УДК 517.938

А. В. Костин, С. А. Щеголев (Одес. ун-т)

О РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ФУРЬЕ, СОДЕРЖАЩИМИ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ПАРАМЕТРЫ

For a second-order quasilinear differential system whose coefficients have the form of the Fourier series with slowly varying parameters and frequency, under certain conditions, we prove that there exists a particular solution with similar structure in the case where the characteristic equation for matrix of coefficients of the linear part possesses purely imaginary roots.

Для квазілінійної диференціальної системи другого порядку, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою, при певних умовах доведено існування частинного розв'язку аналогічної структури у випадку суто уявних коренів характеристичного рівняння матриці коефіцієнтів лінійної частини.

Исследованию систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами посвящены работы [1 – 6]. В настоящей статье продолжаются исследования авторов [4, 5].

Обозначим через S_m класс функций $f(t,\varepsilon)$ таких, что:

1) $f\colon G\to\mathbb{C}$, $G=\{t\in\mathbb{R},\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0,\ \varepsilon_0\in\mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{R}^+=]0,+\infty[$;

2) $f\in C^m(\mathbb{R})$ по t;

3) $\dfrac{d^k f(t,\varepsilon)}{dt^k}=\varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$, $\sup\limits_G|f_k^*|<+\infty$, $0\le k\le m$.

Обозначим через B_m класс функций вида

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

имеющих свойства:

1) $f_n\in S_m$, $\dfrac{d^k f_n}{dt^k}=\varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon)$,

$$\|f\|_k\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sup_G|f_{nk}(t,\varepsilon)|<+\infty,\qquad 0\le k\le m;$$

2) $\theta(t,\varepsilon)=\displaystyle\int_0^t\varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi\colon G\to\mathbb{R}$, $\varphi\in S_m$, $\inf\limits_G|\varphi|=\varphi_0>0$.

B_m превращается в полное нормированное пространство введением нормы

$$\|f\|_{B_m}=\sum_{k=0}^{m}\|f\|_k.$$

Имеет место цепочка вложений: $B_0\supset B_1\supset\ldots\supset B_m$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{2}a_{jk}(t,\varepsilon)x_k+f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))+\mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2),\quad j=1,2,\tag{1}$$

где $a_{jk} \in S_m$, $f_j \in B_m$, $x_1, x_2 \in D \subset \mathbb{C}$, собственные значения вещественной матрицы $(a_{jk}(t,\varepsilon))_{jk=1,2}$ имеют вид $\pm i\omega(t,\varepsilon)$ $(\omega \in \mathbb{R})$, $\mu \in]0, \mu_0] \subset \mathbb{R}^+$.

Будем изучать вопрос о существовании у системы (1) частных решений из классов B_k, $0 \le k \le m$.

Эта задача является обобщением известной задачи о существовании периодического частного решения, которая рассмотрена для случая $\varepsilon = 0$ (a_{jk} — постоянные, $\varphi = \mathrm{const} \ne 0$, $\theta = \varphi t$, $f_j = f_j(\theta)$, $X_j = X_j(\theta, x_1, x_2)$ — 2π-периодические функции θ; $j, k = 1, 2$) в [7]. В работах авторов [4, 5] аналогичная задача рассматривалась для систем n уравнений, но при условии, что модули вещественных частей собственных значений матрицы $(a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ строго отделены от нуля в $\mathbb{R}$. В отличие от известных результатов [1 – 3, 6] компоненты x_1, x_2 искомого решения получены в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов из класса B_m.

Лемма. *Пусть задано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda(t,\varepsilon) + i\omega(t,\varepsilon))x + u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)), \tag{2}$$

вещественные функции $\lambda, \omega \in S_m$, $\inf\limits_G |\lambda| = \gamma > 0$,

$$u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)) \in B_m.$$

Тогда уравнение (2) *имеет единственное частное решение*

$$x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)) \in B_m, \tag{3}$$

причем существуют постоянные A_k, *не зависящие от* t, ε, $0 \le k \le m$, *такие, что*

$$\|x\|_k \le \frac{A_k}{\gamma} \sum_{r=0}^{k} \|u\|_r, \quad 0 \le k \le m.$$

Доказательство. Подставляя (3) в (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_n + u_n(t,\varepsilon), \tag{4}$$

где

$$\sigma_n = \lambda + i\omega - in\varphi.$$

Рассмотрим следующее решение уравнения (4):

$$x_n = \int_A^t u_n(\tau,\varepsilon)\exp\left(\int_\tau^t \sigma_n(s,\varepsilon)ds\right)d\tau,$$

$$A = \begin{cases} -\infty, & \lambda < 0; \\ +\infty, & \lambda > 0. \end{cases}$$

В случае $m = 0$ из известных оценок (см., например, [8]) имеем

$$\sup_G |x_n| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_G |u_n|,$$

откуда утверждение леммы следует автоматически. В случае $m \geq 1$ применим к x_n s-кратное интегрирование по частям $(s = \overline{1, m})$:

$$x_n = -\frac{1}{\sigma_n(t, \varepsilon)} \sum_{k=0}^{s-1} D_n^k(u_n(t, \varepsilon)) + \int_A^t D_n^s(u_n(\tau, \varepsilon)) \exp\left(\int_\tau^t \sigma_n(s, \varepsilon)\, ds\right) d\tau,$$

где

$$D_n(u(t, \varepsilon)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{u(t, \varepsilon)}{\sigma_n(t, \varepsilon)}\right),$$

$$D_n^k(u(t, \varepsilon)) = D_n(D_n^{k-1}(u(t, \varepsilon))).$$

Применяя к x_n оператор $D_n^{s-1}\left(\frac{d}{dt}\right)$, получаем

$$D_n^{s-1}\left(\frac{dx_n}{dt}\right) = \sigma_n(t, \varepsilon) \int_A^t D_n^s(u_n(\tau, \varepsilon)) \exp\left(\int_\tau^t \sigma_n(s, \varepsilon)\, ds\right) d\tau.$$

Из условий леммы следует

$$D_n^s(u_n(t, \varepsilon)) = \varepsilon^s u_{ns}(t, \varepsilon),$$

причем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \sup_G |u_{ns}(t, \varepsilon)| < +\infty, \qquad s = \overline{1, m}. \tag{5}$$

Из тех же оценок [8] следует

$$\left| D_n^{s-1}\left(\frac{dx_n}{dt}\right)\right| = \left(\sup_G |\lambda(t, \varepsilon)| + \sup_G |\omega(t, \varepsilon)| + |n| \sup_G |\varphi(t, \varepsilon)|\right) \times$$

$$\times \frac{\varepsilon^s}{\gamma} \sup_G |u_{ns}(t, \varepsilon)|,$$

откуда с учетом (5) вытекает требуемое.

Следствие. *Справедлива оценка*

$$\|x\|_{B_m} \leq \frac{A^*}{\gamma} \|u\|_{B_m}, \quad \textit{где} \quad A^* = \sum_{k=0}^{m} A_k.$$

Систему (1) будем изучать при следующих предположениях:

1°) $\inf\limits_G |a_{12}(t, \varepsilon)| \geq a_0 > 0$;

2°) $\inf\limits_G |k\omega(t, \varepsilon) - n\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0$

$$\forall n: \ |n| \leq \left(2 \sup_G |\omega(t, \varepsilon)| + 1\right) \varphi_0^{-1}; \quad k = 1, 2;$$

3°) функции X_1, X_2 имеют непрерывные частные производные по x_1, x_2 до 5-го порядка включительно, и если $x_1, x_2 \in B_m$, то все эти частные производные также из класса B_m.

Замечание. Для n таких, что $|n| > \left(2\sup\limits_G|\omega| + 1\right)\varphi_0^{-1}$, условие 2° выполнено автоматически с константой $\gamma = 1$, поскольку в этом случае

$$|k\omega - n\varphi| \geq |n|\inf_G|\varphi| - 2\sup_G|\omega| =$$

$$= |n|\varphi_0 - 2\sup_G|\omega| > 1 \qquad \forall\, t, \varepsilon \in G.$$

Будем приводить систему (1) к почти диагональному виду. Выполним в (1) замену

$$x_j = y_j + x_j^0, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

где y_1, y_2 — новые неизвестные функции,

$$x_j^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{jn}^0(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

$$x_{jn}^0 = \frac{\Delta_{jn}(t,\varepsilon)}{\Delta_n(t,\varepsilon)}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta_n(t,\varepsilon) = \begin{vmatrix} a_{11}(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon) & a_{12}(t,\varepsilon) \\ a_{21}(t,\varepsilon) & a_{22}(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon) \end{vmatrix},$$

определители Δ_{jn} получаются из Δ_n заменой j-го столбца на $\operatorname{col}\left(-f_{1n}(t,\varepsilon), -f_{2n}(t,\varepsilon)\right)$,

$$f_{jn} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t,\varepsilon,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta; \quad j = 1, 2; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из условия 2° вытекает

$$\inf_G|\Delta_n(t,\varepsilon)| \geq \gamma^2 > 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что x_1^0, x_2^0 являются $(2\pi/\varphi)$-периодическим решением системы (1) при $\varepsilon = \mu = 0$.

Нетрудно показать, что существует $C \in \mathbb{R}^+$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{2}\|x_k^0\|_{B_m} \leq C\sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{B_m}.$$

В результате замены (6) система (1) приводится к виду

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)y_k + \varepsilon c_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu u_j(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+ \mu\sum_{k=1}^{2} v_{jk}(t,\varepsilon,\theta)y_k + \mu Y_j(t,\varepsilon,\theta,y_1,y_2), \quad j = 1, 2, \tag{7}$$

где

$$c_j = -\varepsilon^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dx_{jn}^0}{dt} \exp(in\theta(t,\varepsilon)) \in B_{m-1},$$

$$u_j = X_j(t, \varepsilon, \theta, x_1^0, x_2^0) \in B_m,$$

$$v_{jk} = \frac{\partial X_j(t, \varepsilon, \theta, x_1^0, x_2^0)}{\partial x_k} \in B_m,$$

$$Y_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 X_j(t, \varepsilon, \theta, x_1^0 + \nu y_1, x_2^0 + \nu y_2)}{\partial x_1^2} y_1^2 + \right.$$

$$\left. + \; 2\frac{\partial^2 X_j(\ldots)}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 X_j(\ldots)}{\partial x_2^2} y_2^2 \right), \qquad 0 < \nu < 1; \quad j, k = 1, 2.$$

Выполним в системе (7) подстановку

$$y_j = z_j + y_j^0, \qquad j = 1, 2, \tag{8}$$

где z_1, z_2 — новые неизвестные функции,

$$y_j^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{jn}^0(t, \varepsilon, \mu) \exp(in\theta(t,\varepsilon)) \in B_{m-1},$$

$$y_{jn}^0 = \frac{\Delta_{jn}^*(t, \varepsilon, \mu)}{\Delta_n(t, \varepsilon)},$$

определители Δ_{jn}^* получаются из Δ_n заменой j-го столбца на $\mathrm{col}\,(-\varepsilon c_{1n}(t, \varepsilon) - \mu u_{1n}(t, \varepsilon), -\varepsilon c_{2n}(t, \varepsilon) - \mu u_{2n}(t, \varepsilon))$,

$$\begin{Bmatrix} c_{jn} \\ u_{jn} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} c_j(t, \varepsilon, \theta) \\ u_j(t, \varepsilon, \theta) \end{Bmatrix} \exp(-in\theta)\, d\theta.$$

В результате получим систему

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t, \varepsilon) z_k + g_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu \sum_{k=1}^{2} v_{jk}(t, \varepsilon, \theta) z_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} w_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu) z_k + \mu Z_j(t, \varepsilon, \theta, z_1, z_2, \mu), \qquad j = 1, 2, \tag{9}$$

где

$$g_j = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dy_{jn}^0}{dt} e^{in\theta(t,\varepsilon)} + \mu \sum_{k=1}^{2} v_{jk}(t, \varepsilon, \theta) y_k^0 + \mu Y_j(t, \varepsilon, \theta, y_1^0, y_2^0) \in B_{m-2},$$

$$w_{jk} = \mu \frac{\partial Y_j(t, \varepsilon, \theta, y_1^0, y_2^0)}{\partial y_k} \in B_{m-1},$$

$$Z_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y_j(t, \varepsilon, \theta, y_1^0 + \nu_1 z_1, y_2^0 + \nu_1 z_2)}{\partial y_1^2} z_1^2 + 2\frac{\partial^2 Y_j(\ldots)}{\partial y_1 \partial y_2} z_1 z_2 + \frac{\partial^2 Y_j(\ldots)}{\partial y_2^2} z_2^2 \right),$$

$$0 < \nu_1 < 1; \quad j, k = 1, 2.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$g_j = (\mu^2+\varepsilon^2)\tilde{g}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu), \quad w_{jk} = (\mu^2+\varepsilon^2)\tilde{w}_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu),$$

$$\max_\mu \|\tilde{g}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|_{B_{m-2}} < +\infty, \quad \max_\mu \|\tilde{w}_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|_{B_{m-1}} < +\infty.$$

Применим к системе (9) преобразование

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{12}(t,\varepsilon)(\xi_1+\xi_2), \\ z_2 &= -i\omega(t,\varepsilon)(\xi_1-\xi_2) - a_{11}(t,\varepsilon)(\xi_1+\xi_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Условие 1° гарантирует его невырожденность. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} = {} & (-1)^j i\omega(t,\varepsilon)\xi_j + \varepsilon\sum_{k=1}^{2}\alpha_{jk}(t,\varepsilon)\xi_k + (\mu^2+\varepsilon^2)h_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ & + \mu\sum_{k=1}^{2} b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_k + (\mu^2+\varepsilon^2)\sum_{k=1}^{2} w^*_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_k + \\ & + \mu Z^*_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2,\mu), \quad j=1,2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\alpha_{jk}\in S_{m-1}, \quad h_j\in B_{m-2}, \quad w^*_{jk}\in B_{m-1},$$

$$\max_\mu \|h_j\|_{B_{m-2}} < +\infty, \quad \max_\mu \|w^*_{jk}\|_{B_{m-1}} < +\infty, \quad j,k=1,2,$$

$$b_{11} = \frac{v_{11}+v_{22}}{2} + \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_{22}) - \frac{i(\omega^2+a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}v_{12} + \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{12} = \frac{v_{11}-v_{22}}{2} + \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_{22}) - \frac{i(a_{11}-i\omega)^2}{2\omega a_{12}}v_{12} + \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{21} = \frac{v_{11}-v_{22}}{2} - \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_{22}) + \frac{i(a_{11}+i\omega)^2}{2\omega a_{12}}v_{12} - \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{22} = \frac{v_{11}+v_{22}}{2} - \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_{22}) + \frac{i(\omega^2+a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}v_{12} - \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21}.$$

К системе (11) применим преобразование

$$\xi_1 = \xi_1^* + q_1(t,\varepsilon)\xi_2^*, \quad \xi_2 = q_2(t,\varepsilon)\xi_1^* + \xi_2^*, \tag{12}$$

где

$$q_1 = \frac{\varepsilon\alpha_{12}(t,\varepsilon)}{2i\omega(t,\varepsilon)}, \quad q_2 = -\frac{\varepsilon\alpha_{21}(t,\varepsilon)}{2i\omega(t,\varepsilon)}, \quad q_1, q_2\in S_{m-1},$$

предполагая параметр ε настолько малым, чтобы

$$\varepsilon^2\sup_G\left|\frac{\alpha_{12}(t,\varepsilon)\,\alpha_{21}(t,\varepsilon)}{\omega^2(t,\varepsilon)}\right| < 4, \tag{13}$$

что обеспечивает невырожденность преобразования (12). Полученную в результате систему запишем в виде

$$\frac{d\xi_j^*}{dt} = [(-1)^j i\omega(t,\varepsilon) + \varepsilon\alpha_{jj}(t,\varepsilon) + \mu b_{jj0}(t,\varepsilon)]\xi_j^* +$$

$$+ (\mu^2+\varepsilon^2) r_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{2} \beta_{jk}(t,\varepsilon)\xi_k^* + \mu \sum_{k=1}^{2} b_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta)\xi_k^* +$$

$$+ (\mu^2+\varepsilon^2) \sum_{k=1}^{2} w_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_k^* + \mu Z_j^{**}(t,\varepsilon,\theta,\xi_1^*,\xi_2^*,\mu), \quad j=1,2, \tag{14}$$

$$\beta_{jk} \in S_{m-2}, \quad r_j \in B_{m-2}, \quad w_{jk}^* \in B_{m-1},$$

$$\max_{\mu} \left\{ \begin{matrix} \|r_j\|_{B_{m-2}} \\ \|w_{jk}^{**}\|_{B_{m-1}} \end{matrix} \right\} < +\infty,$$

$$b_{jjn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$b_{jk}^* = b_{jk} - b_{jk0}\delta_j^k, \quad j,k=1,2; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \delta_j^k$ — символ Кронекера.

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} b_{jj}^*(t,\varepsilon,\theta) d\theta = 0, \quad j=1,2. \tag{15}$$

С целью повышения порядка малости осциллирующих слагаемых в коэффициентах при ξ_1^*, ξ_2^* применим преобразование

$$\xi_j^* = \eta_j + \mu \sum_{s=1}^{2} k_{js}(t,\varepsilon,\theta)\eta_s, \quad j=1,2, \tag{16}$$

где k_{js} определяются формулами

$$k_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{b_{jjn}(t,\varepsilon)}{in\varphi(t,\varepsilon)} \exp(in\theta(t,\varepsilon)), \quad j=1,2,$$

$$k_{12} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_{12n}(t,\varepsilon)}{i(2\omega(t,\varepsilon) + n\varphi(t,\varepsilon))} \exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

$$k_{21} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_{21n}(t,\varepsilon)}{-i(2\omega(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))} \exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

В силу равенства (15) и условия 2° все функции k_{js} принадлежат B_m.

Предполагая μ настолько малым, что

$$\mu \max_j \sum_{s=1}^{2} \|k_{js}\|_{B_m} < 1, \tag{17}$$

в результате применения преобразования (16) получаем систему

$$\frac{d\eta_j}{dt} = [(-1)^j i\omega(t,\varepsilon) + \varepsilon\alpha_{jj}(t,\varepsilon) + \mu b_{jj0}(t,\varepsilon)]\eta_j +$$

$$+ (\mu^2+\varepsilon^2) r_j^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + (\mu^2+\varepsilon^2)\sum_{k=1}^{2} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta_k +$$

$$+ \mu H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1,\eta_2,\mu), \quad j=1,2, \tag{18}$$

$$r_j^*, p_{jk} \in B_{m-2}, \qquad \max_{\mu} \left\{ \begin{matrix} \|r_j^*\|_{B_{m-2}} \\ \|p_{jk}\|_{B_{m-2}} \end{matrix} \right\} < +\infty,$$

нелинейности H_1, H_2 принадлежат классу $B_{m-1} \subset B_{m-2}$ по t, ε, θ и содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно η_1, η_2.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* $1°–3°$, *и, кроме того,*

$$\min_j \inf_G |\operatorname{Re} b_{jj0}(t,\varepsilon)| = \gamma_0(\varepsilon_0) > 0.$$

Тогда существует $\mu^* > 0$ *такое, что для любых* $\mu \in \,]0, \mu^*]$ *и* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*(\mu)]$, *где* $\varepsilon^*(\mu)$ *— величина, удовлетворяющая неравенству*

$$\varepsilon^*(\mu)\,\alpha(\varepsilon_0) < \mu(\gamma_0(\varepsilon_0) - \beta), \tag{19}$$

$$\alpha(\varepsilon_0) = \max_j \sup_G |\alpha_{jj}(t,\varepsilon)|, \qquad \beta \in \,]0, \gamma_0(\varepsilon_0)[,$$

система (1) *имеет единственное частное решение из класса* B_{m-2}.

Доказательство. Наряду с системой (18) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\eta_j^*}{dt} = \lambda_j(t,\varepsilon,\varepsilon^*(\mu),\mu)\eta_j^* + (\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2)\, r_j^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ (\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2) \sum_{k=1}^{2} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\,\eta_k^* +$$

$$+ \mu H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1^*,\eta_2^*,\mu), \quad j=1,2, \tag{20}$$

где $\lambda_j = (-1)^j i\omega(t,\varepsilon) + \varepsilon^*(\mu)\,\alpha_{jj}(t,\varepsilon) + \mu b_{jj0}(t,\varepsilon)$, а $\varepsilon^*(\mu)$ определяется из неравенства (19). Очевидно, что

$$\inf_G |\operatorname{Re}\lambda_j(t,\varepsilon,\varepsilon^*(\mu),\mu)| \geq \mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\,\alpha(\varepsilon_0) \geq \mu\beta > 0. \tag{21}$$

Подстановкой

$$\eta_j^* = \frac{\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2}{\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\,\alpha(\varepsilon_0)}\,\psi_j, \quad j=1,2, \tag{22}$$

в силу структуры функций H_1, H_2, приводим (20) к системе

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \lambda_j(t,\varepsilon,\varepsilon^*(\mu),\mu)\psi_j + (\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\,\alpha(\varepsilon_0))\, r_j^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ (\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2) \sum_{k=1}^{2} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\,\psi_k +$$

$$+ \frac{\mu(\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2}{\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\,\alpha(\varepsilon_0)} H_j^*(t,\varepsilon,\theta,\psi_1,\psi_2,\mu), \quad j=1,2, \tag{23}$$

причем функции H_1^*, H_2^* выражаются через производные функций X_1, X_2 не выше 4-го порядка.

На основании (21) и леммы заключаем, что линейная неоднородная диагональная система

$$\frac{d\psi_{j0}}{dt} =$$

$$= \lambda_j(t, \varepsilon, \varepsilon^*(\mu), \mu)\psi_{j0} + (\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0))\, r_j^*(t, \varepsilon, \theta, \mu), \quad j = 1, 2,$$

имеет единственное частное решение $\psi_{j0}(t, \varepsilon, \varepsilon^*(\mu), \mu)$, $j = 1, 2$, из класса B_{m-2}, причем существует $C^* < +\infty$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{2} \|\psi_{j0}\|_{B_{m-2}} \le C^* \sum_{j=1}^{2} \|r_j^*\|_{B_{m-2}}.$$

Решения из класса B_{m-2} системы (23) ищем методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального ψ_{10}, ψ_{20}, а последующие определяя как решения из класса B_{m-2} линейных систем

$$\frac{d\psi_{j,s+1}}{dt} = \lambda_j \psi_{j,s+1} + (\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0))\, r_j^* +$$

$$+ (\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2) \sum_{k=1}^{2} p_{jk}\psi_{ks} +$$

$$+ \frac{\mu(\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2)}{\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0)} H_j^*(t, \varepsilon, \theta, \psi_{1s}, \psi_{2s}, \mu),$$

$$j = 1, 2; \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Определим область

$$\Omega = \left\{ \psi_1, \psi_2 \in B_{m-2}\colon \sum_{j=1}^{2} \|\psi_j - \psi_{j0}\|_{B_{m-2}} \le d \right\}.$$

Обозначим

$$P = \max_{j,k} \max_{\mu} \|p_{jk}\|_{B_{m-2}},$$

$$H^*(d) = \sum_{j=1}^{2} \max_{\mu} \sup_{\psi_1, \psi_2 \in \Omega} \|H_j^*(t, \varepsilon, \theta, \psi_1, \psi_2, \mu)\|_{B_{m-2}}.$$

В силу условия 3°: $\exists\, L(d) < +\infty\colon\ \forall\, \psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^* \in \Omega$

$$\sum_{j=1}^{2} \|H_j^*(t, \varepsilon, \theta, \psi_1, \psi_2, \mu) - H_j^*(t, \varepsilon, \theta, \psi_1^*, \psi_2^*, \mu)\|_{B_{m-2}} \le$$

$$\le L(d) \sum_{j=1}^{2} \|\psi_j - \psi_j^*\|_{B_{m-2}}.$$

Нетрудно проверить, что при условии

$$\frac{\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2}{\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0)} 2(2^{m-1}-1) P C^* \left(d + C^* \sum_{k=1}^{2} \|r_k^*\|_{B_{m-2}} \right) +$$

$$+ \frac{\mu C^*(\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2)}{(\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0))^2} H^*(d) \le d_0 < d$$

все приближения остаются внутри области Ω. При условии

$$2(2^{m-1}-1) P C^* \frac{\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2}{\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0)} +$$

$$+ \frac{\mu(\mu^2 + (\varepsilon^*(\mu))^2)}{(\mu\gamma_0(\varepsilon_0) - \varepsilon^*(\mu)\alpha(\varepsilon_0))^2} C^* L(d) < 1$$

процесс последовательных приближений сходится к решению из класса B_{m-2} системы (23). Отсюда с учетом соотношений (6), (8), (10), (12), (16), (22) вытекает существование единственного частного решения из класса B_{m-2} системы (1).

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему, соответствующую известному в нелинейной механике уравнению Ван-дер-Поля [1, 9]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega^2(t,\varepsilon)x_1 + f(t,\varepsilon)\sin\theta(t,\varepsilon) + \mu(1-x_1^2)x_2, \tag{24}$$

вещественные функции $\omega, f \in S_m$,

$$\theta = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \qquad \varphi \in S_m.$$

Нетрудно видеть, что для системы (24) условия 1°, 3° выполнены, а вместо условия 2° достаточно потребовать, чтобы

$$\inf_G |\omega(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \ge \gamma > 0 \qquad \forall\, n: |n| = 0, 1, 2, 3. \tag{25}$$

Имеем

$$x_1^0 = \frac{f\sin\theta}{\omega^2 - \varphi^2}, \qquad x_2^0 = \frac{\varphi f\cos\theta}{\omega^2 - \varphi^2},$$

$$\operatorname{Re} b_{110}(t,\varepsilon) = \operatorname{Re} b_{220}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{f^2(t,\varepsilon)}{2(\omega^2(t,\varepsilon) - \varphi^2(t,\varepsilon))^2}\right),$$

$$\alpha_{11}(t,\varepsilon) = \alpha_{22}(t,\varepsilon) = -\frac{\omega_1(t,\varepsilon)}{2\omega(t,\varepsilon)},$$

где $\omega_1 = \varepsilon^{-1} d\omega/dt$.

Таким образом, для системы (24) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (25) *и, кроме того,*

$$\inf_G \left| 1 - \frac{f^2(t,\varepsilon)}{2(\omega^2(t,\varepsilon) - \varphi^2(t,\varepsilon))^2} \right| = \gamma_0(\varepsilon_0) > 0.$$

Тогда существует $\mu^* > 0$ *такое, что для любых* $\mu \in\,]0, \mu^*]$ *и* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*(\mu)]$, *где* $\varepsilon^*(\mu)$ — *величина, удовлетворяющая неравенству*

$$\varepsilon^*(\mu)\sup_G\left|\frac{\omega_1(t,\varepsilon)}{\omega(t,\varepsilon)}\right| \le \mu(\gamma_0(\varepsilon_0)-\beta),$$

$\beta \in \,]\,0, \gamma_0(\varepsilon_0)[\,$, *система* (24) *имеет единственное частное решение из класса* B_{m-2}.

Пусть, в частности, в системе (24)

$$\omega = 2+\sin\varepsilon t, \quad f = \cos\varepsilon t, \quad \varphi = 3+\sin\varepsilon t.$$

Тогда $\gamma = 1$, $\operatorname{Re} b_{jj0} = 1 - \dfrac{\cos^2\varepsilon t}{2(5+2\sin\varepsilon t)^2} \ge \dfrac{17}{18}$, т. е. $\gamma_0 = \dfrac{17}{18}$,

$$\sup_G\left|\frac{\omega_1}{\omega}\right| = \sup_G\left|\frac{\cos\varepsilon t}{2+\sin\varepsilon t}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon^*(\mu) \le \sqrt{3}\mu\left(\frac{17}{18}-\beta\right), \quad 0<\beta<\frac{17}{18}.$$

Если положить $\beta = \dfrac{8}{18}$, то $0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*(\mu) \le \dfrac{\sqrt{3}\mu}{2}$.

Получение верхней оценки для μ не представляет принципиальных трудностей, но связано с громоздкими вычислениями; при этом оценки получаются чрезвычайно заниженными.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 181–191.
3. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – Киев: Выща шк., 1985. – 248 с.
4. *Костин А. В., Щеголев С. А.* Об одном классе решений дифференциальных систем с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 101–103.
5. *Щеголев С. А.* О существовании одного класса решений дифференциального уравнения с осциллирующими коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 4. – С. 570–571.
6. *Меркин М. Р., Фридман В. М.* Проекционный метод решения задачи о вынужденных колебаниях в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45**, вып. 1. – С. 71–76.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
8. *Костин А. В.* Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. – Одесса: Одес. ун-т, 1984. – 94 с.
9. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.

Получено 13.02.96