УДК 517

А. В. Прасолов (С.-Петербург. ун-т, Россия)

ОБ ОЦЕНКЕ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ *

The problem of constructing the domains of attraction for systems with time lag is considered. In the vector space of states of a system, the structure of solutions of the Cauchy problem is illustrated by the examples. The constructive method for estimating from within a domain of attraction by means of the Lyapunov functions is described. This method is used for the estimation of the influence of delay in the control when solving the problem of one-axis orientation for a spacecraft.

Рассматривается задача построения области притяжения для систем с последействием. На примерах показывается структура решений задачи Коши в векторном пространстве состояний системы. Описывается конструктивный способ оценивания области притяжения изнутри с помощью функций Ляпунова. Он используется для оценки влияния запаздывания в органах управления при решении задачи одноосной ориентации космического аппарата.

Хорошо известная задача [1] об области асимптотической устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений (или для разностных) теряет свою корректность для уравнений с последействием, так как нет самого определения области притяжения. Если рассматривать решение в функциональном пространстве [2], то для разных норм будут получаться разные области притяжения. Вообще изначально понятие области притяжения пришло из теории автоматического регулирования, использующей нелинейные дифференциальные уравнения, с целью оценки разброса переменных состояния системы при стабильной работе устройства.

Рассмотрим математическую постановку задачи в самом простом ее виде

$$\dot{X}(t) = F(X(t), X(t-h)), \tag{1}$$

где $X \in R^n$, $F(0,0) = 0$, F удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам в окрестности 0, $h \ge 0$ — запаздывание. Если $X \equiv 0$ асимптотически устойчиво, то существует открытая область $A \subset R^n$ такая, что при $h = 0$ для любого начального вектора $X_0 \in A$ решение $X = X(t, X_0) \to 0$ при $t \to \infty$ и при этом $X(t, X_0) \in A$ для любого t. Указанная область A называется областью притяжения и ее границу можно найти с помощью теоремы Зубова [1]. Введение запаздывания $h > 0$ изменяет математическую постановку задачи, так как начальную функцию для системы (1) можно взять следующим образом: пусть $\varphi(t) \in A$ для любых $t \in \left[-h, -\frac{1}{2}(h+\delta)\right] \cup \left[-\frac{1}{2}(h-\delta), 0\right]$ и $\varphi(t)$ принимает сколь угодно большие ограниченные значения для $t \in \left[-\frac{1}{2}(h+\delta), -\frac{1}{2}(h-\delta)\right]$. Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ решение будет принадлежать A. Таким образом, выход из области A не обязательно влечет дестабилизацию регулируемой системы.

Однако если при фиксированном $h > 0$ тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво, то существует такое $\Delta > 0$, что для любых начальных функций $\varphi(t)$: $\max\limits_{t \in [-h, 0]} \|\varphi(t)\| < \Delta$ решение $X(t, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$. Норма в определении устойчивости взята обычная для пространства непрерывных функций.

Все решения системы (1) из Δ-окрестности нуля могут выходить из нее, но при некотором конечном T обязаны опять войти в Δ-окрестность и уже

* Выполнена при поддержке Центра по фундаментальным исследованиям в области экономики.

остаться там при всех $t > T$. И, следовательно, можно определить в R^n область образов Δ-окрестности в силу системы (1):

$$A(\Delta) = \left\{ X(t, \varphi),\ t \in [0, T(\varphi)],\ \max_{s \in [-h, 0]} \|\varphi(s)\| < \Delta \right\}. \tag{2}$$

Очевидно, что $A(\Delta)$ включает в себя Δ-окрестность и что $A(\Delta)$ ограничена в R^n. Но, к сожелению, $A(\Delta)$ может быть областью изменения начальных функций, решения из которых к нулю не стремятся. Следующий простой пример показывает, как изменяется структура области притяжения при введении запаздывания.

***Пример* 1.** Пусть

$$\dot{x} = (x^2(t-h) - 1)\,x(t).$$

Если $h = 0$, то уравнение имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $x = 0$ и два неустойчивых положения равновесия $x = \pm 1$. При $h > 0$ по линейному приближению также можно установить, что $x = 0$ асимптотически устойчиво, а $x = \pm 1$ неустойчивы. Методом шагов можно построить решение

$$x(t) = x_0 \exp \int_{-h}^{t-h} [\varphi^2(s) - 1]\, ds, \qquad t \in [0, h].$$

Отсюда очевидны свойства решения $x(t, \varphi)$:

1) $x(t, \varphi)$ сохраняет знак x_0;

2) если $|\varphi(s)| < 1$, то $|x(t, \varphi)| < 1$ для $t \in [0, h]$;

3) если $|\varphi(s)| > 1$, то $|x(t, \varphi)|$ возрастает по t. Значит, можно считать областью притяжения нуля отрезок $(-1, 1)$.

Однако есть еще решения, принимающие значения вне области притяжения, но стремящиеся на бесконечности к нулю. Рассмотрим начальную функцию вида

$$\varphi(s) = \begin{cases} a, & \text{если } s \in [-h, 0); \\ x_0, & \text{если } s = 0. \end{cases}$$

Тогда решение на одном шаге $t \in [0, h]$ имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{(a^2 - 1)t}.$$

Если $x_0 \in (-1, 1)$, то существует $a > 1$ такое, что

$$|x_0| e^{(a^2-1)t} < 1, \qquad t \in [0, h].$$

Действительно, учитывая монотонность экспоненты, решим последнее неравенство для $t = h$ относительно a:

$$1 < a < \sqrt{1 - \frac{1}{h} \ln |x_0|}.$$

При этих условиях на начальную функцию решение на втором шаге останется в промежутке $(-1, 1)$ и так далее. Таким образом, решение, не принадлежащее области притяжения, будет асимптотически стремиться к нулю.

На этом основании можно сделать вывод для нелинейных систем с последействием, определенных в R_t^n о структуре окрестности притягивающего положения равновесия.

Утверждение. *В окрестности изолированного асимптотически устойчивого положения равновесия $X \equiv 0$ существует (с учетом выбранной нормы функционального пространства) непосредственная область притяжения в R^n, т. е. такая, что все решения стремятся к нулю, и оставшаяся часть R^n, в которой находятся начальные функции, порождающие решения, которые в дальнейшем или стремятся, или не стремятся асимптотически к нулю.*

С точки зрения приложений в технике наибольший интерес представляет описанная непосредственная область притяжения. Для ее построения применим метод, вытекающий из теоремы Разумихина [3], которая формулируется следующим образом.

Если для системы с последействием

$$\dot{X} = F(t, X_t(\cdot)) \tag{3}$$

найдется непрерывно дифференцируемая, определенно положительная функция $V(t, X)$ такая, что ее производная в силу системы (3)

$$U(t, X_t(\cdot)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{DV}{DX} F$$

будет определенно отрицательным функционалом вдоль любых кривых $Y(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$V(s, Y(s)) \le V(t, X(t)), \quad Y(t) = X(t), \quad s \in [t-h, t],$$

то тривиальное решение системы (3) является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

На функционалы F накладываются обычные для таких теорем условия. В доказательстве этой теоремы есть такое место: рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему построим $c = \inf\limits_{\|X\| = \varepsilon} V(t, X)$, что возможно в силу определенной положительности $V(t, X)$. Далее выбирается $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для всех $\|\varphi(\cdot)\| < \delta$ при $t \in [t_0, t_0 + 2h]$ выполнялось неравенство $V(t, X(t, \varphi(\cdot))) < c$, и показывается, что последнее неравенство будет верно для любых $t > t_0$. Отсюда следует, что найденная $V(t, X)$ может служить для оценки непосредственной области притяжения. А именно, если для некоторого $c > 0$ область $V(t, X) < c$ принадлежит искомой области, то можно увеличивать c до тех пор, пока $U(t, Y_t(\cdot)) \le 0$ вдоль кривых $Y(t)$ таких, что

$$V(s, Y(s)) \le V(t, X(t)), \quad Y(t) = X(t), \quad s \in [t-h, t].$$

Пример 2. Пусть

$$\dot{x} = -x + y_h^2,$$

$$\dot{y} = -y - x_h^2.$$

Очевидно, система имеет два положения равновесия $(0, 0)$ и $(1, -1)$, причем первое асимптотически устойчиво, а второе — неустойчиво. Выберем в качестве функции Ляпунова $V = x^2 + y^2$. Тогда полная производная в силу системы $\dot{V} = -2V + 2(xy_h^2 - yx_h^2)$. Оценим выражение в последних скобках по модулю, а затем воспользуемся неравенством Разумихина:

$$x_h^2, \; y_h^2 \le x_h^2 + y_h^2 \le x^2 + y^2.$$

Получим оценку $\dot{V} \le -2V + 2V(|x| + |y|)$. Последнее выражение отрицательно при $|x| + |y| < 1$. Оно и дает искомую область, вписанную в непосредственную область притяжения.

В скалярном случае $\dot{x} = f(x, x_h)$, где $f(x, x_h)$ такова, что $x \equiv 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия. Предположим, что $V(x) = x^2$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая всем свойствам теоремы Разумихина. Тогда полная производная V в силу системы будет иметь вид $\dot{V} = 2xf(x, x_h)$ и она должна быть отрицательной при всех x_h таких, что $|x_h| \le |x|$. Отсюда получаем множество x, на котором $\dot{V} = 0$, а именно, обозначим $x_h = kx$, где $k \in [-1, 1]$, тогда $R = \{x : f(x, kx) = 0,\ k \in [-1, 1]\}$ и окончательно $c = \min\limits_{x \in R \setminus \{0\}} |x|$. Следующий пример иллюстрирует описанный алгоритм.

Пример 3. Пусть

$$\dot{x} = -x + \beta x_h + ax^2 + bx_h^2 .$$

Подставляя $x_h = kx$, получаем множество

$$R = \left\{ x = \frac{\beta k - 1}{a + bk^2},\ k \in [-1, 1] \right\}. \tag{4}$$

Исследуем его. Если $|\beta| \ge 1$, то существует $k = \dfrac{1}{\beta}$ такое, что $x(k) = 0$. Следовательно, в этом случае не удается найти оценки непосредственной области притяжения описанным выше алгоритмом. Положим $|\beta| < 1$. Тогда возможны три случая:

1) знаменатель в (4) не имеет вещественных нулей: $\dfrac{a}{b} > 0$;

2) вещественные нули есть и $0 < -\dfrac{a}{b} \le \dfrac{1}{\beta^2}$;

2) вещественные нули есть и $-\dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{\beta^2}$.

Анализируя эти случаи, получаем

$$c = \begin{cases} \dfrac{1 - |\beta|}{|a + b|}, & \text{если } b \ne 0,\ \dfrac{a}{b} \ge 0,\ \dfrac{a}{b} < -\dfrac{1}{\beta^2}; \\[2ex] \min\left\{ |x(k)|,\ k = \pm 1,\ \dfrac{1}{|\beta|} - \operatorname{sign}\beta \sqrt{\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{a}{b}} \right\}, & \text{если } b \ne 0,\ 0 < -\dfrac{a}{b} \le \dfrac{1}{\beta^2}; \\[2ex] \dfrac{1 - |\beta|}{|a|}, & \text{если } b = 0. \end{cases}$$

Особо следует выделить случай $\beta = 0$. Здесь

$$c = \begin{cases} \dfrac{1}{|a + b|}, & \text{если } ab \ge 0; \\[2ex] \min\left\{ \dfrac{1}{|a|}, \dfrac{1}{|a + b|} \right\}, & \text{если } ab < 0,\ \sqrt{-\dfrac{a}{b}} < 1; \\[2ex] \dfrac{1}{|a|}, & \text{если } ab < 0,\ \sqrt{-\dfrac{a}{b}} \ge 1. \end{cases}$$

Заметим, что оценка непосредственной области притяжения не зависит от запаздывания $h > 0$. Б. С. Разумихин предложил [3] способ введения такой зависимости и, как следствие, способ уточнения результатов.

***Пример* 4.** Рассмотрим задачу одноосной стабилизации вращательного движения твердого тела с запаздывающим управляющим моментом. Таким твердым телом может быть космический аппарат, самолет и т. п. Как известно, уравнения, описывающие вращательное движение твердого тела, имеют вид

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega = M, \tag{5}$$

где θ — тензор инерции тела, $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — вектор угловой скорости, M — момент управляющих сил. В [4] был предложен момент

$$M = -a\omega + br \times s, \tag{6}$$

где $a, b > 0$, $r = \{r_1, r_2, r_3\}$ — единичный вектор, постоянный в системе координат, связанной с телом; $s = \{s_1, s_2, s_3\}$ — единичный вектор, постоянный в инерциальном пространстве, относительно которого совершается разворот тела. Система уравнений (5) получена в системе координат, жестко связанной с телом, в ней же вычисляется тензор инерции θ. Момент (6), приложенный к телу, доставляет последнему движения, удовлетворяющие предельным соотношениям: $\omega(t) \to 0$, $s(t) \to r$ при $t \to \infty$, если только начальные данные принадлежат области притяжения относительно положения равновесия

$$\omega = 0, \quad s = r. \tag{7}$$

Для того чтобы математическая модель задачи одноосной стабилизации была полной, надо к (5) добавить векторное уравнение:

$$\dot{s} = s \times \omega. \tag{8}$$

Заметим, что объединенная система (5), (6), (8) имеет первый интеграл $\|s\| = \text{const}$, а из сути задачи $\|s\| \equiv 1$. Поэтому далее и будем говорить об условной устойчивости относительного положения равновесия. Объединенная система имеет еще одно положение равновесия: $\omega = 0$, $s = -r$, но оно неустойчиво.

Предположим, что момент управляющих сил M формируется с временной задержкой $h > 0$, что действительно имеет место в реальности. Таким образом, приходим к задаче с последействием: получить оценки для $h > 0$ и для области притяжения, при которых положение равновесия (7) будет оставаться условно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega &= -a\omega_h + b\xi_h, \\ \dot{s} &= s \times \omega, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega_h = \omega(t-h)$, $\xi_h = r \times s(t-h)$. Каждая интегральная кривая системы (9) однозначно задается начальной вектор-функцией $\{\omega_0(\tau), s_0(\tau)\}$, $\tau \in [-h, 0]$, компоненты которой будем считать непрерывными. Будем рассматривать систему (9) при условии

$$\|s\| = 1, \quad \|r\| = 1. \tag{10}$$

Очевидно, положив $\omega_0(\tau) \equiv 0$, $s_0(\tau) \equiv r$, получим интегральную кривую, которая является относительным положением равновесия (7) системы (9). Предположим, что начальные функции выбираются из условия

$$\omega_0^2(\tau) + [s_0(\tau) - r]^2 \le H, \tag{11}$$

где H — положительная постоянная, которая будет оценена далее. Таким образом, (11) указывает область, являющуюся квадратичным приближением области притяжения положения равновесия (7).

Для решения поставленной задачи рассмотрим функцию переменных ω, s, s_h вида

$$V(\omega, s, s_h) = \frac{1}{2}\omega^T\theta\omega + \alpha(s-r)^2 - \beta\omega^T\theta\xi + \gamma(s_h - r)^2, \qquad (12)$$

где „T" — знак транспонирования, α, β, γ — постоянные. Из (10) установим справедливость неравенств

$$\xi^2 \le (s-r)^2 \le \frac{4}{4-H}\xi^2 \qquad (13)$$

и $H < 4$ при выполнении (11).

Действительно, левое неравенство в (13) равносильно неравенству $\sin^2\varphi \le \le 2 - 2\cos\varphi$, где φ — угол между ортами s и r, а последнее верно для любого φ. Покажем, что и правое неравенство в (13) имеет место. Пусть $H < 4$. Обозначим $\mu = \dfrac{4}{4-H} > 1$. Тогда нам необходимо установить, что

$$\mu\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 2 - \mu \le 0$$

при любых φ, удовлетворяющих (11), т. е. достаточно малых H. Но это очевидно, так как последнее неравенство равносильно оценке

$$\frac{2}{\mu} - 1 \le \cos\varphi \le 1.$$

Используя (13) с заменой s и ξ на s_h и ξ_h, получаем

$$V \ge \frac{1}{2}\vartheta_1\omega^2 + \alpha\xi^2 + \gamma\xi_h^2 - \beta\vartheta_2\|\omega\|\cdot\|\xi\|,$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа θ. Последнее выражение суть квадратичная форма относительно переменных $\|\omega\|$, $\|\xi\|$, $\|\xi_h\|$. Условие ее определенной положительности дает критерий Сильвестра

$$2\alpha\vartheta_1 - \beta^2\vartheta_2^2 > 0. \qquad (14)$$

Таким образом, при выполнении (14) для $\dot{V}$ справедливы оценки

$$\mu_1(\omega^2 + \xi^2 + \xi_h^2) \le V(\omega, s, s_h) \le \mu_2[\omega^2 + (s-r)^2 + (s_h - r)^2], \qquad (15)$$

где $0 < \mu_1 \le \mu_2$ — некоторые постоянные.

Для дальнейшего нам понадобится оценка V сверху через нормы ω, ξ, ξ_h. Она получится из (15) и (12) при условии (11) и (13):

$$V(\omega, s, s_h) \le \mu_2\frac{4}{4-H}(\omega^2 + \xi^2 + \xi_h^2). \qquad (16)$$

Заметим, что $V(\omega, s, s_h)$ обращается в нуль тождественно по $t > 0$ лишь на движении (7), а $\omega^2 + \xi^2 + \xi_h^2$ — на движениях $\omega \equiv 0$, $s \equiv \pm r$. Следовательно, необходимо подобрать H так, чтобы второе относительное положение равновесия не попало в рассматриваемую область (11). Подставляя в V $\omega = 0$ и $s = = s_h = -r$ и используя (15), получаем

$$H \le H_0 = \frac{4(\alpha+\mu)}{\mu_2} < 4. \tag{17}$$

Итак, V будет определенно положительной при выполнении (14) в области (11), где H удовлетворяет (17).

Рассмотрим теперь производную V в силу системы (9)

$$\dot V = \omega^T(-a\omega_h + b\xi_h) - 2\alpha\omega^T\xi + 2\gamma\omega^T\xi_h -$$
$$- \beta\{\omega^T\theta[r\times(s\times\omega)] - \xi^T(\omega\times\theta\omega + a\omega_h - b\xi_h)\}.$$

Несколько членов третьего порядка в выражении $\dot V$ оценивается с использованием полученных выше неравенств. Имеем

$$\dot V \le \beta\vartheta_2\omega^2 - a\omega^T\omega_h + b\omega^T\xi_h - 2a\omega^T\xi - 2\gamma\omega_h^T\xi_h +$$
$$+ \beta a\xi^T\omega - \beta b\xi^T\xi_h. \tag{18}$$

Теперь воспользуемся методом Разумихина. Для этого оценим нормы разностей $(\omega-\omega_h)$ и $(\xi-\xi_h)$:

$$\begin{aligned}\|\omega - \omega_h\| &\le hL_1\sqrt{\omega^2+\xi^2+\xi_h^2},\\ \|\xi - \xi_h\| &\le hL_2\sqrt{\omega^2+\xi^2+\xi_h^2},\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$L_1 = \frac{2}{\vartheta_1}\sqrt{\frac{2\mu_2}{\mu_1(4-H)}(H\vartheta + a^2 + b^2)},$$

$$L_2 = 2\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1(4-H)}}, \qquad \vartheta = \sqrt{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2}.$$

В неравенствах (19) возводя правую и левую части во вторую степень и перенося соответствующие квадраты в правую часть, получаем неравенства, необходимые для оценки $\dot V$:

$$\begin{aligned}-2\omega^T\omega_h &\le h^2L_1^2\xi^2 + hL_1^2\xi_h^2 + (h^2L_1^2-1)\omega^2 - \omega_h^2,\\ -2\xi^T\xi_h &\le (h^2L_2^2-1)\xi^2 + (h^2L_2^2-1)\xi_h^2 + h^2L_2^2\omega^2.\end{aligned} \tag{20}$$

Полагая

$$2\alpha = b, \qquad 2\gamma = \beta a \tag{21}$$

и используя (19), имеем

$$|\omega^T(\beta\xi_h - 2\alpha\xi)| \le b\|\omega\|\|\xi-\xi_h\| \le bL_2^2h(\omega^2+\xi^2+\xi_h^2),$$
$$|\omega_h^T(\beta a\xi - 2\gamma\xi_h)| \le \beta a\|\omega_h\|\|\xi-\xi_h\| \le \beta aL_2^2h(\omega^2+\xi^2+\xi_h^2).$$

Итак,

$$\dot V \le -\frac{1}{2}\{\omega^2[a(1-h^2L_1^2) - 2\beta\vartheta_2 - \beta bh^2L_2^2 - 2bL_2^2h -$$
$$- 2\beta aL_2^2h] + \xi^2[-ah^2L_1^2 + \beta b(1-h^2L_2^2) - 2L_2^2(b+\beta a)h] +$$
$$+ a\omega_h^2 + \xi_h^2[-ah^2L_1^2 + \beta b(1-h^2L_2^2) - 2L_2^2(b+a\beta)h]\}.$$

Квадратичная форма в фигурных скобках будет определенно положительной, если

$$\begin{aligned} h^2 p_1 + 2p_2 h + 2\beta\vartheta_2 - a < 0, \\ h^2 p_1 + 2p_2 h - \beta b < 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где $p_1 = aL_1^2 + \beta b L_2^2$, $p_2 = (b + a\beta) L_2^2$.

Добавляя к (22) условие (14) с заменой (21), получаем ограничения на параметры, при которых V и $\dot{V}$ будут определенно положительны. Из (22) и (14) можно вывести

$$0 < \beta < \min\left\{\frac{a}{2\vartheta_2}, \frac{\sqrt{v\vartheta_1}}{\vartheta_2}\right\}$$

и

$$h < h_0 = \frac{1}{p_1}\left[-p_2 + \sqrt{p_2^2 + p_1 \min\{\beta b, a - 2\beta\vartheta_2\}}\right]. \tag{23}$$

При этом L_1 и L_2 зависят от μ_1 и μ_2, которые вычисляются по формулам

$$\mu_1 = \frac{1}{4}\min\left\{2\beta a, b + \vartheta_1 - \sqrt{(b - \vartheta_1)^2 + 4\beta^2\vartheta_2^2}\right\},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\max\left\{2\beta a, b + \vartheta_2 + \sqrt{(b - \vartheta_2)^2 + 4\beta^2\vartheta_2^2}\right\}.$$

В результате проведенных оценок можно утверждать, что каковы бы ни были коэффициенты усиления a и b при заданном θ, существуют ненулевые h_0 (23) и H_0 (17) такие, что задача одноосной стабилизации имеет положительное решение. Конечно, h_0 и H_0 получены после грубых оценок и предположений, а поэтому наверное далеки от точных границ. Эти величины можно несколько увеличить, используя ЭВМ для конкретных значений параметров.

Аналогично можно решить задачу трехосной стабилизации с запаздыванием в управлении, однако здесь мы из-за громоздких выкладок решение не приводим. Оно в идейном смысле не отличается от приведенного.

1. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. – 267 с.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
3. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, вып. 4. – С. 500–512.
4. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

Получено 20.11.95