УДК 517.2:518.12

**М. І. Рожанківська** (Ун-т "Львів. політехніка"),
**М. С. Сявавко** (Львів аграр. ун-т, Дубляни)

# ПЕРЕТВОРЕННЯ ФОРМАЛЬНИХ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗКЛАДІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В НЕПЕРЕРВНІ *RITZ*-ДРОБИ

The apparatus of *RITZ*-fractions is used to improve the convergence of series which represent the formal solution of linear differential equations with a parameter under boundary or initial conditions. The conditions of the existence of boundary of this solution are established in the case where the parameter of considered equation tends to infinity. The case of a small parameter is also considered.

Використано апарат *RITZ*-дробів для покращання збіжності рядів, що зображають формальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з параметром при граничних або початкових умовах. Встановлено умови існування такого розв'язку при прямуванні параметра цього рівняння до нескінченності. Вивчається також випадок малого параметра.

Як відомо [1, 2], при побудові асимптотичних методів використовується теорія параметризованих нескінченних рядів. Аналогічно теорія неперервних дробів [3] має значно більший інтерес для цілей алгоритмічної і обчислювальної математики, коли компоненти неперервного дробу залежать від параметра. Але в цьому випадку, завдяки складній структурі неперервних дробів, є набагато більше можливостей (порівняно з рядами) для стандартизації такої залежності. Основними типами неперервних дробів, що відповідають степеневим рядам, є регулярні і нерегулярні $C$-, $RITZ$-, $J$-дроби [3, 4], $P$-дроби [5], а також більш сучасні поняття $G$- і $T$-дробів [3]. У даній роботі використовуються регулярні $RITZ$-дроби [3].

Розглядатимемо задачі для диференціальних рівнянь з граничними та початковими умовами, що описують деякі процеси в певній відкритій просторовій області $D$ $r$-вимірного евклідового простору $E^r$ з границею $\partial D$ і в часі $t \geq t_0$.

Запишемо рівняння, а також граничні та початкові умови у вигляді

$$L(\Phi(x,t)) = f(x,t) + \mu g(x,t)\Phi(x,t), \quad x \in D, \quad t > t_0, \tag{1}$$

$$\Gamma(\Phi(x,t)) = h(x,t), \quad x \in \partial D, \quad t > t_0, \tag{2}$$

$$N(\Phi(x,t)) = \Phi_0(x), \quad x \in D, \quad t = t_0. \tag{3}$$

Тут $L$, $\Gamma$, $N$ — деякі задані лінійні оператори, причому $\Gamma$ — оператор граничних умов, $N$ — оператор початкових умов; $\mu$ — числовий параметр. Функції $f(x,t)$, $g(x,t)$, $h(x,t)$, а також $\Phi_0(x)$ вважаються заданими.

Крім того, припустимо, що функція Гріна $G(x, \xi, t, \tau)$ і стандартизуюча функція $\omega(x,t)$ лівої частини задачі (1)–(3) відомі. Тоді (1)–(3) зводиться до розв'язання інтегрального рівняння

$$\Phi(x,t) = b(x,t) + \mu \int_{t_0}^{t} \int_{\overline{D}} G(x,\xi,t,\tau)\, g(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{4}$$

де $b(x,t)$ не залежить від $\Phi$, а лінійно виражається через $f$, $h$ і $\Phi_0$.

Для роз'яснення запису (4) розглянемо декілька прикладів.

***Приклад* 1.** Вивчається задача Коші

$$\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + b^2\Phi(t) = f(t) + \mu g(t)\Phi(t),$$

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \frac{d\Phi}{dt}(0) = \Phi_1, \quad t \geq 0, \quad b \neq 0.$$

В цьому випадку інтегральне рівняння (4) набирає вигляду

$$\Phi(t) =$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^t \sin b(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau + \Phi_0 \cos bt + \frac{1}{b}\Phi_1 \sin bt + \frac{\mu}{b}\int_0^t \sin b(t-\tau)\, g(\tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau .$$

***Приклад* 2.** Вивчається гранична задача

$$-\frac{d}{dx}\left( (1-x^2)\frac{d\Phi(x)}{dx} \right) + \frac{k^2}{1-x^2}\Phi(x) = f(x) + \mu\, g(x)\Phi(x),$$

$$\left|\Phi(-1)\right| < \infty, \quad \left|\Phi(1)\right| < \infty, \quad -1 \le x \le 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тоді (4) матиме вигляд

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{1} G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \mu \int_{-1}^{1} G(x,\xi)\, g(\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi,$$

де при $k \neq 0$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k}\left( \dfrac{1+x}{1-x}\;\dfrac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{k}{2}}, & -1 \le x \le \xi \le 1; \\ \dfrac{1}{2k}\left( \dfrac{1+\xi}{1-\xi}\;\dfrac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{k}{2}}, & -1 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

а при $k = 0$

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2}\begin{cases} \log\big( (1-x)(1+\xi) \big) + C, & -1 \le x \le \xi \le 1; \\ \log\big( (1-\xi)(1+x) \big) + C, & -1 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

де $C = \log 2 - 1/2$.

***Приклад* 3.** Вивчається початково-гранична задача

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) + \mu\, g(x,t)\, \Phi(x,t),$$

$$\Phi(x,0) = \Phi_0(x), \quad \frac{d\Phi}{dt}(x,0) = \Phi_1(x), \quad -\infty \le x \le \infty, \quad t \ge 0, \quad a \neq 0.$$

Тоді (4) матиме вигляд

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\, \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \mu \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\, g(\xi,\tau)\, \Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

де

$$\omega(x,t) = f(x,t) + \Phi_0(x)\, \delta'(t) + \Phi_1(x)\, \delta(t),$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a}\mathbf{1}\left( at - |x-\xi| \right),$$

$\mathbf{1}(t)$ — одинична функція, $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака.

В [6] виписані функції Гріна і стандартизуючі функції найважливіших задач для рівнянь математичної фізики.

Повернемось до рівняння (4). Введемо скорочені записи

$$G(x,\xi,t,\tau)\, g(x,\tau) = K(x,\xi,t,\tau)$$

і

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\overline{D}} h(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int_{\Omega} h(\xi, \tau)\, d_{\xi\tau}.$$

За допомогою методу послідовних наближень розв'язок рівняння (4) можна зобразити у вигляді формального по $\mu$ степеневого ряду (ФСР):

$$b(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i A_i(x, t), \tag{5}$$

де

$$A_i(x, t) =$$

$$= \int_{\Omega} \overset{(i)}{\cdots} \int_{\Omega} K(x, \xi_1, t, \tau_1) K(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \cdots K(\xi_{i-1}, \xi_i, \tau_{i-1}, \tau_i) b(\xi_i, \tau_i) d_{\xi_i \tau_i} \cdots d_{\xi_2 \tau_2} d_{\xi_1 \tau_1}.$$

Побудуємо для розв'язку інтегрального рівняння (4), а отже, і задачі (1)–(3), регулярний *RITZ*-дріб, який відповідав би рядові (5). Цей дріб матиме вигляд

$$\cfrac{\beta_0(x, t)}{1 + \cfrac{\beta_1(x, t)\mu}{1 + \cfrac{\beta_2(x, t)\mu}{1 + \ddots}}}, \tag{6}$$

де $\beta_n(x, t)$, $n = \overline{0, \infty}$, поки що невідомі.

Для скороченого запису (6) використаємо відомий в теорії ланцюгових дробів символ

$$\frac{\beta_0(x, t)}{1} \; + \; \frac{\beta_1(x, t)\mu}{1} \; + \; \frac{\beta_2(x, t)\mu}{1} \; + \; \cdots .$$

Позначимо через

$$\frac{P_0(x, t)}{Q_0(x, t)} = \frac{\beta_0(x, t)}{1}, \quad \frac{P_1(x, t)}{Q_1(x, t)} = \frac{\beta_0(x, t)}{1 + \beta_1(x, t)\mu}, \; \ldots, \; \frac{P_n(x, t)}{Q_n(x, t)}$$

відповідно нульовий, перший, ..., $n$-й підхідний дріб дробу (6).

Для того щоб (6) відповідав рядові (5), необхідно і досить виконання для всіх $n = \overline{0, \infty}$ умов

$$\frac{P_n(x, t)}{Q_n(x, t)} - \left( b(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i A_i(x, t) \right) = O\left(\mu^{n+1}\right). \tag{7}$$

**Теорема 1.** *При виконанні для всіх* $(x, t) \in D \times [t_0, t]$ *умов*

$$H_k^{(s)} \neq 0 \quad (s = 1, 2;\; k = \overline{1, \infty}), \quad b \neq 0, \tag{8}$$

*де* $H_k^{(s)}$ *— визначники Ганкеля*

$$H_k^{(s)} = \begin{vmatrix} A_s & A_{s+1} & \cdots & A_{s+k-1} \\ A_{s+1} & A_{s+2} & \cdots & A_{s+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s+k-1} & A_{s+k} & \cdots & A_{s+2k-2} \end{vmatrix},$$

*відповідний рядові* (5) *регулярний RITZ-дріб* (6) *існує і його компоненти* $\{\beta_m\}_{m=0}^{\infty}$ *визначаються згідно з рекурентними співвідношеннями*

$$\beta_0 = b,$$

$$\beta_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{A_{m+1} + A_m Q_{m,1} + \cdots + A_{m+1-[(m+1)/2]} Q_{m,[(m+1)/2]}}{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_m}, \tag{9}$$

де

$$Q_{m,j} = Q_{m-1,j} + \beta_m Q_{m-2,j-1}; \quad Q_{m,0} = 1, \quad Q_{1,1} = \beta_1; \quad Q_{2,1} = \beta_1 + \beta_2; \tag{10}$$

*а* $[x]$ — *ціла частина числа* $x$.

Умови (8) випливають з необхідної і достатньої умови того, щоб для заданого ФСР (5) існував регулярний *RITZ*-дріб (6), що задовольняє співвідношення (7) (теорема 7.2 [3]). Формули (9) і (10) є аналогом відповідних формул, що наведені в теоремі 1 [7] (див. також [8 – 10]).

***Зауваження* 1.** Більш загальним по відношенню до (6) є нерегулярний *RITZ*-дріб [3]

$$\frac{\beta_0}{1} + \frac{\beta_1 \mu^{\alpha_1}}{1} + \frac{\beta_2 \mu^{\alpha_2}}{1} + \cdots + \frac{\beta_m \mu^{\alpha_m}}{1} + \cdots, \tag{11}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ — деякі цілі додатні числа. Для того щоб в теоремі 1 даної роботи зняти умову (8), потрібно для побудови відповідного до ФСР (5) дробу перейти від регулярного (6) до нерегулярного (11) *RITZ*-дробу.

***Зауваження* 2.** В роботі [5, с. 117] показано, що розклад (6) має перевагу в тих областях $\mu$-площини, де $|\Phi(x,t)|$ спадає при зростанні $|\mu|$. Якщо ж $|\Phi(x,t)|$ зростає при зростанні $|\mu|$, то є доцільним використання регулярного *C*-дробу

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 \mu}{1} + \frac{\alpha_2 \mu}{1} + \cdots + \frac{\alpha_n \mu}{1} + \cdots .$$

Крім того, коли розв'язок задачі (1)–(3) є парною відносно $\mu$ функцією, використовується один з розкладів

$$Q^{(\text{even})}(\mu) = \frac{\gamma_0}{1} + \frac{\gamma_1 \mu^2}{1} + \frac{\gamma_2 \mu^2}{1} + \cdots,$$

або

$$Q^{(\text{even})}(\mu) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 \mu^2}{1} + \frac{\alpha_2 \mu^2}{1} + \cdots.$$

Якщо ж ця функція непарна відносно $\mu$, то, як правило, вибирається зображення

$$Q^{(\text{odd})}(\mu) = \frac{\gamma_0 \mu}{1} + \frac{\gamma_1 \mu^2}{1} + \frac{\gamma_2 \mu^2}{1} + \cdots.$$

Є й інші можливості вибору параметризованих неперервних дробів, наприклад зображення у вигляді *J*-, *G*-, *T*-, або *M*-дробів. З усіх цих зображень вибирається те, яке має потрібні асимптотичні властивості. На наш погляд, в роботі [7] саме вдалий вибір *RITZ*- і *J*-дробів зробив можливим розкриття граничного переходу при знаходженні нормального розв'язку некоректних інтегральних рівнянь першого роду [11, с. 238] (формула 453). В даній роботі для задачі (1)–(3) вивчаються тільки регулярні *RITZ*-дроби.

Розіб'ємо тепер *RITZ*-дріб (6), компоненти якого $\{\beta_m\}$ визначаються згідно з (9), на непарну і парну частини:

$$\frac{\beta_0}{1+\beta_1 \mu} - \frac{\beta_1 \beta_2 \mu^2}{1+(\beta_2+\beta_3)\mu} - \frac{\beta_3 \beta_4 \mu^2}{1+(\beta_4+\beta_5)\mu} - \cdots \tag{12}$$

і

$$\frac{\beta_0}{1} + \frac{\beta_1 \mu}{1+\beta_2 \mu} - \frac{\beta_2 \beta_3 \mu^2}{1+(\beta_3+\beta_4)\mu} - \frac{\beta_4 \beta_5 \mu^2}{1+(\beta_5+\beta_6)\mu -} \cdots \tag{13}$$

Повернемось знову до підхідних дробів дробу (6). Очевидно,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sum_{j=0}^{[n/2]} P_{n,j}\,\mu^j}{\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]} Q_{n,j}\,\mu^j}, \tag{14}$$

де

$$P_{n,j} = P_{n-1,j} + \beta_n P_{n-2,j-1}, \quad P_{n,0} = \beta_0, \quad P_{2,1} = \beta_0\beta_2, \tag{15}$$

а $Q_{n,j}$ визначається згідно з (10).

Виходячи із (15) і (10), знаходимо

$$P_{2n-1,n-1} =$$

$$= \beta_0(\beta_3\cdots\beta_{2n-1} + \beta_2(\beta_5\cdots\beta_{2n-1} + \beta_4(\beta_7\cdots\beta_{2n-1} + \cdots + \beta_{2n-4}(\beta_{2n-1} + \beta_{2n-2})))), \tag{16}$$

$$Q_{2n-1,n} = \beta_1\beta_3\ldots\beta_{2n-1}, \quad n = \overline{2, \infty}, \tag{17}$$

і

$$P_{2n,n} = \beta_0\beta_2\ldots\beta_{2n}, \tag{18}$$

$$Q_{2n,n} =$$

$$= \beta_2\cdots\beta_{2n} + \beta_1(\beta_4\cdots\beta_{2n} + \beta_3(\beta_6\cdots\beta_{2n} + \beta_5(\beta_8\cdots\beta_{2n} + \cdots + \beta_{2n-3}(\beta_{2n} + \beta_{2n-1})))). \tag{19}$$

Візьмемо тепер в (14) $n = 2m+1$, де $m = \overline{0, \infty}$. Вирази

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} = \frac{\sum_{j=0}^{m} P_{2m+1,j}\,\mu^j}{\sum_{j=0}^{m+1} Q_{2m+1,j}\,\mu^j} = \frac{\beta_0 + P_{2m+1,1}\mu + \cdots + P_{2m+1,m}\mu^m}{1 + Q_{2m+1,1}\mu + \cdots + Q_{2m+1,m+1}\mu^{m+1}}$$

є підхідними дробами дробу (12).

Аналогічно, при $n = 2m$, де $m = \overline{0, \infty}$, вирази

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \frac{\sum_{j=0}^{m} P_{2m,j}\,\mu^j}{\sum_{j=0}^{m} Q_{2m,j}\,\mu^j} = \frac{\beta_0 + P_{2m,1}\mu + \cdots + P_{2m,m}\mu^m}{1 + Q_{2m,1}\mu + \cdots + Q_{2m,m}\mu^m}$$

є підхідними дробами дробу (13).

Розглянемо спочатку випадок великого параметра $\mu$.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* (8) *теореми* 1, *коефіцієнти* $\beta_m$ *RITZ-дробу* (6) *обчислюються згідно з рекурентними формулами* (9) і (10) *і слід оператора* $K$ *інтегрального рівняння* (4) *існує*:

$$\operatorname{Sp} K = \int_{\Omega} K(\xi, \xi, \tau, \tau)\, d_{\xi\tau} < \infty, \tag{20}$$

*де* $G(x, \xi, t, \tau)\, g(\xi, \tau) = K(x, \xi, t, \tau)$; $\Omega = \overline{D} \times [t_0, t]$.

*Тоді розв'язок задачі* (1)–(3) *зображується у вигляді збіжної послідовності* $\left\{\frac{P_{2m}}{Q_{2m}}\right\}_{m=0}^{\infty}$ *парних підхідних дробів дробу* (6). *Цей розв'язок є мероморфною функцією параметра* $\mu$ *рівняння* (4), *а дріб* (6) *є відповідним дробом рядові* (5). *Крім того, існує границя такого розв'язку при прямуванні параметра* $\mu$ *до нескінченності*:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \mu\to\infty}} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{P_{2m,m}}{Q_{2m,m}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\beta_0\beta_2\ldots\beta_{2m}}{\beta_2\ldots\beta_{2m}+\beta_1(\beta_4\ldots\beta_{2m}+\beta_3(\beta_6\ldots\beta_{2m}+\beta_5(\beta_8\ldots\beta_{2m}+\ldots+\beta_{2m-3}(\beta_{2m}+\beta_{2m-1}))))} =$$

$$= \frac{\beta_0}{1+\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\left(1+\dfrac{\beta_3}{\beta_4}(1+\ldots)\right)} =$$

$$= \cfrac{\beta_0}{1+\cfrac{\beta_1}{\beta_2-\cfrac{\beta_2\beta_3}{\beta_3+\beta_4-\cfrac{\beta_4\beta_5}{\beta_5+\beta_6-\ddots}}}}\,. \tag{21}$$

*Дроби* (6) і (21) *є гранично-періодичними.*

***Доведення.*** Умови (8) забезпечують регулярність *RITZ*-дробу. При їх невиконанні вираз (6) може бути нерегулярним *RITZ*-дробом вигляду (11).

Формули (9) і (10) встановлюють відповідність дробу (6) рядові (5). Їх справедливість доведена в [7]. Згідно з (14)

$$Q_{2m} = \sum_{j=0}^{m} Q_{2m,j}\,\mu^j,$$

де на основі співвідношення (10) маємо

$$Q_{2m,1} = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{2m}. \tag{22}$$

Але

$$\lim_{m\to\infty} Q_{2m,1} = -\operatorname{Sp} K = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k,$$

де $\lambda_k$ — власні значення оператора $K$ інтегрального рівняння (4).

Отже, на основі умови (20) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{2n-1}+\beta_{2n}) \tag{23}$$

є збіжним, а звідси випливає

$$\lim_{n\to\infty}(\beta_{2n-1}+\beta_{2n}) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{2n-1} = -\lim_{n\to\infty}\beta_{2n} = a. \tag{24}$$

Зауважимо також, що

$$Q_{2n,n+1} = 0, \quad Q_{2n,n+2} = 0, \ \ldots$$

і

$$Q_{2n+1,n+2} = 0, \quad Q_{2n+1,n+3} = 0, \ \ldots,$$

а із співвідношення (10) легко одержати наступні рівності:

$$Q_{n,1} = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n,$$

$$Q_{n,2} = \beta_3 Q_{1,1}+\beta_4 Q_{2,1}+\cdots+\beta_n Q_{n-1,1},$$

$$Q_{n,3} = \beta_5 Q_{3,2} + \beta_6 Q_{4,2} + \dots + \beta_n Q_{n-2,2}, \tag{25}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_{n,p} = \beta_{2p-1} Q_{2p-3,p-1} + \dots + \beta_n Q_{n-2,\,p-1}.$$

На основі збіжності ряду (23) з формул (25) випливає існування границь

$$\lim_{m\to\infty} Q_{2m,1} = Q^{(1)}, \quad \lim_{m\to\infty} Q_{2m,m} = Q^{(2)}, \ \dots, \ \lim_{m\to\infty} Q_{2m,p} = Q^{(p)}. \tag{26}$$

Таким чином, вираз $Q_{2m}$ при $m \to \infty$ перетворюється в ряд

$$1 + \mu Q^{(1)} + \mu^2 Q^{(2)} + \dots + \mu^p Q^{(p)} + \dots . \tag{27}$$

На основі того, що при $\beta_0 = 1$ знаменник $Q_{2m}$ скінченного *RITZ*-дробу (6) стає чисельником $P_{2m}$ цього ж дробу при $\beta_1 = 0$, то по аналогії з (26) і (27) для $P_{2m}$ при $m \to \infty$ існує ФСР.

Наступним етапом доведення теореми є доведення збіжності ряду (27). Для цього використаємо парну частину (13) дробу (6). При дослідженні властивостей дробу (13) враховуються граничні значення (24). Оскільки періодичний дріб

$$\frac{a^2}{1} + \frac{a^2}{1} + \dots + \frac{a^2}{1} + \dots$$

є збіжним дробом з додатними компонентами, то „хвіст” асоційованого дробу (13) є голоморфною відносно $\mu$ функцією. Отже, ряд (27) є збіжним рядом і $\lim_{m\to\infty} Q_{2m} = Q$, де $Q$ є сумою ряду (27). Аналогічна ситуація має місце і для чисельника: $\lim_{m\to\infty} P_{2m} = P$, а отже, розв'язок задачі (1) – (3) має вигляд

$$\Phi = \frac{P}{Q} = \frac{\beta_0 + \mu P^{(1)} + \mu^2 P^{(2)} + \dots}{1 + \mu Q^{(1)} + \mu^2 Q^{(2)} + \dots}$$

і є мероморфною функцією параметра $\mu$ рівняння (1).

Здійснимо тепер у парній частині дробу (13) граничний перехід при прямуванні $\mu$ до нескінченності (а це є можливим завдяки рівномірній збіжності цього дробу). Одержимо

$$\lim_{\mu\to\infty} \Phi(x,t,\mu) = \lim_{\mu\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{\beta_0 + P_{2m,1}\mu + \dots + P_{2m,m}\mu^m}{1 + Q_{2m,1}\mu + \dots + Q_{2m,m}\mu^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{P_{2m,m}}{Q_{2m,m}},$$

а звідси і значення (21).

Теорему доведено.

***Зауваження 3.*** Задача обчислення граничного значення (21) некоректна, оскільки в (21) виконується умова (24). Для знаходження цього значення потрібно здійснювати регуляризацію дробу (21) за рахунок вдалого його обривання.

Перейдемо тепер до випадку, коли в (1) $\mu$ — малий параметр. Оскільки

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \mu\to 0}} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ \mu\to 0}} \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} = \beta_0, \tag{28}$$

то у випадку малого параметра $\mu$ доцільно користуватись підхідними дробами парного або непарного випадків.

**Теорема 3.** *При виконанні умов теореми* 2

$$\Phi(x,t) - \frac{P_n(x,t)}{Q_n(x,t)} = O(\mu^{n+1}), \tag{29}$$

*якщо* $\mu$ *— малий параметр. В цьому випадку виконується* (28).

***Доведення.*** На основі умови (20) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

є збіжним. Отже,

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0,$$

а ряд (27) є рівномірно збіжним. Аналогічна ситуація має місце і для чисельника мероморфної функції відносно $\mu$-розв'язку інтегрального рівняння (4). Таким чином, границя (28) і оцінка (29) стверджуються.

Теорему доведено.

***Зауваження 4.*** Згідно з результатами роботи [7 ] *RITZ*-дріб (6) буде скінченним, а саме матиме $2n-1$ поверхів, якщо задача (1)–(3) є статичною (тобто не залежить від часу $t$), а функція Гріна такої задачі має вигляд

$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \psi_i(\xi).$$

***Зауваження 5.*** Алгоритм перетворення (5) в (6) здійсненний і у випадку, коли за параметр $\mu$ взято один із аргументів $x$ або $t$.

***Приклад 4.*** Згідно з зауваженням 5 розглянемо один дуже простий, але важливий і типовий приклад, а саме рівняння Ейрі [1, 2]

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = x\Phi. \tag{30}$$

Функції Ейрі, що задовольняють це рівняння, виникають при дослідженнях розв'язків звичайних диференціальних рівнянь поблизу точок повороту.

Наведемо дві асимптотики функції Ейрі, що одержані за допомогою викладеного вище дробово-раціонального алгоритму з використанням методики роботи [2]:

$$A_i(x) = \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \left( \frac{96x^{3/2}+67}{96x^{3/2}+77} + O(x^{-9/2}) \right)$$

і

$$A_i(x) = \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \left( \frac{5833729x^3 + 17404704x^{3/2} + 5877379}{5833729x^3 + 18012384x^{3/2} + 7266259} + O(x^{-15/2}) \right).$$

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 375 с.
3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
4. *Wall H. S.* The analytic theory of continued fractions. – Princeton: Van Notrand, 1948. – 433 p.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис У.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
6. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
7. *Сявавко М. С.* *J*-дробова регуляризація лінійних некоректних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №8. – С. 1030 – 1043.
8. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
9. *Рожанківська М. І., Сявавко М. С.* Операторні ланцюгові дроби та побудова коректних і стійких методів розв'язання тридіагональних систем операторних рівнянь // Допов. НАН України. – 1994. – №9. – С. 24 – 29.
10. *Сявавко М. С., Пасечник Т. В., Рыбыцка О. М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, №1. – С.10 – 16.
11. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Одержано 13.02.96