УДК 519.21

А. В. Свіщук, А. Г. Бурдейний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ *

We consider the problems of optimal stabilization of controlled evolutionary stochastic systems in the semi-Markov medium and their application to financial stochastic models.

Розглядаються задачі оптимальної стабілізації керованих еволюційних стохастичних систем у напівмарковському середовищі та їх застосування до фінансових стохастичних моделей.

1. Керовані еволюційні стохастичні системи (е.с.с.). Розглянемо керовані системи вигляду

$$dS(t) = \mu(x(t), S(t), u)dt + s(x(t), S(t), u)dw(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ — напівмарковський процес, $\mu(x, s, u)$ та $\sigma(x, s, u)$ — неперервні за сукупністю змінних функції на $X \times R \times U$, $(X, \mathfrak{X})$ — вимірний фазовий простір $x(t)$, U — клас керувань, $u \in U$ — скалярний параметр керування, $w(t)$ — вінерів процес. Будемо вважати, що керування u в (1) залежить від $S(t)$ та $x(t)$, тобто $u \equiv u(S(t), x(t))$. Тоді процес $(S(t), x(t), \gamma(t))$ буде марковським, де $\gamma(t) = t - \tau_{\nu(t)}$, $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}$, $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $x(t) = x_{\nu(t)}$, $\{x_n, \theta_n, n \ge \ge 0\}$ — процес марковського відновлення [1].

Функцію $u \equiv u(s, x)$ назвемо *допустимою*, якщо коефіцієнти $\mu(x, s, u)$ та $\sigma(x, s, u)$ неперервні, мають перші похідні по s та $u(0, x) = 0$ $\forall x \in X$. Будемо вважати, що U є класом допустимих керувань. Кожній функції $u \in U$ (допустимому керуванню) відповідає процес $(S_u^s(t), x(t))$, що є розв'язком рівняння (1) з початковою умовою $S_u^s(0) = s$, $x(0) = 0$.

За аналогією з детермінованим випадком [2], розглянемо дві задачі стабілізації за допомогою допустимих керувань $u \in U$:

1) знайти допустиме керування $u = u_0(s, x)$ таке, що рівняння (1) при $u = = u_0(s, x)$ є асимптотично (експоненціально) стійким, тобто це є задача про асимптотичну стабілізацію [3, 4];

2) знайти допустиме керування $u = u_0(s, x)$, що надає мінімуму функціоналу *критерію якості:*

$$G_x^s(u) = \int_0^\infty M_x K(S_u^s(t), u(S_u^s(t), x(t)), x(t))dt,$$

де $K(s, u, x) \ge 0$, $s \in R$, $u \in U$. Це задача про оптимальну стабілізацію в сенсі даного критерію якості [3, 4].

У подальшому будемо вважати, що критерії якості задовольняють умову: для будь-якого $u \in U$ існує $p > 0$ таке, що

$$K(s, u, x) > c(x)|s|^p, \tag{2}$$

де $c(x)$ — додатна обмежена функція.

При умові (2) обидві задачі стабілізації тісно пов'язані: якщо керування $u_0(s, x)$ розв'язує задачу 2 для функції $K(s, u, x)$ в (2), то

$$\lim_{t\to\infty} M_x \left|S_{u_0}^s(t)\right|^p = 0 \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

---

* Виконана при частковому фінансуванні фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій.

За деяких додаткових умов з (3) випливає асимптотична та експоненціальна стійкість.

2. Принцип Беллмана для еволюційних стохастичних систем. У цьому пункті буде доведено теорему, що є модифікацією принципу Беллмана стосовно задач оптимальної стабілізації стохастичних диференціальних рівнянь з напівмарковськими перемиканнями.

Нехай $V(s, x, t)$ — функція з класу $C^2(R \times X \times R_+)$. Відомо [1], що процес $y(t) = (x(t),\ t - \tau_{\nu(t)})$ є марковським у просторі $Y = X \times R$ з інфінітезимальним оператором

$$Qf(t, x) = \frac{d}{dt} f(t, x) + \frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} [P f(0, x) - f(t, x)] \quad \forall f(t, x) \in C^1(R_+ \times X),$$

$$\overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t), \quad g_x(t) = \frac{dG_x(t)}{dt}, \quad g_x(0) \neq 0, \tag{4}$$

$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t \mid x_n = x\}$, P — оператор перехідних ймовірностей $P(x, A)$ ланцюга Маркова $(x_n;\ n \geq 0)$, $P(x, A) = P\{x_{n+1} \in A \mid x_n = x\}$, $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$.

Таким чином, процес $(S(t), y(t))$ є марковським у просторі $R \times X \times R_+$ з інфінітезимальним оператором

$$L_u = \mu(x, s, u) \frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, s, u) \frac{d^2}{ds^2} + Q, \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай існують додатно означена функція* $V_0(s, x, t) \in C^2(R \times X \times R_+)$ *та функція* $u_0(s, x) \in U$, *що задовольняють при всіх* $s \in R$, $u \in U$ *та деяких додатних константах* p, n, k_1, k_2 *наступні умови:*

$$V_0(s, x, t) \leq k_1 |s|^p, \quad \left| \frac{\partial V_0}{\partial s} \right| \leq k_1 (1 + |s|^n), \tag{6}$$

$$L_{u_0} V_0(s, x, t) + K(s, u_0(s, x), x) \equiv 0, \tag{7}$$

$$L_u V_0(s, x, t) + K(s, u(s, x), x) \geq 0, \tag{8}$$

$$K(s, u, x) \geq k_2 |s|^p \quad \forall x \in X. \tag{9}$$

Тоді функція $u_0(s, x)$ *розв'язує задачу про оптимальну стабілізацію системи* (1) *в сенсі критерію якості* $G_x^s(u)$, *причому*

$$G_x^s(u_0) = \min_{u \in U} G_x^s(u) = V_0(s, x, 0). \tag{10}$$

Крім того, керування $u_0(s, x)$ *стабілізує рівняння* (1) *до експоненціальної* p*-стійкості.*

Доведення. Нехай $u = u_0(s, x)$ — деяке допустиме керування. Застосуємо формулу Іто для еволюційних стохастичних систем [5, 6] до функції $V_0(S_u^s(t), x(t), \gamma(t))$. Отримаємо рівність

$$M_x V_0(S_u^s(t), x(t), \gamma(t)) - V_0(s, x, 0) = M_x \int_0^t L_u V_0(S_u^s(v), x(v), \gamma(v)) dv, \tag{11}$$

де оператор L_u визначений в (5).

Покладаючи тут $u = u_0(s, x)$ та застосовуючи (7), одержуємо

$$M_x \int_0^t K(S_{u_0}^s(v), u_0(S_{u_0}^s(v), x(v)), x(v)) dv =$$

$$= V_0(s, x, 0) - M_x V_0(S_{u_0}^s(t), x(t), \gamma(t)) \leq V_0(s, x, 0). \tag{12}$$

Звідси при $t \to \infty$ випливає нерівність $G_x^s(u_0) < +\infty$. З цієї нерівності, умови (2) та (9) випливає, що для процесу $S_{u_0}^s(t)$ виконано співвідношення (3). Із (3) та умови (6) маємо

$$M_x V_0(S_{u_0}^s(t), x(t), \gamma(t)) \le k_1 M_x \left| S_{u_0}^s(t) \right|^p \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Тому, переходячи до границі в (12) при $t \to +\infty$, отримуємо

$$G_x^s(u_0) = V_0(s, x, 0).$$

Якщо тепер $u(s, x)$ — деяке інше допустиме керування, для якого $G^s(u) < < +\infty$, то, як і вище, легко переконатися в справедливості рівності

$$\lim_{t \to \infty} M_x V_0(S_u^s(t), x(t), \gamma(t)) = 0.$$

Використовуючи останню рівність та співвідношення

$$M_x V_0(S_u^s(t), x(t), \gamma(t)) \ge V_0(s, x, \gamma) -$$

$$- M_x \int_0^t K(S_u^s(v), u(S_u^s(v), x(v)), x(v))\, dv \ge V_0(s, x, 0),$$

яке випливає з (8) та (11), остаточно при $t \to +\infty$ отримуємо нерівність

$$\min_{u \in U} G_x^s(u) \ge V_0(s, x, 0).$$

Доведемо тепер експоненціальну p-стійкість рівняння (1) при $u = u_0(s, x)$. Для цього достатньо перевірити лише справедливість для деякої константи $k_3 > 0$ нерівності (див. [4], теорема 5.7.1):

$$V_0(s, x, 0) \ge k_3 |s|^p.$$

З (9) та (10) одержуємо

$$V_0(s, x, 0) = G_x^s(u_0) \ge k_2 \int_0^\infty M_x \left| S_{u_0}^s(v) \right|^p dv,$$

і, значить, для будь-якого $s \in R$ можна вказати таке число $T = T(s)$, що

$$M_x \left| S_{u_0}^s(v) \right|^p < \frac{1}{2} |s|^p.$$

Звідси та з формули Іто для е.с.с. [6], враховуючи нерівність $L_{u_0}(|s|^p) \ge \ge -k_4 |s|^p$, знаходимо

$$V_0(s, x, 0) \ge k_2 \int_0^\infty M_x \left| S_{u_0}^s(v) \right|^p dv \ge -k_5 \int_0^T M_x L_{u_0}\left(\left| S_{u_0}^s(v) \right|^p \right) dv =$$

$$= k_5 \left(|s|^p - M \left| S_{u_0}^s(T) \right|^p \right) \ge k_5 / 2 |s|^p = k_3 |s|^p.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Умови (7), (8), об'єднані в співвідношення

$$\min_{u \in U} [L_u V_0(s, x, 0) + K(s, u, x)] = 0 \quad \forall x \in X, \tag{13}$$

називають рівнянням Беллмана для е.с.с.

3. Керовані лінійні е.с.с. Застосуємо теорему 1 до вивчення лінійного відносно S та u рівняння

$$dS(t) = [\mu(x(t))S(t)+\mu_1(x(t))u]dt+[\sigma(x(t))S(t)+\sigma_1(x(t))u]dw(t), \tag{14}$$

де функції $\mu(x(t))$, $\mu_1(x(t))$, $\sigma(x(t))$, $\sigma_1(x(t))$ є неперервними та обмеженими.

Розглянемо задачу про оптимальну стабілізацію рівняння (14) з критерієм якості

$$K(s,u,x) = \alpha(x)s^2+\lambda(x)u^2,$$

де $\alpha(x)$ та $\lambda(x)$ — обмежені додатно означені функції.

Будемо шукати оптимальну функцію Ляпунова $V_0(s,x,t)$, що задовольняє умови теореми 1, у вигляді невід'ємної функції:

$$V_0(s,x,t) = C(x)s^2, \quad C(x)>0, \tag{15}$$

що не залежить від t.

Оператор L_u в (5) для рівняння (14) визначається, очевидно, рівністю

$$L_u = [\mu(x)s+\mu_1(x)u]\frac{d}{ds}+\frac{1}{2}[\sigma(x)s+\sigma_1(x)u]^2\frac{d^2}{ds^2}+Q.$$

Рівняння Беллмана (13), що пов'язує оптимальну функцію Ляпунова $V_0(s,x,t)$ та оптимальне керування $u_0(s,x)$, має вигляд

$$\min_u[(\mu(x)s+\mu_1(s)u)\frac{d}{ds}V_0+\frac{1}{2}[\sigma(x)s+\sigma_1(x)u]^2\frac{d^2}{ds^2}V_0+QV_0+\alpha(x)s^2+\lambda(x)u^2] = 0,$$

тобто

$$\mu(x)s\frac{d}{ds}V_0+\frac{1}{2}\sigma^2(x)s^2\frac{d^2}{ds^2}V_0+\alpha(x)s^2+QV_0 =$$

$$= -u_0[\mu_1(x)\frac{d}{ds}V_0+\sigma(x)\sigma_1(x)s\frac{d^2}{ds^2}V_0]-u_0^2[\frac{1}{2}\sigma_1^2(x)\frac{d^2}{ds^2}V_0+\lambda(x)]. \tag{16}$$

Функція $u_0(s,x)$ в (16) має вигляд

$$u_0(s,x) = -\frac{2\mu_1(x)\frac{d}{ds}V_0+2\sigma(x)\sigma_1(x)s\frac{d^2}{ds^2}V_0}{2\lambda(x)+\sigma_1^2(x)\frac{d^2}{ds^2}V_0}; \tag{17}$$

в результаті підстановки (15) в (17) отримуємо рівність

$$u_0(s,x) = -\frac{2s(\mu_1(x)+\sigma(x)\sigma_1(x))}{\lambda(x)/c(x)+\sigma_1^2(x)}. \tag{18}$$

Очевидно, що оптимальне керування лінійне по s, якщо оптимальна функція Ляпунова задається формулою (15).

Із (16) та (18) для визначення V_0 отримуємо рівняння

$$\mu(x)s\frac{d}{ds}V_0+\frac{1}{2}\sigma^2(x)s^2\frac{d^2}{ds^2}V_0+\alpha(x)s^2+QV_0 =$$

$$= \frac{2[2s\mu_1(x)C(x)+2s\sigma(x)\sigma_1(x)C(x)]^2}{\lambda(x)+\sigma_1^2(x)C(x)},$$

що еквівалентне наступному:

$$2\mu(x)C(x)+\sigma^2(x)C(x)+\alpha(x)+g_x(0)[P-I]C(x) =$$

$$= \frac{2[2\mu_1(x)+2\sigma(x)\sigma_1(x)]^2C^2(x)}{\lambda(x)+\sigma_1^2(x)C(x)}.$$

Або в іншій формі

$$[2\mu(x)\sigma_1^2(x)(-1/g_x(0))+\sigma^2(x)\sigma_1^2(x)(1/g_x(0))+[P-I]\sigma_1^2(x)-4\mu_1(x)(1/g_x(0))-$$
$$-\ 4\sigma(x)\sigma_1(x)(1/g_x(0))]C^2(x)+[2\mu(x)\lambda(x)(1/g_x(0))+\sigma^2(x)\lambda(x)(1/g_x(0))+$$
$$+\ \alpha(x)\sigma_1^2(x)(1/g_x(0))+[P-I]\lambda(x)]C(x)+\alpha(x)\lambda(x)(1/g_x(0)) = 0. \quad (19)$$

Позначимо через $A(x)$ функцію в квадратних дужках при $C^2(x)$, а через $B(x)$ — при $C(x)$. Тоді рівняння (19) має розв'язок, якщо

$$B^2(x)-4A(x)\alpha(x)\lambda(x)/g_x(0) > 0 \quad \forall x\in X. \quad (20)$$

Додатним розв'язком рівняння (19) є такий:

$$C(x) = \frac{-B(x)+\sqrt{B^2(x)-4A(x)\alpha(x)\lambda(x)/g_x(0)}}{2A(x)} \quad \forall x\in X. \quad (21)$$

З теореми 1 випливає наступна лема.

Лема. *За умови* (20), *коли* $C(x)$ *визначається рівністю* (21), *керування* $u_0(s,x)$ *в* (18) *надає мінімуму функціоналу*

$$G_x^s(u) = \int_0^\infty M_x\Big[\alpha(x(t))(S_u^s(t))^2+\lambda(x(t))u^2(S_u^s(t),x(t))\Big]dt.$$

Зауваження 2. З леми випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} M_x\left|S_{u_0}^s(t)\right|^p = 0, \quad (22)$$

де $u_0(s,x)$ визначена в (18).

За деяких додаткових умов з (22) випливає асимптотична та експоненціальна стійкість рівняння (14).

4. Керовані фінансові стохастичні моделі. Рівняння (14) є моделлю керованої динаміки вартості $S(t)$ акцій з коефіцієнтами росту $\mu(x(t))$ та мінливості $\sigma(x(t))>0$, із лінійним керуванням u, пропорційним відповідно $\mu_1(x(t))$ та $\sigma_1(x(t))$. Наявність додаткового, окрім $w(t)$, джерела випадковості $x(t)$ свідчить про те, що ринок цінних паперів є неповним.

Тому природно виникає проблема оптимальної стабілізації вартості акцій $S(t)$ в (14) в умовах неповного ринку за даним критерієм якості

$$K(s,u,x) = \alpha(x)s^2+\lambda(x)u^2.$$

Із результатів, викладених у п.3, випливає, що за оптимальну функцію Ляпунова V_0 слід взяти функцію (див. (15))

$$V_0 = C(x)S^2.$$

Тоді оптимальне керування $u_0(s,x)$ вартості акцій $S(t)$ в (14) в умовах неповного ринку визначається за формулою (18), де $C(x)$ визначена в (21) і надає мінімуму функціоналу

$$G_x^s(u) = \int_0^\infty M_x\Big[\alpha(x(t))(S_u^s(t))^2+\lambda(x(t))u^2(S_u^s(t),x(t))\Big]dt, \quad (23)$$

причому

$$\min_u G_x^s(u) = G_x^s(u) = C(x)s^2 \quad \forall x\in X.$$

Зауваження 3. Якщо в (14) $\mu_1(x)\equiv\sigma_1(x)\equiv 0$, то в (17) $u_0(s,x)=0$. У цій ситуації керування $u_0(s,x)$ дійсно надає мінімуму функціоналу $G_x^s(u)$ в (23).

5. Оптимальне керування е.с.с. у схемі усереднення. Розглянемо керовані системи в схемі серій вигляду (див. (1))

$$dS_\varepsilon^u(t) =$$
$$= \mu(x(t/\varepsilon), S_\varepsilon^u(t), u_\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon)))dt + \sigma(x(t/\varepsilon), S_\varepsilon^u(t), u_\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon)))dw(t), \tag{24}$$

де функції μ, σ, u_ε неперервні та обмежені за сукупністю змінних, причому

$$u_\varepsilon(s, x) \to \hat{u}(s) \quad \forall s \in R, \quad \forall x \in X, \tag{25}$$

функція $\hat{u}(s)$ є неперервною та обмеженою відносно s. Нехай також $x(t)$ є ергодичним процесом із стаціонарною мірою $\pi(dx) = \rho(dx)\, m(x)/m$, де $\rho(dx)$ — стаціонарна міра ланцюга Маркова $(x_n, n \geq 0)$;

$$m(x) = \int_0^\infty t\, G_x(dt), \quad m = \int_X m(x)\, \rho(dx).$$

Відомо [1], що за деяких регулярних умов на μ, σ та ергодичності процесу $x(t)$ процес $S_\varepsilon^u(t)$ в (21) слабко збігається при $\varepsilon \to \infty$ до процесу $\hat{S}(t)$, що є розв'язком усередненого рівняння

$$d\hat{S}^{\hat{u}}(t) = \mu(\hat{S}^{\hat{u}}(t), \hat{u}(\hat{S}(t)))dt + \hat{\sigma}(\hat{S}^{\hat{u}}(t), \hat{u}(\hat{S}^{\hat{u}}(t)))dw(t), \tag{26}$$

де

$$\hat{\mu}(s, u) = \int_X \pi(dx)\, \mu(x, s, u), \quad \hat{\sigma}^2(s, u) = \int_X \pi(dx)\, \sigma^2(x, s, u).$$

Інфінітезимальним для процесу $\hat{S}(t)$ в (26) є оператор

$$\hat{L}_u = \hat{\mu}(s, u)\frac{d}{ds} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(s, u)\frac{d^2}{ds^2}. \tag{27}$$

Нехай $K_\varepsilon(s, u, x)$ є сукупністю невід'ємних функцій таких, що

$$K_\varepsilon(s, u, x) \to \hat{K}(s, u), \quad \varepsilon \to 0, \tag{28}$$

де $\hat{K}(s, u)$ — неперервна та обмежена функція відносно s, u, причому

$$\hat{K}(s, u) \geq K_1 |s|^p,$$

та функція

$$G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon) = \int_0^\infty M_x\, K_\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), u_\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon)), x(t/\varepsilon), \gamma(t, \varepsilon))dt \tag{29}$$

є функціоналом критерію якості для $S_\varepsilon(t)$ в (24),

$$\hat{G}_0^{s,x}(u) = \int_0^\infty M_x\, \hat{K}\,(\hat{S}^{\hat{u}}(t), \hat{u}\,(\hat{S}(t)))dt. \tag{30}$$

Теорема 2. *Нехай існують додатно означена функція* $\hat{V}_0 \in C^2(R)$ *та функція* $\hat{u}_0(s) \in U$, *що задовольняють при всіх* $s \in R$, $u \in U$ *та деяких додатних константах* p, n, k_1, k_2 *наступні умови:*

$$\hat{V}_0(s) \leq k_1 |s|^p, \quad \left|\frac{\partial \hat{V}_0}{\partial s}\right| \leq k_1\left(1 + |s|^n\right), \tag{31}$$

$$\hat{L}_{\hat{u}_0} \hat{V}_0(s) + \hat{K}(s, \hat{u}_0) \equiv 0, \tag{32}$$

$$\hat{L}_u \hat{V}_0(s) + \hat{K}(s, u) \geq 0. \tag{33}$$

Тоді функція $\hat{u}_0(s)$ *є розв'язком задачі про оптимальну стабілізацію системи* (24) *в сенсі критерію якості* $G_\varepsilon^s(u)$ *в* (29) *для достатньо малого та фіксованого* $\varepsilon > 0$, *причому*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon) = \hat{G}_0^{s,x}(u_0) = \hat{V}_0(S),$$

де $\hat{G}_0^{s,x}(u)$ *визначена в* (30).

Крім того, керування $\hat{u}_0(s)$ *стабілізує рівняння* (24) *до експоненціальної стійкості.*

Зауваження 4. З умов теорем 2 та 1 випливає, що $\hat{u}_0(s)$ розв'язує задачу про оптимальну стабілізацію рівняння (26) в сенсі критерію якості $\hat{G}_0^s(u)$ в (30) з функцією Ляпунова $\hat{V}_0(S)$.

Доведення. Нехай

$$L_u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q + \mu(x, s, u) \frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, s, u) \frac{d^2}{ds^2}, \tag{34}$$

де Q є інфінітезимальним оператором марковського процесу $(x(t), \gamma(t))$ (див. (4)), а функції μ та σ визначені в (24).

Побудуємо функцію $V^\varepsilon(s, x, t)$ наступним чином:

$$V^\varepsilon(s, x, t) = \hat{V}_0(s) + \varepsilon V_1(s, x, t), \tag{35}$$

де $V_1(s, x, t)$ є розв'язком рівняння

$$Q V_1(s, x, t) + \mu(x, s, u) \frac{d}{ds} \hat{V}_0(s) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, s, u) \frac{d^2}{ds^2} \hat{V}_0(s) - \hat{L}_u \hat{V}_0(s) = 0, \tag{36}$$

$\hat{V}_0(s)$ визначена в теоремі 2, $\hat{L}_u$ — в (27).

Відмітимо, що

$$L_u^\varepsilon V^\varepsilon = \hat{L}_u \hat{V}_0(s) + \varepsilon L_u V_1, \tag{37}$$

де

$$L_u := \mu(x, s, u) \frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, s, u) \frac{d^2}{ds^2}, \tag{38}$$

а L_u^ε, V^ε, $\hat{L}_u$, V_1 визначені в (34), (35), (27) та (36) відповідно.

За узагальненою формулою Іто для е.с.с. [6] для функції $V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(t),\ x(t/\varepsilon),\ \gamma(t, \varepsilon))$ маємо

$$M_x V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t, \varepsilon)) - V^\varepsilon(s, x, 0) = M_x \int_0^t L_u^\varepsilon V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(v), x(v/\varepsilon), \gamma(v, \varepsilon))\, dv. \tag{39}$$

Це означає, що процес

$$m_u^\varepsilon(t) := V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t, \varepsilon)) - V^\varepsilon(s, x, 0) - \int_0^t L_u^\varepsilon V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(v), x(v/\varepsilon), \gamma(v, \varepsilon))\, dv \tag{40}$$

є неперервним зліва інтегровним мартингалом відносно σ-алгебри

$$F_{t,\varepsilon}^{u} := \sigma\{S_\varepsilon(v);\, x(v/\varepsilon);\, 0 \le v \le t\}.$$

Із (40) одержуємо зображення:

$$-\int_0^t L_u^\varepsilon V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(v), x(v/\varepsilon), \gamma(v,\varepsilon))dv = V^\varepsilon(s,x,0) - V^\varepsilon(S_\varepsilon^u(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t,\varepsilon)) + m_u^\varepsilon(t). \tag{41}$$

Визначимо функцію $K_1(s,u,x,t)$ таким чином, що

$$L_{\hat{u}_0} V_1(s,x,t) + K_1(s,\hat{u},x,t) = 0,$$
$$L_u V_1(s,x,t) + K_1(s,u,x,t) \ge 0, \tag{42}$$

де L_u, V_1 визначені в (38) та (35), (36) відповідно.

Тоді функцію $K_\varepsilon(s,u,x,t)$ в (28) можна записати у вигляді

$$K_\varepsilon(s,u,x,t) = \hat{K}(s,u) + \varepsilon K_1(s,u,x,t). \tag{43}$$

З умов (32), (37) та (42) маємо співвідношення

$$L_{\hat{u}_0}^\varepsilon V^\varepsilon = -\hat{K}(s,\hat{u}_0) - \varepsilon K_1(s,\hat{u}_0,x,t),$$

і, враховуючи (43), одержуємо

$$L_{\hat{u}_0}^\varepsilon V^\varepsilon + K_\varepsilon(s,\hat{u}_0,x,t) = 0. \tag{44}$$

Із співвідношень (41) та (44) отримуємо

$$\int_0^t K_\varepsilon(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v), \hat{u}_0(S_\varepsilon(v)), x(v/\varepsilon), \gamma(v,\varepsilon))dv =$$
$$= V^\varepsilon(s,x,0) - V^\varepsilon(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t/\varepsilon)) + m_{\hat{u}_0}^\varepsilon(t). \tag{45}$$

Враховуючи розклади (35) та (43), із (45) маємо

$$\int_0^t K_\varepsilon(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v), \chi(v/\varepsilon), \hat{u}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v)), \gamma(v,\varepsilon))dv =$$
$$= \hat{V}_0(s) + \varepsilon V_1(s,x,0) - \hat{V}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t)) - \varepsilon V_1(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t,\varepsilon)) + m_{\hat{u}_0}^\varepsilon(t). \tag{46}$$

Після застосування математичного сподівання до обох частин (46) отримуємо

$$\int_0^t M_x K_\varepsilon(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v), \hat{u}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v)), x(v/\varepsilon), \gamma(v,\varepsilon))dv =$$
$$= \hat{V}_0(s) - M_x \hat{V}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t)) + \varepsilon[V_1(s,x,0) - M_x V_1(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t/\varepsilon))]. \tag{47}$$

Звідси при $t \to +\infty$ та $\varepsilon \to 0$ випливає нерівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon) < +\infty.$$

Зазначимо, що для процесу $S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t)$ виконуються умови стійкості в схемі усереднення [6]:

$$\lim_{t \to \infty} M_x \left| S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t) \right|^p = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, x \in X.$$

З цієї умови та умови (31) маємо

$$M_x \hat{V}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t)) \le K_1 M_x \left| S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(t) \right|^p \to 0, \quad t \to +\infty, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{48}$$

$$\hat{V}_0(S) = \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty M_x K_\varepsilon(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v), \hat{u}_0(S_\varepsilon^{\hat{u}_0}(v)), x(v/\varepsilon), \gamma(v,\varepsilon))\,dv \geq$$

$$\geq K\int_0^\infty M_x\left|\hat{S}^{\hat{u}_0}(t)\right|^p dt.$$

Значить, існує таке $T = T(S)$, що

$$M_x\left|\hat{S}^{\hat{u}_0}(t)\right|^p < \frac{1}{2}|s|^p.$$

Звідси та з формули Іто для е.с.с. [6], враховуючи нерівність $\hat{L}_{\hat{u}_0}(|s|^p) \geq$ $\geq -K_4|s|^p$, при $\varepsilon \to 0$ знаходимо

$$\hat{V}_0(S) \geq K\int_0^\infty M_x\left|\hat{S}^{\hat{u}_0}(t)\right|^p dt \geq -K_5\int_0^T M_x\hat{L}_{\hat{u}_0}\left(\left|S^{\hat{u}_0}(t)\right|^p\right)dt =$$

$$= K_5(|s|^p) - M\left|S^{\hat{u}_0}(T)\right|^p \geq \frac{K_5}{2}|s|^p.$$

Теорему 2 доведено.

6. Керовані лінійні е.с.с. у схемі усереднення. Застосуємо теорему 2 до вивчення лінійного відносно S та u рівняння в схемі серій

$$dS_\varepsilon(t) = [\mu(x(t/\varepsilon))S_\varepsilon(t) + \mu_1(x(t/\varepsilon))u_\varepsilon]dt +$$
$$+ [\sigma(x(t/\varepsilon))S_\varepsilon(t) + \sigma_1(x(t/\varepsilon))u_\varepsilon]dw(t), \tag{53}$$

де μ, μ_1, σ, σ_1 є неперервними та обмеженими функціями по x, u_ε визначена в (25).

Розглянемо задачу про оптимальну стабілізацію рівняння (53) з критерієм якості

$$K_\varepsilon(s,u,x,t) = \alpha_\varepsilon(x)s^2 + \lambda_\varepsilon(x)u_\varepsilon^2, \tag{54}$$

де $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x) + \varepsilon\alpha_1(x)$, $\lambda_\varepsilon(x) = \lambda(x) + \varepsilon\lambda_1(x)$, α, α_1, λ, λ_1 — обмежені додатно означені функції.

Тут

$$\hat{K}(s,u) = \hat{\alpha}s^2 + \hat{\lambda}u^2, \quad \hat{\alpha} = \int_X \pi(dx)\,\alpha(x), \quad \hat{\lambda} = \int_X \pi(dx)\,\lambda(x).$$

Шукаємо відповідну оптимальну функцію Ляпунова V^ε у вигляді невід'ємної функції:

$$V^\varepsilon(s,x,t) = C_\varepsilon(x,t)\,s^2,$$

де

$$C_\varepsilon(x,t) = C(x) + \varepsilon C_1(x,t),$$

$C(x)$, $C_1(x,t)$ — обмежені додатно означені функції.

Тут

$$\hat{V}_0(s) = \hat{C}s^2, \qquad \hat{C} = \int_X \pi(dx)\,C(x). \tag{55}$$

Оператори L_u^ε та $\hat{L}_u$ мають вигляд

$$L_u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}Q + [\mu(x)s + \mu_1(x)u_\varepsilon]\frac{d}{ds} + \frac{1}{2}[\sigma(x)s + \sigma_1(x)u_\varepsilon]^2\frac{d^2}{ds^2},$$

$$\hat{L}_u = [\hat{\mu} s + \hat{\mu}_1 u]\frac{d}{ds} + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}(x) s + \hat{\sigma}_1 u]^2 \frac{d^2}{ds^2},$$

де

$$\hat{\mu} = \int_X \pi(dx)\,\mu(x), \quad \hat{\mu}_1 = \int_X \pi(dx)\,\mu_1(x),$$

$$\hat{\sigma} = \int_X \pi(dx)\,\sigma(x), \quad \hat{\sigma}_1 = \int_X \pi(dx)\,\sigma_1(x).$$

Рівняння Беллмана набирає вигляду

$$\min_u [(\hat{\mu} s + \hat{\mu}_1 u)\frac{d}{ds}\hat{V}_0(s) + \frac{1}{2}(\hat{\sigma} s + \hat{\sigma}_1 u)^2 \frac{d^2}{ds^2}\hat{V}_0(s) + Q\hat{V}_0(s) + \hat{\alpha} s^2 + \lambda u^2] = 0.$$

Оскільки $Q\hat{V}_0(s) = 0$, то для оптимального керування $\hat{u}_0$ маємо рівняння

$$\hat{\mu} s \frac{d}{ds}\hat{V}_0 + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 s^2 \frac{d^2}{ds^2}\hat{V}_0 + \hat{\alpha} s^2 = -\hat{u}_0[\hat{\mu}_1 \frac{d}{ds}\hat{V}_0 + \hat{\sigma}\hat{\sigma}_1 s \frac{d^2}{ds^2}\hat{V}_0] - \hat{u}_0^2[\frac{1}{2}\hat{\sigma}_1^2 \frac{d^2}{ds^2}\hat{V}_0 + \hat{\lambda}]. \tag{56}$$

Тоді функція $\hat{u}_0$ має вигляд

$$\hat{u}_0 = -\frac{[2\hat{\mu}_1 \hat{C} + 2\hat{\sigma}\hat{\sigma}_1 \hat{C}]s}{\hat{\lambda} + \hat{\sigma}_1^2 \hat{C}}. \tag{57}$$

Оптимальне керування $\hat{u}_0$ лінійне відносно s в (57), якщо $\hat{V}_0(s)$ задається формулою (55). Із (56) та (57) отримуємо для знаходження $\hat{C}$, а отже, і $\hat{V}_0(s)$, рівняння

$$[2\hat{\mu}\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}^2\hat{\sigma}_1^2 - 4\hat{\mu}_1 - 4\hat{\sigma}\hat{\sigma}_1]\hat{C}^2 + [2\hat{\mu}\hat{\lambda} + \hat{\sigma}^2\lambda + \hat{\alpha}\hat{\sigma}_1^2]\hat{C} + \hat{\alpha}\lambda = 0. \tag{58}$$

Нехай $\hat{A}$ позначає число в квадратних дужках при $\hat{C}^2$, а $\hat{B}$ — при $\hat{C}$. Тоді рівняння (58) має розв'язок, якщо

$$\hat{B}^2 - 4\hat{A}\hat{\alpha}\hat{\lambda} \geq 0. \tag{59}$$

Додатним розв'язком рівняння (57) є наступний:

$$\hat{C} = \frac{-\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 - 4\hat{A}\hat{\alpha}\hat{\lambda}}}{2\hat{A}}. \tag{60}$$

Отже, з теореми 2 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. *За умови* (59), *коли* $\hat{C}$ *визначається рівністю* (60), *керування* $\hat{u}_0(S)$ *в* (57) *надає мінімуму функціоналу*

$$\hat{G}_0^{s,x}(\hat{u}) := \int_0^\infty M_x[\hat{\alpha}(\hat{S}(t))^2 + \hat{\lambda}\hat{u}^2(\hat{S}(t))]dt,$$

де $\hat{S}(t)$ *є розв'язком усередненого рівняння*

$$d\hat{S}(t) = [\hat{\mu}\hat{S}(t) + \hat{\mu}_1 \hat{u}(\hat{S}(t))]dt + [\hat{\sigma}\hat{S}(t) + \hat{\sigma}\hat{u}(\hat{S}(t))]dw(t).$$

Наслідок 2. *Керування* $\hat{u}_0(s)$ *в* (57) *надає при достатньо малих та фіксованих* $\varepsilon > 0$ *мінімуму функціоналу*

$$G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon) = \int_0^\infty M_x[\alpha_\varepsilon(x(t/\varepsilon))S_\varepsilon^2(t) + \lambda_\varepsilon(x(t/\varepsilon))u_\varepsilon^2(S_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))]dt. \tag{61}$$

7. Керовані фінансові стохастичні моделі в схемі усереднення. Сукупність рівнянь (53) є моделлю керованих динамік вартостей $S_\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$, різних по ε акцій, з коефіцієнтами росту $\mu(x(t/\varepsilon))$ та мінливості $\sigma(x(t/\varepsilon)) > 0$, з лінійним керуванням u_ε, пропорційним відповідно $\mu_1(x(t/\varepsilon))$ та $\sigma_1(x(t/\varepsilon))$. Наявність додаткового, окрім $w(t)$, джерела випадковості $x(t/\varepsilon)$ свідчить про те, що даний ринок цінних паперів є неповним.

Тому природно виникає проблема оптимальної стабілізації даного пакету вартостей акцій $S_\varepsilon(t)$ в (53) в умовах неповного ринку за даним критерієм якості

$$K_\varepsilon(s, u, x, t) \;=\; \alpha_\varepsilon(x)s^2 + \lambda_\varepsilon(x)u_\varepsilon^2,$$

де α_ε та λ_ε визначені в (54).

Із результатів, викладених у п.6, випливає, що за оптимальну функцію Ляпунова $\hat{V}_0(s)$ слід взяти функцію

$$\hat{V}_0(s) = \hat{C}s^2,$$

де C визначена в (60).

Тоді оптимальне керування $\hat{u}_0$ вартостей акцій $S_\varepsilon(t)$ в (55) в умовах неповного ринку визначається за формулою (57) і надає при достатньо малих та фіксованих $\varepsilon > 0$ мінімуму функціоналу якості $G_\varepsilon^{s,x}(u_\varepsilon)$ в (61).

На закінчення зауважимо, що керування марковськими системами та системами стохастичних диференціальних рівнянь розглядалось у роботах [3, 7] та [4] відповідно; проблеми керування випадковими еволюціями — у роботі [8].

1. *Королюк В. С, Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
2. *Красовский Н. Н.* Проблема стабилизации управляемых движений / Дополнение к книге И. Г. Малкина „Теория устойчивости движений". – М.: Наука, 1966. – 162 с.
3. *Kushner H.* Stochastic stability and control. – New York: Acad. Press, 1967. – 252 p.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. – 368 с.
5. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В. С. Королюка. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
6. *Свіщук А. В., Бурдейний А. Г.* Стійкість еволюційних стохастичних систем та її застосування у фінансовій математиці // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №10. – С. 1386–1401.
7. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Там же. – 1991. – **43**, №12. – С. 1176–1181.
8. *Swishchuk A. V.* Control of evolutionary stochastic systems // Trans. 12^{th} Prague Conf. (August 29 – Sept. 2, 1994). – Prague: Acad. Sci. Czech. Rep., 1994. – P. 235 – 238.

Одержано 26.11.96