{u})$ есть кратность точки $O \in \Phi_n$. Случай $k = 1$ см. в п. 2.1.

Пусть

$$\varphi_{n-t} = \chi^{\lambda_t}(\vec{x}) \psi_t(\vec{x}), \qquad \deg \psi_t = n - \rho\lambda_t - t, \tag{25}$$

где $\rho = \deg \chi$, числа $\lambda_t > k - t$, $t = \overline{0, k}$. При $\omega = \min\{\lambda_t - k + t\}$ левая часть уравнения $D_k(\vec{u})$ (см. п. 1.2) содержит множитель $\chi^{\omega}(\vec{u})$, отбросив который, получим уравнение *вырожденной диаметральной поверхности* $V_k(\vec{u})$, если $\chi(\vec{u}) = 0$.

На основании (25) уравнение (24) принимает вид

$$\chi^{\omega}(\vec{x}) \sum_{t=0}^{k} \varphi'_{n-\omega-t}(\vec{x}) = 0.$$

Следовательно, поверхность Φ_n распадается на ω-кратный конус $\chi(\vec{x}) = 0$ и поверхность $\Phi_{n-\omega}$ с уравнением

$$\sum_{t=0}^{k} \varphi'_{n-\omega-t}(\vec{x}) = 0. \tag{26}$$

Строение поверхности $V_k(\vec{u})$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 3 [25]. *Пусть поверхность* F_n *определяется уравнением* (1) *при условии* (25). *Если* $\chi(\vec{u}) = 0$, *то поверхность* $V_k(\vec{u})$ *распадается на* $k - h$ *вещественных и мнимых плоскостей, параллельных вектору* $\vec{u}$ *и касательной плоскости конуса* $\chi(\vec{u}) = 0$; h *есть кратность касания поверхности* F_n *и несобственной плоскости.*

Эта теорема содержит частичное решение одной из задач, поставленных в [26].

5.2. Касательный конус поверхности F_n в ее s-кратной собственной точке T есть полярная поверхность $P_s(T)$ (см. п. 1.2 и [27]).

Выделенное свойство специальной $P_s(T)$ представляет собой синтетическую аргументацию пп. 1.9 и 1.11.

5.3. Оказывается, что распад $V_k(\vec{u})$ на плоскости вызывается не только вырождением диаметральной поверхности, но и существованием других поверхностей, невырожденные диаметральные поверхности которых имеют указанные выше свойства.

Рассмотрим поверхность H_n порядка n, определяемую уравнением

$$\chi^k(\vec{x}) f(\vec{x}) + \psi(\vec{x}) = 0, \tag{27}$$

где форма f степени $n - \rho k$ не содержит множителя $\chi (\deg \psi < n)$.

Предложение 9 [28]. *Если* $\chi(\vec{u}) = 0$, *то диаметральная поверхность* $D_k(\vec{u})$ *поверхности* H_n *распадается на вещественные и, может быть, мнимые плоскости, параллельные вектору* $\vec{u}$ *и касательной плоскости конуса* $\chi(\vec{u}) = 0$.

При доказательстве предложения 9 используется следующая конструкция. В проективном пространстве $P^m = E^m \cup \Pi_\infty$ выделяется некоторая плоскость как несобственная плоскость нового аффинного пространства A^m. H_n определяет в A^m поверхность H'_n, содержащую k-кратную точку N. Полярная поверхность $P_k(N)$ построенной H'_n является ее касательным конусом в точке N (согласно п. 5.2).

5.4. Из предложения 9 следует новое доказательство теоремы 3.

Пусть $\omega = \lambda_0 - k$. Тогда в (26) форма $\varphi'_{n-\omega} = \chi^k f$, т. е. (26) примет вид (27). На основании предложения 9 уравнение $D_k(\vec{u})$ поверхности $\Phi_{n-\omega}$ имеет степень $\alpha = k - h$ относительно линейной формы — левой части уравнения плоскости $K_{\vec{u}}$ (см. п. 2.4). Поэтому $V_k(\vec{u})$ распадается на α плоскостей.

Случай $\omega = \lambda_1 - k + 1$ рассматривается аналогично.

5.5. Пусть поверхность F_n имеет плоскость симметрии $\beta \ni 0$ по направлению симметрии $\vec{v} = (v_i)$, причем поверхность $V_k(\vec{u})$ также симметрична относительно β. Тогда диаметральная плоскость $D_{\vec{u}}$ конуса $\chi(\vec{x}) = 0$ параллельна или $\vec{v}$, или β. Во втором случае β совпадает с указанной $D_{\vec{u}}$. При этом асимптотический конус поверхности F_n симметричен относительно β.

Предложение 10 [28]. *Общая плоскость симметрии поверхностей* F_n *и* $V_k(\vec{u})$ *по направлению симметрии* $\vec{v}$ *входит в состав конуса* $\chi(\vec{x}) = 0$, *если она параллельна его диаметральной плоскости* $D_{\vec{u}}$.

6. Симметричные поверхности с вырожденными диаметральными плоскостями.

6.1. Пусть поверхность F_n инвариантна относительно конечной группы симметрий G, причем плоскости симметрии являются вырожденными диаметральными плоскостями $V_{\bar{u}}$.

Будем считать, что плоскость симметрии η поверхности F_n проходит через начало координат O. Отражения относительно η каждую из форм ψ, ω и многочлен $\zeta = \sum_{s=2}^{n} \varphi_{n-s}$ (см. п. 2.2) переводят в себя. Форма χ может быть и не инвариантной, если σ и τ одной четности, причем нечетными они могут быть только при $\zeta \equiv 0$ или в случае, когда ζ имеет χ множителем в нечетной степени.

6.2. Уравнения всех плоскостей, отражения относительно которых принадлежат группе G, запишем в виде $\eta_j(\vec{x}) = 0$, $j = \overline{1, N}$, где $\eta_j(\vec{x})$ — формы. Найдем орбиту плоскости η_1, т. е. все плоскости, в которые переходит η_1 при всех возможных преобразованиях группы G. Если эта орбита не исчерпывает всех плоскостей, то рассмотрим плоскость, не входящую в найденную орбиту, и построим вторую орбиту, порожденную выбранной плоскостью, и т. д.

Перенумеруем заново все плоскости симметрии, снабдив их двумя индексами: первый — номер орбиты, второй — номер плоскости в орбите. Тогда плоскости симметрии получат обозначения η_{sr_s}, $s = \overline{1, h}$, где h — число орбит, а r_s — их мощности.

Примеры. Все плоскости симметрии правильного m-симплекса в E^m составляют одну орбиту. То же свойство имеют плоскости симметрии правильных 24- и 600-гранников в E^4. Плоскости симметрии m-куба распадаются на две орбиты $(N = r_1 + r_2)$: одну составляют плоскости, параллельные его $(m - 1)$-граням, $r_1 = m$; другую — диагональные плоскости, проходящие через его противоположные $(m-2)$-грани, $r_2 = m(m-1)$. Плоскости симметрии многогранника типа пирамиды или бипирамиды также распадаются в E^m на несколько орбит.

Теорема 4 [16]. *Если поверхность F_n инвариантна относительно группы симметрий G и множество плоскостей симметрии содержит h орбит, составленных из плоскостей $V_{\bar{u}}$, то формы φ_n и φ_{n-1} уравнения* (1) *поверхности F_n содержат множитель вида*

$$\sum_{s=1}^{h} \chi_s^{p_s} \equiv \prod_{s=1}^{h} \prod_{t_s=1}^{r_s} \eta_{st_s}^{p_s},$$

где $p_s = \sigma_s, \tau_s$, $s = \overline{1, h}$, для φ_n, φ_{n-1} соответственно. При этом, если $\varphi_{n-1} \equiv 0$, $\sigma_s \le \tau_s$ и четность σ_s, τ_s одинакова. Если они нечетны, то либо $\zeta \equiv 0$ (см. п. 6.1), либо ζ делится на произведение χ_s в нечетной степени.

6.3. Пусть G является группой Коксетера, причем плоскость симметрии по направлению отражения $\vec{v}$ совпадает с диаметральной плоскостью $D_{\bar{u}}$ конуса $\chi(\vec{x}) = 0$ и служит плоскостью симметрии поверхности $V_k(\vec{u})$ (см. п. 5.1). Тогда из предложения 10 и теоремы 4 вытекает такое следствие.

Следствие [28]. *Пусть поверхность F_n инвариантна относительно группы Коксетера; $\eta_j = 0$, $j = \overline{1, N}$, — уравнения всех плоскостей симметрии с общей точкой O, причем хотя бы одна из них параллельна линейным компонен-*

там некоторой $V_k(\bar{u})$. *Тогда все плоскости симметрии имеют такое же свойство; в уравнении* (1) *поверхности* F_n *формы*

$$\varphi_{n-t} = \varphi'_{n-t} \prod_j \eta_j^{\lambda_t}, \qquad t = \overline{0, k}. \tag{28}$$

Отметим, что строение φ'_{n-t} определено в п. 5.1: $\varphi'_{n-t} = \chi_t^{\lambda_t} \psi_t$ (ср. (25) и (28)).

7. Геометрия обобщенной квадрики.

7.1. Существуют различные обобщения квадрик. Некоторые из них возникают при рассмотрении следующей задачи: характеризует ли квадрику среди определенного класса поверхностей давно известное ее свойство? Представляет естественный интерес нахождение такого класса поверхностей и его исследование.

***Пример* 1.** Несобственной аффинной сферой называется полная m-мерная поверхность в E^{m+1}, которая при надлежащем выборе декартовых координат z, x_i, $i = \overline{1, m}$, определяется уравнением $z = z(x_i)$, где $z(x_i)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\det\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \text{const} > 0.$$

А. В. Погорелов [29, 30] установил, что при любом m выпуклая несобственная аффинная сфера является эллиптическим параболоидом.

***Пример* 2.** Выпуклая поверхность пространства E^3, гомеоморфная плоскости, называется поверхностью типа параболоида, если предельный конус этой поверхности — луч. А. Д. Милка [31] доказал, что поверхность в E^3 типа параболоида, разложимая двумя различными способами, есть параболоид.

***Пример* 3.** Я. П. Бланк [32] установил, что поверхности, имеющие ∞^4 сетей Петерсона, суть квадрики.

7.2. Выделим поверхности F_n, множество диаметральных плоскостей $D_{\bar{u}}$ каждой из которых совпадает с множеством $D_{\bar{u}}$ некоторой квадрики.

Обобщенной квадрикой называется поверхность F_{2n}, определяемая уравнением

$$\varphi_2^n + \varphi_2^{n-1}\psi + \zeta = 0, \tag{29}$$

где $\varphi_2 = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, $\psi = 2\sum_i a_i x_i$, $i, j = \overline{1, m}$, и $\deg \zeta < 2n - 1$.

Это определение в E^m $(m \leq 3)$ ввел Розина [33].

Уравнение (8) диаметральной плоскости $D_{\bar{u}}$, сопряженной неасимптотическому для F_{2n} вектору $\bar{u} = (u_i)$, принимает вид

$$n \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right)_{\bar{x} = \bar{u}} x_i + \psi(\bar{u}) = 0. \tag{30}$$

Следовательно, $D_{\bar{u}}$ является диаметральной плоскостью квадрики Φ_2 с уравнением

$$n\varphi_2 + \psi + c = 0. \tag{31}$$

Поэтому Φ_2 называется *характеристической* квадрикой множества $D_{\bar{u}}$ поверхности F_{2n} [34].

Определяющая квадрика F_2 обобщенной квадрики F_{2n} задается уравнением

$$\varphi_2 + \psi + c = 0. \tag{32}$$

Диаметральная плоскость $D_{\vec{u}}$ квадрики F_2 имеет такое уравнение:

$$\sum_i \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)_{\vec{x}=\vec{u}} x_i + \psi(\vec{u}) = 0. \tag{33}$$

Согласно (30) и (33) множество диаметральных плоскостей квадрики Φ_2 (и поверхности F_{2n}) является образом множества диаметральных плоскостей квадрики F_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{n}$. Происходит сжатие множества диаметральных плоскостей F_2 к началу координат.

Число $\frac{1}{n}$ называется *коэффициентом отклонения* поверхности F_{2n} от определяющей квадрики F_2.

Строение множества диаметральных плоскостей F_{2n} по существу не зависит от значения $n > 1$. Поэтому особенный интерес представляет изучение обобщенных квадрик четвертого порядка $(n = 2)$.

7.3. Розина [33] ввел определитель Δ порядка 4 $(m = 3)$, состоящий из определителя φ_2, окаймленного коэффициентами ψ, причем последнее место занимает постоянная d уравнения (29). Число d не входит ни в какие выкладки, зависящие в действительности только от первых трех рядов Δ, и хотя выделены два основных класса поверхностей F_{2n} (согласно $\Delta \neq 0$ или $\Delta = 0$), этой специализации не дано геометрической характеристики.

Пусть в (31) и (32) число $c = d$. Запишем определитель δ квадрики Φ_2:

$$\delta = n^m \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & \frac{1}{n}\, a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & \frac{1}{n}\, a_m \\ a_1 & \dots & a_m & c \end{vmatrix} = n^{m-1}\left(\sum_i a_i M_i + cnM_c\right), \tag{34}$$

где M_i, M_c — алгебраические дополнения элементов $\frac{1}{n}\,a_i$, c соответственно.

На основании (32) и (34) $\Delta = \sum_i a_i M_i + cM_c$. При $\Delta = 0$ определитель $\delta = n^{m-1}(n-1)\,cM_c$.

Предложение 11 [34]. *При $\delta \neq 0$ обобщенная квадрика F_{2n} имеет фундаментальную точку, которая является центром характеристической квадрики Φ_2 или лежащей на F_{2n} несобственной точкой оси параболоида Φ_2. Если же $\delta = 0$, то поверхность F_{2n} имеет фундаментальную $(m - r)$-плоскость $(1 \le r \le m)$ или содержит фундаментальную $(m - r - 1)$-плоскость $(1 \le r \le m - 2)$ на бесконечности.*

В этом утверждении δ, Φ_2 можно заменить на Δ, F_2 соответственно.

Предложение 11 дает геометрическую интерпретацию условия $\Delta \neq 0$ (или $\Delta = 0$), а именно: определитель $\Delta \neq 0$ выделяет тот и только тот класс обобщенных квадрик F_{2n}, которые имеют фундаментальную точку (собственную или несобственную) (см. п. 4.4).

1. *Игнатенко В. Ф.* Бесконечные прозрачные группы, порожденные косыми отражениями // Тез. докл. междунар. конф. по геометрии „в целом". – Черкассы, 1995. – С. 33–34.

2. *Игнатенко В. Ф.* Перестроечный метод и дикие группы косых симметрий // Тез. докл. второй крым. мат. школы „Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь, 1995. – С. 24–25.
3. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. математики: Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – **55**. – С. 137–309.
4. *Игнатенко В. Ф.* О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1989. – **21**. – С. 155–208.
5. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 640 с.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 759 с.
7. *Голод П. І., Клімик А. У.* Математичні основи теорії симетрій. – Київ: Наук. думка, 1992. – 362 с.
8. *Берже М.* Геометрия. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 366 с.
9. *Арнольд В. И.* Топологические проблемы теории распространения волн // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, вып. 1. – С. 3–50.
10. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1984. – **16**. – С. 195–229.
11. *Смогоржевский А. С., Столова Е. С.* Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. – М.: Физматгиз, 1961. – 263 с.
12. *Аминов Ю. А.* Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах // Укр. геом. сб. – 1975. – Вып. 17. – С. 3–14.
13. *Фоменко А. П.* Индикатриса Дюпена двумерной поверхности в E^4 // Тез. докл. междунар. конф. по геометрии „в целом". – Черкассы, 1995. – С. 93.
14. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу // Укр. геом. сб. – 1989. – Вып. 32. – С. 11–27.
15. *Игнатенко В. Ф.* О некоторых классах алгебраических поверхностей с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Динам. системы. – 1989. – Вып. 8. – С. 119–126.
16. *Игнатенко В. Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии/ ВИНИТИ. – 1980. – **11**. – С. 203–240.
17. *Rosina B. A.* Sulla teoria diametrale delle superficile algebriche // Bull. Soc. roy. sci. Liège. – 1962. – **31**, № 3–4. – P. 146–157.
18. *Игнатенко В. Ф.* К оценке числа главных диаметральных плоскостей алгебраической поверхности пространства E^4 // Укр. геом. сб. – 1971. – Вып. 11. – С. 31–35.
19. *Flatto L.* Invariants of finite reflection groups // Enseign. math. – 1978. – **24**, № 3–4. – P. 237–292.
20. *Сопов С. П.* Об одном классе однородных многогранников // Укр. геом. сб. – 1970. – Вып. 7. – С. 130–140.
21. *Медяник А. И.* Правильный симплекс, вписанный в куб // Там же. – 1973. – Вып. 13. – С. 109–112.
22. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Там же. – 1977. – Вып. 20. – С. 35–46.
23. *Rosina B. A.* Classificazione delle quartiche plane secondo ta teoria diametrale delle curve algebriche piane // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. – 1975. – **21**. – P. 1–15.
24. *Rosina B. A.* Classificazione delle curve algebriche piane di ordine qualunque secondo la teoria delle curve algebriche piane // Atti Accad. sci. lett. ed arti Palermo. Ser. IV. – 1976. – Pt. 1. – **34**, № 2. – P. 101–121.
25. *Рудницкий О. И.* Об одном свойстве вырожденной диаметральной поверхности алгебраической поверхности пространства E^m // Динам. системы. – 1994. – Вып. 13. – С. 131–135.
26. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые задачи геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Дифференц.-геометр. структуры на многообразиях и их прил. – Черновцы, 1991. – С. 230–234. – Деп. в ВИНИТИ, № 562-В91.
27. *Бюшгенс С. С.* Дифференциальная геометрия. – М.; Л.: Гостехиздат, 1940. – 300 с.
28. *Ignatenko V. F.* Invariants of finite and infinite groups generated by reflections // J. Math. Sociol. – 1996. – **78**, № 3. – P. 334–361.
29. *Погорелов А. В.* Несобственные выпуклые аффинные гиперсферы // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 5. – С. 1008–1011.
30. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. – М.: Наука, 1975. – 96 с.
31. *Милка А. Д.* Неразложимость выпуклой поверхности // Укр. геом. сб. – 1973. – Вып. 13. – С. 112–129.
32. *Бланк Я. П.* Сопряженные сети конических линий // Докл. АН СССР. – 1949. – **14**, № 6. – С. 755–758.
33. *Rosina B. A.* Sulle superficie algebriche di ordine $2n$ con und conica (almero) doppia all'infinito (quadriche generalizzate) // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII. – 1953. – **2**. – P. 141–149.
34. *Игнатенко В. Ф.* О геометрии обобщенной квадрики // Динам. системы. – 1994. – Вып. 13. – С. 127–131.

Получено 13.03.97