УДК 517. 9

Ю. О. Митропольський (Ін-т математики НАН України, Київ),
Б. І. Сокіл (Ун-т "Львів. політехніка")

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ Ateb-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗБУРЕНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

For the Klein–Gordon perturbed nonlinear equation, by using the Ateb-functions, we construct an asymptotic approximation of a solution. We consider the autonomous and nonautonomous cases.

Для збуреного нелінійного рівняння Клейна – Гордона на основі використання Ateb-функцій будується асимптотичне наближення розв'язку. Розглядаються автономний і неавтономний випадки.

В роботах [1 – 3] викладено методику застосування періодичних Ateb-функцій [4] для побудови асимптотичних розв'язків деяких класів звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, які описують сильно нелінійні коливання систем. У даній статті розвивається методика застосування вказаних функцій та асимптотичних методів нелінійної механіки для дослідження хвильових процесів у системах, які описуються збуреними рівняннями типу Клейна – Гордона [5, 6]

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta u^{\nu+1} = \varepsilon f(u, u_x, u_t, \mu t), \tag{1}$$

де α, β, μ, ν — сталі, причому $\nu + 1 = (2m+1)(2n+1)^{-1}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, $f(u, u_x, u_t, \mu t)$ — аналітична 2π-періодична по μt функція, ε — малий параметр. (Для випадку $\nu = 0$ асимптотичний розв'язок рівняння (1) отримано в [5].) Покажемо, що незбурене рівняння (1) має хвильові розв'язки. Нехай $u_0(a, \psi)$, $\psi = kx - \omega(a)t$, a, k — сталі, $\omega(a)$ — деяка функція (вигляд якої буде встановлено нижче) є розв'язком рівняння (1) при $\varepsilon = 0$. Тоді для $u_0(a, \psi)$ із (1) отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2}\left(\omega^2(a) - \alpha^2 k^2\right) + \beta u_0^{\nu+1} = 0, \tag{2}$$

яке будемо розглядати при умовах

$$u_0(a, \psi)\Big|_{\psi=0} = 0, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = 0. \tag{3}$$

Проінтегрувавши (2), знаходимо

$$\psi = \left[\frac{(\nu+2)(\omega^2 - \alpha^2 k^2)}{2\beta}\right]^{1/2} \int_a^{u_0} (a^{\nu+2} - \bar{u}_0^{\nu+2})^{-1/2} d\bar{u}_0. \tag{4}$$

Співвідношення (4) у випадку $\beta > 0$ виражає розв'язок рівняння (2) за допомогою періодичних Ateb-функцій, а у випадку $\beta < 0$ — за допомогою гіперболічних Ateb-функцій у вигляді

$$u_0(a, \psi) = a \begin{cases} \text{ca}\,(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t); & \text{(5а)} \\ \text{cha}\,(\nu+1, 1, kx - \omega(a)t), & \text{(5б)} \end{cases}$$

причому розв'язок у вигляді (5а) періодичний по ψ з періодом

$$2\Pi_1 = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left((\nu+2)^{-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + (\nu+2)^{-1}\right),$$

а у вигляді (5б) є періодичним по ψ з періодом

$$2\Pi_2 = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu(2(\nu+2))^{-1}\right)\Gamma^{-1}\left((\nu+1)(\nu+2)^{-1}\right)$$

тільки при $\nu > 0$. Підставляючи (5а) чи (5б) у (2), отримуємо дисперсійне співвідношення для визначення $\omega(a)$:

$$\omega^2(a) - \alpha^2 k^2 + (-1)^i \frac{\nu+2}{2}\beta a^\nu = 0, \tag{6}$$

де $i = 1$ у випадку (5а) і $i = 2$ у випадку (5б).

Для того щоб отримати 2π-періодичні по ψ розв'язки рівняння (2), необхідно у вирази (5а) і (5б) ввести нормуючий множник $l = \Pi_i \pi^{-1}$, тобто записати їх у вигляді

$$u_0(a, \pi^{-1}\Pi\psi) = a\begin{cases} \mathrm{ca}\,(\nu+1, 1, \pi^{-1}\Pi_1(kx - \omega(a)t); & (7а)\\ \mathrm{cha}\,(\nu+1, 1, \pi^{-1}\Pi_2(kx - \omega(a)t). & (7б)\end{cases}$$

При цьому дисперсійне співвідношення визначається залежністю

$$\omega^2(a) - \alpha^2 k^2 + (-1)^i \frac{\nu+2}{2}\beta\left(\pi\Pi_i^{-1}\right)^2 a^\nu = 0. \tag{8}$$

Далі будемо розглядати рівняння (1) при $\beta > 0$ для автономного $(\mu = 0)$ і неавтономного випадків.

Автономний випадок. Асимптотичне наближення розв'язку рівняння (1) для автономного випадку будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = u_0(a, \psi) + \varepsilon U_1(a, u_0) + \varepsilon^2 U_2(a, u_0) + \ldots, \tag{9}$$

де $u_0(a, \psi)$ визначається формулою (5а), $U_1(a, u_0)$, $U_2(a, u_0)$, … — періодичні по ψ функції, які задовольняють умови

$$\oint U_i(a, u_0)\begin{Bmatrix} \mathrm{ca}\,(\nu+1, 1, \psi); \\ \mathrm{sa}\,(1, \nu+1, \psi); \end{Bmatrix} d\psi = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

($\oint$ — інтеграл по повній осциляції змінної ψ, тобто за період). На відміну від незбуреного у збуреному випадку параметри a і ψ будуть функціями x і t та згідно з асимптотичним методом визначаються залежностями

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega(a) + \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \ldots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= k + \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \ldots . \end{aligned} \tag{11}$$

Підставляючи (9) в (1) з урахуванням (11) та порівнюючи коефіцієнти при ε, одержуємо диференціальне рівняння для знаходження невідомої функції $U_1(a, u_0)$:

$$\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_0^2} - \beta u_0^{\nu+1}\frac{\partial U_1}{\partial u_0} + \beta(\nu+1)u_0^\nu U_1 =$$

$$= f\left(u_0, k\frac{\partial u_0}{\partial\psi}, -\omega\frac{\partial u_0}{\partial\psi}\right) + \frac{1}{a}\lambda_0(a,u_0)\left\{A_1(a)\left(2\omega + \frac{d\omega}{da}\right) - \alpha^2 k B_1(a)\right\} -$$

$$- \frac{\beta u_0^{\nu+1}}{\omega^2 - \alpha^2 k^2}\left\{2\omega C_1(a) - \alpha^2 k\, D_1(a)\right\}, \qquad (12)$$

де

$$\lambda_0(a, u_0) = \left[\frac{2\beta}{(\nu+2)(\omega^2 - \alpha^2 k^2)}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2}.$$

Легко довести таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $U_1(a, u_0)$ — *неперервна двічі диференційовна по* u_0 *функція, яка є розв'язком однорідного рівняння, що відповідає* (12) *і задовольняє умови* (10), *то виконується співвідношення*

$$\oint L(U_1(u_0))\rho_j(a,u_0)\,du_0 = 0, \qquad (13)$$

де

$$L(U_1) = \frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_0^2} - \beta u_0^{\nu+1}\frac{\partial U_1}{\partial u_0} + \beta(\nu+1)u_0^{\nu}U_1, \qquad (14)$$

$$\rho_1 = 1, \qquad \rho_2(a, u_0) = u_0\lambda_0^{-1}(a, u_0).$$

Справедливість цього твердження легко перевіряється інтегруванням частинами з урахуванням властивостей Ateb-функцій.

Із диференціального рівняння (12), використовуючи співвідношення (13), отримуємо

$$A_1(a)\left(2\omega + \frac{d\omega}{da}\right) - \alpha^2 k B_1(a) = \frac{\nu+4}{4a\Pi_1}\oint f\left(u_0, k\frac{\partial u_0}{\partial\psi}, -\omega(a)\frac{\partial u_0}{\partial\psi}\right)du_0,$$

$$(15)$$

$$2C_1(a)\omega - \alpha^2 k\, D_1(a) = \frac{(\nu+2)(\nu+4)}{8a^2\Pi_1}\oint f\left(u_0, k\frac{\partial u_0}{\partial\psi}, -\omega(a)\frac{\partial u_0}{\partial\psi}\right)u_0\lambda_0^{-1}(a,u_0)\,du_0.$$

Тепер перейдемо до знаходження функції $U_1(a, u_0)$, тобто до розв'язку рівняння (12). Неважко переконатись, що лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння

$$L(U_1) = 0 \qquad (16)$$

є функції

$$\overline{U}_1(a, u_0) = \left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2},$$

$$(17)$$

$$\tilde{U}_1(a, u_0) = \overline{U}_1(a, u_0)\int\left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{-3/2}du_0,$$

а загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (12) можна записати у вигляді

$$U_1(a, u_0) = \int f^*(a, \overline{u}_0)\left\{\overline{U}_1(a, \overline{u}_0)\tilde{U}_1(a, u_0) - \overline{U}_1(a, u_0)\tilde{U}_1(a, \overline{u}_0)\right\}d\overline{u}_0, \qquad (18)$$

де $f^*(a, u_0)$ — права частина диференціального рівняння (12). Аналогічно розв'язується задача для наступного наближення.

Неавтономний випадок. Розглянемо для диференціального рівняння (1) тільки випадок головного резонансу, тобто будемо вважати, що $\omega(a) \approx \mu$, який буде мати місце при зміні параметра a в малому околі a^*, яке задовольняє співвідношення (8). При виконанні останнього розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$u(x, t) = u_0(a, \Pi_1 \pi^{-1} \psi) + \varepsilon U_1(a, u_0, \gamma) + \varepsilon^2 U_2(a, u_0, \gamma) + \ldots , \tag{19}$$

де $u_0(a, \Pi_1 \pi^{-1} \psi)$ визначається формулою (7а), $\dot{\gamma} = kx - \mu t$, $U_1(a, u_0, \gamma)$, $U_2(a, u_0, \gamma)$, … — 2π-періодичні по γ функції, які задовольняють умови, аналогічні умовам (10), а параметри a і ψ, як функції x і t, пов'язані диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(a, \varphi) + \ldots , \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(a, \varphi) + \ldots , \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \mu - \omega(a) + \varepsilon C_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 C_2(a, \varphi) + \ldots , \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= k + \varepsilon D_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 D_2(a, \varphi) + \ldots . \end{aligned} \tag{20}$$

Тут $\varphi = \psi + \mu t$, а $A_1(a, \varphi)$, $B_1(a, \varphi)$, $C_1(a, \varphi)$, $D_1(a, \varphi)$, … — деякі невідомі функції.

Підставляючи (19) у диференціальне рівняння (1), з урахуванням (7а), (8), (20), після порівняння коефіцієнтів при ε для першого наближення маємо

$$\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_0^2} + 2\delta_1\left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2} - u_0^{\nu+2})\right]^{1/2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_0 \partial \gamma} + \delta_2^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \gamma^2} +$$

$$+ \beta u_0^{\nu+1}\frac{\partial U_1}{\partial u_0} + \beta(\nu+1)u_0^{\nu} U_1 =$$

$$= f\left(u_0, k\frac{\partial u_0}{\partial \psi}, -\omega\frac{\partial u_0}{\partial \psi}, \mu t\right) + \frac{1}{a}\lambda_0(a, u_0)\left\{A_1(a, \varphi)\left(2\omega + a\frac{d\omega}{da}\right) - \alpha^2 k B_1(a, \varphi)\right\} -$$

$$- \frac{\beta u_0^{\nu+1}}{\omega^2 - \alpha^2 k^2}\left\{2\omega C_1(a, \varphi) - \alpha^2 k D_1(a, \varphi)\right\} + (\omega(a) - \mu)\left\{\frac{u_0}{a}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \lambda_0(a, u_0)\frac{\partial C_1}{\partial \varphi}\right\} -$$

$$- \alpha^2 k\left\{\frac{u_0}{a}\frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + \lambda_0(a, u_0)\frac{\partial B_1}{\partial \varphi}\right\}, \tag{21}$$

де

$$\delta_1 = \left(\omega(a)\mu - \alpha^2 k^2\right)\left(\omega^2 - \alpha^2 k^2\right)^{-1/2}, \qquad \delta_2^2 = \omega^2(a) - \alpha^2 k^2.$$

Розв'язок рівняння (21) і невідомі функції $A_1(a, \varphi)$, $B_1(a, \varphi)$, $C_1(a, \varphi)$, $D_1(a, \varphi)$ шукатимемо у вигляді розкладів

$$U_1(a, u_0, \gamma) = \sum_m U_{1m}(a, u_0)\exp(im\gamma), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} A_1(a, \varphi) &= \sum_m A_{1m}(a)\exp(-im\varphi), \qquad B_1(a, \varphi) = \sum_m B_{1m}(a)\exp(-im\varphi), \\ C_1(a, \varphi) &= \sum_m C_{1m}(a)\exp(-im\varphi), \qquad D_1(a, \varphi) = \sum_m D_{1m}(a)\exp(-im\varphi). \end{aligned} \tag{23}$$

Диференціальне рівняння (21) розглядається при зміні параметра a в малому околі a^*, тому з точністю до величин порядку ε $\delta_1 = \delta_2$, а

$$\omega(a)-\mu = \beta\frac{\nu+2}{4}\nu\left(\frac{\pi}{\Pi_1}\right)^2(a^*)^{\nu-1}\left[\alpha^2k^2+\left(\frac{\pi}{\Pi_1}\right)^2\beta\frac{\nu+2}{2}(a^*)^\nu\right]^{-1/2}(a-a^*).$$

Отже, враховуючи наведене вище і розклади (22) і (23), порівнюючи при цьому коефіцієнти при однакових гармоніках μt, із (21) одержуємо систему рівнянь у вигляді

$$\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2})\frac{\partial^2U_{1m}}{\partial u_0^2} + \left\{\beta u_0^{\nu+1}-2im\delta_2\left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2})\right]^{1/2}\right\}\frac{\partial U_{1m}}{\partial u_0} +$$

$$+\left[\beta(\nu+1)u_0^\nu-\delta_2^2m^2\right]U_{1m} = f_{1m}(a,u_0)+$$

$$+\left\{\lambda_{1m}(a)A_{1m}(a)+\lambda_{2m}(a,u_0)B_{1m}(a)+\lambda_{3m}(a,u_0)C_{1m}(a)+\lambda_{4m}(a,u_0)D_{1m}(a)\right\}\times$$

$$\times\exp\left[im\frac{\nu+2}{2}\frac{\pi}{\Pi_1}a^{\nu/2}\int_0^u(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2})\right]^{-1/2}du_0, \tag{24}$$

де

$$\lambda_{1m}(a,u_0) = \frac{1}{a}\left\{\lambda_0(a,u_0)(2\omega+a\frac{d\omega}{da}\right\}+$$

$$+im\beta\nu\frac{\nu+2}{4}\left(\frac{\Pi_1}{\pi}\right)^{-2}u_0\left[\alpha^2k^2+\frac{\nu+2}{2}\left(\frac{\pi}{\Pi_1}\right)^2\beta(a^*)^\nu\right]^{-1/2}(a-a^*)(a^*)^{\nu-1},$$

$$\lambda_{2m}(a,u_0) = -\frac{\alpha^2k^2}{a}[\lambda_0(a,u_0)-imu_0],$$

$$\lambda_{3m}(a,u_0) = \frac{2\beta\omega u_0^{\nu+1}}{\omega^2-\alpha^2k^2}-$$

$$-im\beta\nu\frac{\nu+2}{4}\left(\frac{\Pi_1}{\pi}\right)^{-2}\left[\alpha^2k^2+\frac{\nu+2}{2}\left(\frac{\pi}{\Pi_1}\right)^2\beta(a^*)^\nu\right]^{-1/2}(a-a^*)(a^*)^{\nu-1},$$

$$\lambda_{4m}(a,u_0) = \alpha^2ku_0^{\nu+1}(\omega^2-\alpha^2k^2)^{-1}-im\alpha^2k\,\lambda_0(a,u_0),$$

$$f_{1m}(a,u_0) = \int_0^{2\pi}f\left(u_0,k\frac{\partial u_0}{\partial\psi},-\omega\frac{\partial u_0}{\partial\psi},\theta\right)\exp(im\theta)d\theta.$$

Для визначення співвідношень, які пов'язують невідомі функції $A_{1m}(a)$, $B_{1m}(a)$, $C_{1m}(a)$, $D_{1m}(a)$, скористаємось наступним твердженням.

Твердження 2. *Якщо* $U_{1m}(a,u_0)$ *— неперервні двічі диференційовні по* u_0 *функції, які є розв'язками однорідних рівнянь, що відповідають системі* (24) *і задовольняють умови, аналогічні* (10), *то виконуються співвідношення*

$$\oint L_2(U_{1m})\rho_j(a,u_0)\exp\left(im\delta_2\int_0^{u_0}\left[\frac{2\beta}{\nu+2}\left(a^{\nu+2}-\bar{u}_0^{\nu+2}\right)\right]^{-1/2}d\bar{u}_0\right)du_0 = 0. \tag{25}$$

Тут $\rho_j(a,u_0)$ *визначаються, як і для автономного випадку, а*

$$L_2(U_{1m}) = \frac{2\beta}{\nu+2}\left(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2}\right)\frac{\partial^2U_{1m}}{\partial u_0^2}-$$

$$-\left\{\beta u_0^{\nu+1}+2im\delta_2\left[\frac{2\beta}{\nu+2}\left(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2}\right)\right]^{1/2}\right\}\frac{\partial U_{1m}}{\partial u_0}-U_{1m}\left[\beta(\nu+1)u_0^\nu-m^2\delta_2^2\right]. \tag{26}$$

Із рівнянь (24) з урахуванням (25) одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $A_{1m}(a)$, $B_{1m}(a)$, $C_{1m}(a)$, $D_{1m}(a)$:

$$\lambda_{1m}^{j}(a)A_{1m}(a)+\lambda_{2m}^{j}(a)B_{1m}(a)+\lambda_{3m}^{j}(a)C_{1m}(a)+\lambda_{4m}^{j}(a)D_{1m}(a) = f_{1m}^{j}(a), \quad (27)$$

де

$$\lambda_{rm}^{j}(a) = \oint \lambda_{rm}(a,u_0)\rho_j(a,u_0)\times$$

$$\times \exp\left[im\left(\delta_2+\frac{\pi}{\Pi_1}\frac{\nu+2}{2}a^{\frac{\nu}{2}}\int_0^{u_0}(a^{\nu+2}-\bar{u}_0^{\nu+2})^{-1/2}d\bar{u}_0\right)\right]du_0,$$

$$f_{1m}^{j}(a) = \oint f_{1m}(a,u_0)\rho_j(a,u_0)\times$$

$$\times \exp\left[im\delta_2\int_0^{u_0}(a^{\nu+2}-\bar{u}_0^{\nu+2})^{-1/2}d\bar{u}_0\right]du_0. \quad (28)$$

Легко перевірити, що загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь (24) можна записати у вигляді

$$U_{1m}(a,u_0) = \int \exp\left[im\delta_2\int_0^{u_0}\left(\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2}-\bar{u}_0^{\nu+2})\right)^{-1/2}d\bar{u}_0\right]\times$$

$$\times f^{*}(a,u_0)\left[\overline{U}_{1m}(a,\bar{u}_0)\tilde{U}_{1m}(a,u_0)-\overline{U}_{1m}(a,u_0)\tilde{U}_{1m}(a,\bar{u}_0)\right]du_0, \quad (29)$$

де $f_{1m}^{*}(a,u_0)$ — права частина диференціального рівняння (24), а $\overline{U}_{1m}(a,u_0)$ і $\tilde{U}_{1m}(a,u_0)$ — лінійно незалежні розв'язки однорідних рівнянь, що відповідають (26), тобто

$$\overline{U}_{1m}(a,u_0) = \exp\left[im\delta_2\int_0^{u_0}\left(\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2})\right)^{-1/2}du_0\right]\left[\frac{2\beta}{\nu+2}(a^{\nu+2}-u_0^{\nu+2})\right]^{1/2},$$

$$\tilde{U}_{1m}(a,u_0) = \overline{U}_{1m}(a,u_0)\int_0^{u_0}\left[\frac{2\beta}{\nu+2}\left(a^{\nu+2}-\bar{u}_0^{\nu+2}\right)\right]^{-3/2}d\bar{u}_0.$$

Наведена методика може бути використана для розв'язування деяких інших класів диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь типу

$$u_{tt}-\alpha^2u_{xx}+2\gamma u_{xt}+\beta^2u^{\nu+1} = \varepsilon f(u,u_x,u_t,\mu t).$$

1. *Сеник П. М., Смерека И. П., Сокил Б. И.* Асимптотический метод и периодические Ateb-функции в теории существенно нелинейных колебаний // Асимптотические и качественные методы в теории дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 143–156.
2. *Сокіл Б. І.* Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1994. – **46,** № 6. – С. 782–786.
3. *Сокил Б. И.* Применение Ateb-функций для построения решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Там же. – 1996. – **48,** № 2. – С. 291–292.
4. *Сеник П. М.* Обращения неполной Beta-функции // Там же. – 1968. – **21,** № 3. – С. 325–333.
5. *Митропольский Ю. А.* О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // Там же. – 1995. – **47,** № 9. – С. 209–216.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 568 с.

Одержано 16.12.96