УДК 517.968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА. I

A new system of digitization of the Fredholm integral equations of the first kind with linear compact operators A and free terms from the set Range $(A(A^*A)^\nu)$, $\nu > 1/2$, is constructed. The approach suggested enables one to obtain the optimal order of an error on classes of equations of this sort by using considerably smaller body of discrete information than in the case of standard schemes.

Побудовано нову схему дискретизації інтегральних рівнянь Фредгольма I роду з лінійними компактними операторами A та вільними членами з множини Range $(A(A^*A)^\nu)$, $\nu > 1/2$. Запропонований підхід дозволяє одержати на класах таких рівнянь оптимальний порядок похибки, використовуючи при цьому значно меншу кількість дискретної інформації, ніж при стандартних схемах.

В настоящей работе изучается информационная сложность некоторых классов некорректных задач. Следуя [1], под информационной сложностью задачи будем понимать минимальный объем дискретной информации в виде значений непрерывных функционалов, определенных над исходными данными задачи, а также минимальное число элементарных операций (э. о.) над этими функционалами, требуемое для нахождения решения задачи с заданной точностью. При этом к э. о. относим четыре простейшие арифметические операции и логическую операцию сравнения с нулем. В настоящее время имеется значительное количество работ, посвященных вычислению величин, в той или иной мере характеризующих сложность различного рода задач. Наиболее изучен случай восстановления произвольного элемента f из некоторого множества по информации, снятой непосредственно с самого элемента f. Примерами такого рода задач могут служить задачи восстановления элементов различных функциональных компактов. Несомненный интерес вызывает случай, когда дискретная информация может быть снята не с искомого элемента, а с коэффициентов исследуемой задачи. Это, например, задача восстановления элемента f, удовлетворяющего соотношению

$$Ax = f, \tag{1}$$

с помощью информации об операторе A и элементе x. В [2, 3] исследовалась краевая задача Дирихле для эллиптического уравнения в единичном круге, решение которой представимо в виде свертки ядра Пуассона с граничной функцией задачи. В последнее время появились работы, посвященные исследованию сложности операторных уравнений (1), где x — искомый элемент, а A и f — исходные коэффициенты задачи. Заметим, что такого рода задача может рассматриваться как обратная к предыдущей. Для широких классов операторных уравнений II рода (случай, когда оператор A уравнения (1) представим в виде суммы единичного и компактного операторов) подобные исследования проводились С. В. Переверзевым и его учениками. Подробная информация об этом содержится в монографии [4]. В то же время для уравнений I рода (когда оператор A в (1) компактный) вопрос об оптимизации объема используемой дискретной информации рассматривался только в [5 – 7]. В целом же проблема сложности некорректных задач остается открытой. Более того, в [8] высказывалось предположение, что для уравнений I рода задача об информационной сложности не может быть поставлена вообще. В обзоре [9] Х. Вожьняковский, комментируя это предположение, делает замечание о необходимости корректной постановки подобной задачи. Таким образом, настоящая статья, содержащая первые точные порядковые оценки информационной сложности для некоторых классов уравнений I рода, является также ответом на последнее замечание.

1. Приведем некоторые известные факты и определения. Пусть X — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порождаемой им нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. *Пусть* X^r, $r = 1, 2, \ldots$, *— линейное подпространство* X, *снабженное нормой*

$$\|g\|_r = \|g\|_{X^r} := \|g\| + \sum_{j=1}^{r} \|D_j g\|,$$

где D_j *— некоторые линейные операторы, действующие из* X^r *в* X, *и такое, что для некоторого ортонормированного базиса* $E = \{e\}_{k=1}^{\infty}$ *пространства* X *и любых* $m = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение* $\|I - P_m\|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r}$, *где* I *— тождественный оператор, постоянная* c_r *не зависит от* m, *а*

$$P_m g = \sum_{k=1}^{m} e_k (e_k, g)$$

— ортопроектор на линейную оболочку первых m *элементов базиса* E.

Введем в рассмотрение классы линейных операторов

$$\mathcal{H}_\gamma = \{A : \|A\|_{X \to X} \le \gamma_1\},$$

$$\mathcal{H}_\gamma^{r,s} = \{A : \|A\|_{X \to X^r} \le \gamma_1,\ \|A^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_2\},$$

$$\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s} = \{A : A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s},\ \|(D_j A)^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_{j+2},\ j = \overline{1, r}\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r+2}),$$

где A^* — такой оператор, что $(f, Ag) = (A^* f, g)$ для любых $f, g \in X$. Для иллюстрации условий, определяющих классы $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$, рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 h(t, \tau) x(\tau) d\tau \tag{2}$$

в гильбертовом пространстве L_2 функций, суммируемых в квадрате на (0, 1) с обычной нормой $\|f\|_{L_2}$. В качестве пространства X^r рассмотрим соболевское пространство L_2^r функций f, у которых производные $d^{r-1} f / dt^{r-1}$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$, а $d^r f / dt^r \in L_2$, причем

$$\|f\|_{L_2^r} = \|f\|_{L_2} + \sum_{j=1}^{r} \left\| d^j f / dt^j \right\|_{L_2}.$$

Примерами базиса могут служить: ортонормированная система функций Хаара — в случае малой гладкости ($r = 1$), подпространство тригонометрических многочленов — в случае периодичности функций — коэффициентов $h(t, \tau)$ и $f(t)$ уравнения (1) и в общем случае — ортонормированная система полиномов

Лежандра, рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$. Известно, что для всех ортопроекторов P_m, соответствующих этим системам, справедливонеравенство $\|I - P_m\|_{L_2^r \to L_2} \le c_r m^{-r}$. Это означает, что для $X = L_2$, $X^r = L_2^r$ и $D_j = d^j f / dt^j$ выполнены все условия, определяющие X^r. Если ядро $h(t, \tau)$ интегрального оператора (2) имеет частные производные и

$$\sum_{j=0}^{r} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^j h(t, \tau)}{\partial t^j} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma_1,$$

$$\sum_{i=0}^{s} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^i h(t, \tau)}{\partial \tau^i} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma_2, \tag{3}$$

то, как легко проверить, $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ при $X = L_2$, $X^r = L_2^r$ и $X^s = L_2^s$. Класс операторов (2), удовлетворяющих условиям (3), обозначим $\mathcal{H}_{\gamma,2}^{r,s}$. Предположим теперь, что для операторов (2), кроме (3), выполняются также соотношения

$$\sum_{i=0}^{s} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^{i+j} h(t, \tau)}{\partial t^j \partial t^i} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma_{i+2}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Класс таких операторов обозначим через $\overline{\mathcal{H}}_{\gamma,2}^{r,s}$. Очевидны включения $\mathcal{H}_{\gamma,2}^{r,s} \subset \subset \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $\overline{\mathcal{H}}_{\gamma,2}^{r,s} \subset \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\mathcal{H}}_{\gamma,2}^{r,s} \subset \mathcal{H}_{\gamma,2}^{r,s}$.

Рассмотрим задачу оптимальной дискретизации уравнений I рода (1) с компактными линейными операторами A из $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ или $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ и $f \in \mathrm{Range}\,(A)$. Будем считать, что вместо f нам задано некоторое его приближение $f_\delta \in X_{\delta,f}$, где $X_{\delta,f}$ — шар с центром в f радиуса δ в метрике пространства X, а δ — малое положительное число, которое обычно известно.

В силу компактности оператора A задача нахождения решения уравнения (1) не является корректной в смысле Адамара и для построения устойчивого приближенного решения (1) необходима регуляризация. Под методом регуляризации (регуляризатором) принято понимать [10, с. 55; 11, с. 7] такое семейство операторов $R_\alpha = R_\alpha(A) \colon X \to X$, зависящих от параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ и оператора A, что для любого $f \in \mathrm{Range}\,(A)$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f_\delta \in X_{\delta,f}} \inf_{u \in A^{-1} f} \| u - R_\alpha(A) f_\delta \| = 0,$$

где $A^{-1} f$ — полный прообраз элемента f, а $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Множество всех регуляризаторов обозначим $\mathcal{R}$. Следуя [12], рассмотрим подмножество $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ регуляризаторов, представимых в виде функции от оператора уравнения (1). Пусть $\mathcal{G} = \{ g_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \}$ — параметрическое семейство функций, измеримых по Борелю на отрезке $[0, \gamma_1^2]$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \le \lambda \le \gamma_1^2} \lambda^p |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_p \alpha^p, \quad 0 \le p \le p_*, \tag{4}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \gamma_1^2} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{5}$$

где p_*, χ_p и χ_* — некоторые не зависящие от α положительные константы. Пусть x_0 — наименьшее по норме в X решение (1). Тогда в качестве приближения к x_0 примем элемент $x_\alpha = R_\alpha(A) f_\delta$, где регуляризатор $R_\alpha(A) \in \tilde{\mathcal{R}}$ будет задаваться соотношением

$$R_\alpha = R_\alpha(A) := g_\alpha(A^*A)A^*. \tag{6}$$

Пример. Иллюстрацией к описанной схеме регуляризации может служить обобщенный метод Тихонова [5]. Пусть $q \geq -1/2$. Приближенное решение x_α будем определять из уравнения II рода

$$(\alpha^{q+1} I + (A^*A)^{q+1}) x_\alpha = (A^*A)^q A^* f_\delta. \tag{7}$$

Это метод вида (6) с функцией $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q / (\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})$, для которой выполнены условия (4), (5) при $p_* = q+1$. В случае $q = 0$ получаем обычный метод Тихонова.

Поскольку нахождение элемента x_α возможно, вообще говоря, лишь приближенно, то возникает необходимость применения той или иной схемы дискретизации уравнения (1). Вопросы, связанные с точностью приближенного решения (1) и количеством используемой при этом дискретной информации, традиционно рассматриваются для уравнений (1) с решениями из множества

$$M_{p,\rho}(A) := \left\{ u \colon u = |A|^p v,\ v \in X_{\rho,0} \right\}, \qquad |A| = (A^*A)^{1/2}.$$

Известно, что если

$$f \in AM_{p,\rho}(A) := \left\{ g \colon g = Au,\ u \in M_{p,\rho}(A) \right\},$$

то решение уравнения (1) x_0 с минимальной нормой будет принадлежать множеству элементов $M_{p,\rho}(A)$, а гарантированная точность восстановления x_0 при фиксированных p и δ не может быть выше по порядку, чем $O\left(\delta^{p/(p+1)}\right)$, т. е.

$$\inf_{R_\alpha \in \mathcal{R}} \ \sup_{\substack{f = Ax_0 \\ x_0 \in M_{p,\rho}(A)}} \ \inf_{f_\delta \in X_{\delta, f}} \| x_0 - R_\alpha(A) f_\delta \| \asymp \delta^{p/(p+1)}, \tag{8}$$

причем для достижения указанного порядка точности параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ следует выбирать из условия $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$. Здесь, как обычно, запись $a(u) \asymp b(u)$ означает, что найдутся такие константы c' и c'', что для всех u из области определения $a(u)$ и $b(u)$ выполняется соотношение $c'a(u) \leq$ $\leq b(u) \leq c''a(u)$. Кроме того, для упрощения выкладок будем одним символом c обозначать различные положительные константы, зависящие только от постоянных, входящих в определения множеств $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$, $\mathcal{G}$, $M_{p,\rho}(A)$ и пространства X^r.

В дальнейшем будем рассматривать уравнения (1) со свободными членами f из множества $AM_{p,\rho}(A)$, причем в настоящей статье ограничимся случаем $p > 1$.

2. Пусть $B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots \}$ — произвольный ортонормированный базис гильбертова пространства X, а $P_{B,m}$ — ортопроектор на $\operatorname{span}\{ b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_m \}$, т. е.

$$P_{B,m}g = \sum_{i=1}^{m} (b_i, g) b_i.$$

Тогда произвольный оператор $A \in \mathcal{H}_\gamma$ может быть представлен с помощью бесконечной матрицы в следующем виде:

$$Ag = \sum_{i,j=1}^{\infty} (b_i, Ab_j)(b_j, g) b_i.$$

Каждому скалярному произведению (b_i, Ab_j) поставим в соответствие точку (i, j) множества $[1, \infty) \times [1, \infty)$ координатной плоскости, которую будем рассматривать в качестве номера функционала (b_i, Ab_j). Номером скалярного произведения (b_j, g) будем считать число j. Если теперь каждому множеству $\Omega \subset [1, \infty) \times [1, \infty)$ поставить в соответствие выражения

$$A_{\Omega, B}g = \sum_{(i,j) \in \Omega} (b_i, Ab_j)(b_j, g) b,$$

$$P_{B, k_0} f_\delta = \sum_{k=1}^{k_0} (b_k, f_\delta) b_k, \quad k_0 = \max\{i, j \colon (i, j) \in \Omega\},$$

то отсюда видно, что с помощью различных наборов Ω и B можно определить всевозможные проекционные схемы дискретизации уравнения (1), использующие в качестве дискретной информации скалярные произведения

$$(b_i, Ab_j), \ (b_k, f_\delta), \ (i, j) \in \Omega, \ k = \overline{1, k_0}, \tag{9}$$

называемые также галеркинской информацией. В дальнейшем под проекционной схемой дискретизации (1) будем понимать пару (Ω, B) элементов Ω и B. Традиционный подход к реализации проекционной схемы связан с методом Галеркина и состоит (см. [5]) в том, что в качестве Ω берется прямоугольник $\Pi_{m,l} = [1, m] \times [1, l]$, а вместо уравнения (1) рассматривается его дискретный аналог

$$P_{B,m} A P_{B,l} x = P_{B,m} f_\delta. \tag{10}$$

Эффективность традиционного подхода (10) к дискретизации уравнений (1) позволяет оценить следующая теорема.

Теорема А[5]. *Оптимальный порядок погрешности* (8) *на классе уравнений* (1) *с операторами* A *из* $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ *или* $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ *и* $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p > 1$, *обеспечивается в рамках схемы* $(\Pi_{m,l}, B)$ *и произвольного метода регуляризации* $R_\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}$ *при* $p \le 2p_*$, $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$ *и* m, l *таких, что*

$$\| I - P_{B,m} \|_{X^r \to X}^{\min\{p, 2\}} \asymp \| I - P_{B,l} \|_{X^s \to X} \asymp \delta^{p/(p+1)}.$$

При изучении информационной сложности операторных уравнений естественным образом встает вопрос об оптимальности галеркинского подхода к дискретизации в смысле объема используемой информации (9). Другими словами, является ли выбор прямоугольника $\Pi_{m,l}$ наиболее экономичным среди возможных множеств Ω координатной плоскости ? Заметим, что в случае уравнений II рода на этот вопрос был получен отрицательный ответ. Более того, в [13] установлено, что оптимальный в смысле объема информации (9) порядок сложности для широких классов уравнений II рода реализуется в рамках проекционной схемы, использующей галеркинские функционалы с номерами из некоторой области Ω, принадлежащей гиперболическому кресту. Ниже предложена новая проекционная схема, также использующая идею гиперболического креста и являющаяся не только более экономичной по сравнению с галеркинской, но и оптимальной по сложности для многих классов уравнений (1).

Определение 2. *Под проекционным методом решения уравнения* (1) *будем понимать произвольное правило* $\varphi = \varphi(R_\alpha, \Omega, B)$, $R_\alpha \in \mathcal{R}$, *согласно которому набору функционалов* (9) *в качестве приближенного решения* (1) *сопоставляется элемент*

$$x_{\text{disc}} = x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, B, A, f_\delta) := R_\alpha(A_{\Omega, B}) f_\delta,$$

представимый в виде многочлена

$$x_{\text{disc}} = \sum_{k=1}^{L} \psi_k b_k, \qquad L < \infty.$$

При этом для вычисления коэффициентов ψ_k *разрешается выполнить лишь конечное число э. о.*

Таким образом, проекционный метод решения (1) можно представить в виде комбинации метода регуляризации R_α и проекционной схемы дискретизации (Ω, B). Обозначим через $\Phi(\mathcal{R}, \Omega, B)$ множество проекционных алгоритмов φ, использующих всевозможные $R_\alpha \in \mathcal{R}$ при фиксированных Ω и B. Множество всех алгоритмов из $\Phi(\mathcal{R}, \Omega, B)$, которые для построения x_{disc} требуют выполнения не более N э. о. над функционалами (9), обозначим через $\Phi_N(\mathcal{R}, \Omega, B)$.

Как обычно, под погрешностью алгоритма $\varphi(R_\alpha, \Omega, B)$ на классе $\mathcal{H}$ будем понимать величину

$$\mathcal{E}_{\delta, p}(\mathcal{H}, \varphi, \Omega, B) = \sup_{A \in \mathcal{H}} \sup_{f \in AM_{p,\rho}(A)} \sup_{f_\delta \in X_{\delta, f}} \| x_0 - x_{\text{disc}} \|.$$

Минимальный радиус галеркинской информации (9) на классе $\mathcal{H}$ определяется как

$$r_{N, \delta, p}(\mathcal{H}) = \inf_{B} \inf_{\substack{\Omega, \\ \operatorname{card}(\Omega) \le N}} \inf_{\varphi \in \Phi(\mathcal{R}, \Omega, B)} \mathcal{E}_{\delta, p}(\mathcal{H}, \varphi, \Omega, B).$$

Величина $r_{N, \delta, p}$ характеризует минимальную погрешность, которую можно гарантировать при использовании не более N галеркинских функционалов (9). Наконец, информационной сложностью проекционных методов решения (1) на классе $\mathcal{H}$ будем называть величину

$$C_{N, \delta, p}(\mathcal{H}) = \inf_{B} \inf_{\substack{\Omega, \\ \operatorname{card}(\Omega) \le N}} \inf_{\varphi \in \Phi_N(\mathcal{R}, \Omega, B)} \mathcal{E}_{\delta, p}(\mathcal{H}, \varphi, \Omega, B).$$

Очевидно, что при фиксированных N, δ и p для любых классов $\mathcal{H}$ выполняется соотношение

$$r_{N, \delta, p}(\mathcal{H}) \le C_{N, \delta, p}(\mathcal{H}). \tag{11}$$

Вернемся теперь к базису $E = \{e\}_{k=1}^{\infty}$, фигурирующему в определении пространства X^r. Обозначим через $\Gamma_n^{a,b}$ фигуру координатной плоскости следующего вида:

$$\Gamma_n^{a,b} = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k,$$

$$Q_0 = \{1\}\times[1, 2^{bn}], \quad Q_k = (2^{k-1}, 2^k]\times[1, 2^{bn-ak}], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b \geq a \geq 0$. Заметим, что правые верхние углы прямоугольников Q_k лежат на гиперболе $t^a\tau = 2^{bn}$, а сама фигура $\Gamma_n^{a,b}$ представляет собой квадрант так называемого ступенчатого гиперболического креста. В случае $a = 0$ множество $\Gamma_n^{a,b}$ вырождается в прямоугольник $\Pi_{2^n, 2^{bn}} = [1, 2^n] \times [1, 2^{bn}]$. Впервые фигура $\Gamma_n^{a,b}$ при $a = 1, b = 2$ была применена для решения уравнений (1) с операторами $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,r}$ в работе [7]. Однако, как увидим ниже, использование фиксированного множества $\Gamma_n^{1,2}$ при дискретизации широких классов уравнений (1) не позволяет реализовать оптимальные порядки величин $r_{N,\delta,p}$ и $C_{N,\delta,p}$.

Каждому оператору $A \in \mathcal{H}_\gamma$ поставим в соответствие оператор

$$A_n = A_{a,b,n} := \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{bn-ak}} + P_1 A P_{2^{bn}}. \tag{12}$$

Если $bn - ak$ не является целым числом, то под $P_{2^{bn-ak}}$ будем понимать $P_{[2^{bn-ak}]}$, где $[g]$ — целая часть g. Легко видеть, что для построения $A_{a,b,n}$ достаточно использовать только функционалы (e_i, Ae_j) с номерами (i, j) из $\Gamma_n^{a,b}$. В качестве приближенного решения $x_{\text{disc}} = x_{n,\alpha}$ уравнения (1) будем рассматривать элемент

$$x_{n,\alpha} = R_{n,\alpha} f_\delta, \quad R_{n,\alpha} = g_\alpha\left(A_{a,b,n}^* A_{a,b,n}\right) A_{a,b,n}^*, \tag{13}$$

где g_α — произвольная функция из $\mathcal{G}$. В силу формулы для суммы геометрической прогрессии имеем

$$\operatorname{card}\left(\Gamma_n^{a,b}\right) \asymp \begin{cases} 2^{(b-a+1)n}, & a < 1, \\ 2^{bn} n, & a = 1, \\ 2^{bn}, & a > 1. \end{cases} \tag{14}$$

Поскольку при $a = 0$ оператор A_n (12) преобразуется в галеркинский оператор $P_{2^n} A P_{2^{bn}}$, то традиционный подход к дискретизации $\left(\Pi_{m,l}, E\right)$ можно рассматривать как частный случай проекционной схемы $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$. В п. 4 будет продемонстрировано преимущество предлагаемой схемы по сравнению с галеркинской.

3. Для дальнейшего изложения приведем вспомогательные результаты. Пусть $A, \tilde{A}, B, \tilde{B} \in \mathcal{H}_\gamma$, $\tilde{A} = \tilde{A}^* \geq 0$, $\tilde{B} = \tilde{B}^* \geq 0$. При любых $p \geq 0$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедливы оценки [5; 11, с. 93, 95]

$$\left\| (I - P_m) |A|^p \right\|_{X \to X} \leq c \| A(I - P_m) \|_{X \to X}^{\min\{p,1\}}, \tag{15}$$

$$\left\| \tilde{A}^p - \tilde{B}^p \right\|_{X \to X} \le c \left\| \tilde{A} - \tilde{B} \right\|_{X \to X}^{\min\{p,1\}}, \tag{16}$$

$$\left\| |A|^p - |B|^p \right\|_{X \to X} \le c \| A - B \|_{X \to X}, \quad p > 1. \tag{17}$$

Лемма 1. *Для* $A_n = A_{a,b,n}$ *выполняется соотношение*

$$\left\| A^* A - A_n^* A_n \right\|_{X \to X} \le c(2^{-2rn} + 2^{-\xi n}),$$

где $\xi = bs - (as - d_1 r)_+$, $d_1 = 1$ *при* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ *и* $d_1 = 2$ *при* $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$, *а*

$$g_+ n = \begin{cases} 0, & g < 0, \\ \log_2 n, & g = 0, \\ gn, & g > 0. \end{cases}$$

Докажем лемму для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$. Случай $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ рассматривается аналогично. Заметим, что для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ и любых $m, l = 1, 2, \ldots$

$$\| (I - P_m) A \|_{X \to X} \le \gamma_1 c_r m^{-r}, \qquad \| A(I - P_l) \|_{X \to X} \le \gamma_2 c_s l^{-s},$$

$$\| A(I - P_l) \|_{X \to X^r} \le \left\| (I - P_l) A^* \right\|_{X \to X} + \sum_{j=1}^{r} \left\| (I - P_l)(D_j A)^* \right\|_{X \to X} \le \bar{\gamma} c_s l^{-s},$$

$$\bar{\gamma} = \sum_{j=0}^{r} \gamma_{j+2}.$$

Используя эти неравенства, получаем

$$\| (I - P_m) A (I - P_l) \|_{X \to X} \le \| I - P_m \|_{X^r \to X} \| A(I - P_l) \|_{X \to X^r} \le \bar{\gamma} c_r c_s m^{-r} l^{-s}. \tag{18}$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$\left\| A^* A - A_n^* A_n \right\|_{X \to X} \le \left\| A^* (I - P_{2^n})^2 A \right\|_{X \to X} + \left\| A^* P_{2^n} A - A_n^* A_n \right\|_{X \to X}. \tag{19}$$

Поскольку в силу определения A_n (12) справедливо разложение

$$A_n^* A_n = \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-ak}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-ak}} + P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}},$$

то

$$\left\| A^* P_{2^n} A - A_n^* A_n \right\|_{X \to X} \le \left\| A^* P_1 A - P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}} \right\|_{X \to X} + \sum_{k=1}^{n} \| G_k \|_{X \to X}, \tag{20}$$

$$G_k = A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A - P_{2^{bn-ak}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-ak}} =$$

$$= (I - P_{2^{bn-ak}}) A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A + P_{2^{bn-ak}} A^* (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A (I - P_{2^{bn-ak}}).$$

С учетом (18) находим

$$\|G_k\|_{X\to X} \le \left\|(I-P_{2^{bn-ak}})A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})AP_{2^{bn-ak}}\right\|_{X\to X} +$$

$$+\left\|P_{2^{bn-ak}}A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A(I-P_{2^{bn-ak}})\right\|_{X\to X} \le c2^{-bsn+k(as-2r)}. \tag{21}$$

Кроме того,

$$\left\|A^*P_1A-P_{2^{bn}}A^*P_1AP_{2^{bn}}\right\|_{X\to X} \le \left\|(I-P_{2^{bn}})A^*P_1A\right\|_{X\to X} +$$

$$+\left\|P_{2^{bn}}A^*P_1A(I-P_{2^{bn}})\right\|_{X\to X} \le \gamma_1\left\|(I-P_{2^{bn}})A^*\right\|_{X\to X} +$$

$$+\gamma_2\left\|A(I-P_{2^{bn}})\right\|_{X\to X} \le c\left\|A(I-P_{2^{bn}})\right\|_{X\to X} \le c2^{-bsn}. \tag{22}$$

Таким образом, в силу (20) – (22) имеем

$$\left\|A^*P_{2^n}A-A_n^*A_n\right\|_{X\to X} \le c2^{-bsn}\sum_{k=0}^{n}2^{-k(as-2r)},$$

откуда с учетом (18) и (19) получаем искомую оценку.

Лемма 2. *Для* $A_n=A_{a,b,n}$ *и любого* $q\ge 0$ *выполняется соотношение*

$$\left\|(P_{2^n}A-A_n)|A|^q\right\|_{X\to X} \le c2^{-\eta n},$$

где

$$\eta = bs(1+\min\{q,1\})-(as(1+\min\{q,1\})-d_2r)_+,$$

$$d_2=0 \quad при \quad A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s} \quad и \quad d_2=1 \quad при \quad A\in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}.$$

Доказательство. Пусть $A\in\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$. Поскольку

$$P_{2^n}A-A_n = \sum_{k=1}^{n}(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A(I-P_{2^{bn-ak}})+P_1A(I-P_{2^{bn}}),$$

то в силу (15) и (18)

$$\left\|(P_{2^n}A-A_n)|A|^q\right\|_{X\to X} \le \sum_{k=1}^{n}\left\|(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A(I-P_{2^{bn-ak}})\right\|_{X\to X}\times$$

$$\times\left\|(I-P_{2^{bn-ak}})|A|^q\right\|_{X\to X}+\left\|(P_1A(I-P_{2^{bn}})\right\|_{X\to X}\left\|(I-P_{2^{bn}})|A|^q\right\|_{X\to X} \le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{n}2^{-kr}(2^{-s(bn-ak)})^{1+\min\{q,1\}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы для $A\in\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$. В случае $A\in\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ доказательство проводится аналогично.

4. Оценку погрешности проекционной схемы дискретизации $\left(\Gamma_n^{a,b},E\right)$ на классе $\mathcal{H}_\gamma$ дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha\asymp\delta^{2/(p+1)}$. *Тогда на классе уравнений (1) с операторами* $A\in\mathcal{H}_\gamma$ *и* $f\in AM_{p,\rho}(A)$ *для проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b},E\right)$ *и произвольного регуляризатора из* $\tilde{\mathcal{R}}$ *справедлива оценка*

$$\| x_0 - x_{\mathrm{disc}} \| \le$$
$$\le c\left(\delta^{p/(p+1)} + \left\| |A|^p - |A_n|^p \right\|_{X\to X} + \delta^{-1/(p+1)} \left\| \left(P_{2^n} A - A_n\right) |A_n|^p \right\|_{X\to X}\right).$$

Доказательство. Пусть, как и в [5],

$$S_{n,\alpha} := I - R_{n,\alpha} A_n = I - g_\alpha\left(A_n^* A_n\right) A_n^* A_n.$$

Тогда из (1) и (13) для $x_{\mathrm{disc}} = x_{n,\alpha}$ находим

$$x_0 - x_{n,\alpha} = R_{n,\alpha}(f - f_\delta) + S_{n,\alpha} x_0 + R_{n,\alpha}(A_n - A) x_0. \tag{23}$$

Оценим теперь отдельно все три слагаемые из правой части (23):

1. Поскольку для любого линейного ограниченного оператора B из X в X в силу (5) и полярного разложения $B^* = |B| U^*$ [11, с. 35] справедлива оценка

$$\left\| g_\alpha(B^* B) B^* \right\|_{X\to X} \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{24}$$

то с учетом (13) находим

$$\left\| R_{n,\alpha}(f - f_\delta) \right\| \le c\alpha^{-1/2}\delta.$$

2. С помощью (4) получаем

$$\left\| S_{n,\alpha} x_0 \right\| \le \rho\left(\left\| S_{n,\alpha} |A_n|^p \right\|_{X\to X} + \left\| S_{n,\alpha} \right\|_{X\to X} \left\| |A|^p - |A_n|^p \right\|_{X\to X} \right) \le$$
$$\le c\left(\alpha^{p/2} + \left\| |A|^p - |A_n|^p \right\|_{X\to X}\right).$$

3. В силу определения A_n (12) справедливо соотношение $A_n^* P_{2^n} = A_n^*$, тогда

$$R_{n,\alpha}(A_n - A) x_0 = g_\alpha(A_n^* A_n)(A_n^* A_n - A_n^* P_{2^n} A) x_0 = R_{n,\alpha}(A_n - P_{2^n} A) x_0.$$

Таким образом, учитывая (5) и (24), для последнего слагаемого (23) имеем

$$\left\| R_{n,\alpha}(A_n - A) x_0 \right\| \le c\alpha^{-1/2} \left\| (A_n - P_{2^n} A) |A|^p \right\|_{X\to X}.$$

В силу условия теоремы $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$ получаем искомую оценку.

Следствие 1. *На классе уравнений* (1) *с операторами* $A \in \mathcal{H}_\gamma$ *и* $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p > 1$, *в рамках произвольного проекционного метода* $\varphi\left(R_\alpha, \Gamma_n^{a,b}, E\right)$, $R_\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}$, *для достижения оптимального порядка* (8) *достаточно выполнения следующих условий:*

(i) $\left\| |A|^p - |A_n|^p \right\|_{X\to X} \le c\delta^{p/(p+1)}$;

(ii) $\left\| \left(P_{2^n} A - A_n\right) |A|^p \right\|_{X\to X} \le c\delta$.

Укажем теперь значения величин a, b и n, доставляющие оптимальный порядок погрешности $\delta^{p/(p+1)}$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/(p+1)}$. *Порядок погрешности* (8) *на классе уравнений* (1), *где* $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$, $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p > 1$, *обеспечивается в рамках проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *и любого регуляризатора* $R_\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}$ *в случае, когда параметры* a, b *и* n *удовлетворяют следующим условиям:*

а) *для* $1<p\le 2$: $2^{-(p+1)rn}\asymp\delta$, $a=pr/2s$, $b=pr/s$;

б) *для* $2\le p\le 2p_*$: $2^{-2(p+1)rn/p}\asymp\delta$, $a=(3p-2)r/2ps$, $b=2r/s$.

Доказательство. Оценим прежде всего величину $\left\| |A|^p-|A_n|^p\right\|_{X\to X}$. При $1<p\le 2$ воспользуемся для этого соотношениями (17), (18) и леммой 2 ($q=0$, $\eta=pr$)

$$\left\| |A|^p-|A_n|^p\right\|_{X\to X}\le\left\|(A^*A)^{p/2}-(A^*P_{2^n}A)^{p/2}\right\|_{X\to X}+\left\|\left|P_{2^n}A\right|^p-|A_n|^p\right\|_{X\to X}\le$$

$$\le c\left(\left\|\left(I-P_{2^n}\right)A\right\|^p_{X\to X}+\left\|P_{2^n}A-A_n\right\|_{X\to X}\right)\le c2^{-prn}\asymp\delta^{p/(p+1)}.$$

В случае $p\ge 2$ применим оценку (16) и лемму 1 ($\xi=2r$)

$$\left\| |A|^p-|A_n|^p\right\|_{X\to X}\le\left\|(A^*A)^{p/2}-(A_n^*A_n)^{p/2}\right\|_{X\to X}\le$$

$$\le c\left\|A^*A-A_n^*A_n\right\|_{X\to X}\le c2^{-2rn}\asymp\delta^{p/(p+1)}.$$

Таким образом, установлено, что соотношение (i) следствия 1 выполняется при любых $p\ge 1$.

Для проверки выполнимости условия (ii) достаточно вычислить

$$\eta=2bs-(2as-r)_+=\begin{cases}(p+1)r, & 1<p\le 2,\\ 2(p+1)r/p, & p\ge 2,\end{cases}$$

откуда в силу леммы 2 в условиях теоремы следует справедливость соотношения (ii). Тем самым согласно следствию 1 теорема доказана.

Замечание 1. Параметры a и b, задающие гиперболический крест $\Gamma_n^{a,b}$, зависят от гладкости двух видов: от дифференциальной гладкости, определяемой значениями r и s, и от „операторной гладкости", показателем которой является p. Такая зависимость параметров креста от гладкости отличает случай уравнений I рода от уравнений II рода, где, как и в классической теории приближения, параметры креста определяются лишь дифференциальной гладкостью.

Обозначим соответственно через $\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\mathcal{H},R_\alpha,\Gamma_n^{a,b},B\right)$ и $\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\mathcal{H},R_\alpha,\Pi_{m,l},B\right)$ число скалярных произведений вида (9), требуемое в рамках проекционных схем $\left(\Gamma_n^{a,b},B\right)$ и $\left(\Pi_{m,l},B\right)$ для обеспечения оптимального порядка точности (8) при применении регуляризатора R_α для приближенного решения любого уравнения (1) с оператором $A\in\mathcal{H}$, $f\in AM_{p,\rho}(A)$, $f_0\in X_{\delta,f}$. Для удобства изложения полученных результатов введем обозначение $POW_\delta(\psi)=\delta^{-\psi}$.

Следствие 2. *Пусть* R_α *— произвольный регуляризатор из* $\tilde{\mathcal{R}}$ *а параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме 2. Тогда при* $1<p\le 2$

$$\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s},R_\alpha,\Gamma_n^{a,b},E\right)\asymp\begin{cases}POW_\delta\left(\dfrac{pr+2s}{2(p+1)rs}\right), & r/s<2/p,\\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right)\log(\delta^{-1}), & r/s=2/p,\\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right), & r/s>2/p,\end{cases}$$

а при $2 \le p \le 2p_*$

$$\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r,s}, R_\alpha, \Gamma_n^{a,b}, E\right) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} POW_\delta\left(\dfrac{(p+2)r+2ps}{4(p+1)rs}\right), & r/s < 2p/(3p-2), \\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right)\log(\delta^{-1}), & r/s = 2p/(3p-2), \\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right), & r/s > 2p/(3p-2). \end{cases}$$

Аналогично теореме 2 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $a \asymp \delta^{2/(p+1)}$. *Порядок погрешности* (8) *на классе уравнений* (1), *где* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p \ge 2$, *обеспечивается в рамках проекционной схемы* $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ *и любого регуляризатора* $R_\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}$ *в случае, когда* $2^{-2(p+1)rn/p} \asymp \delta$, $a = (p-1)r/ps$, $b = 2r/s$.

***Следствие* 3.** *Пусть* R_α — *произвольный регуляризатор из* $\tilde{\mathcal{R}}$, *а параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 3. *Тогда при* $2 \le p \le 2p_*$

$$\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, R_\alpha, \Gamma_n^{a,b}, E\right) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} POW_\delta\left(\dfrac{(p+1)r+ps}{2(p+1)rs}\right), & r/s < p/(p-1), \\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right)\log(\delta^{-1}), & r/s = p/(p-1), \\ POW_\delta\left(\dfrac{p}{(p+1)s}\right), & r/s > p/(p-1). \end{cases}$$

Приведенные в следствиях 2, 3 оценки непосредственно вытекают из теорем 2, 3 и соотношения (14). В то же время для традиционной проекционной схемы дискретизации $\left(\Pi_{m,l}, B\right)$ при $B = E$ в силу теоремы A получаем следующие оценки:

$$\operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}, R_\alpha, \Pi_{m,l}, E\right) \asymp \operatorname{Card}_{\delta,p}\left(\overline{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r,s}, R_\alpha, \Pi_{m,l}, E\right) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} POW_\delta\left(\dfrac{pr+s}{(p+1)rs}\right), & 1 \le p \le 2, \\ POW_\delta\left(\dfrac{p(2r+s)}{2(p+1)rs}\right), & 2 \le p \le 2p_*. \end{cases}$$

***Замечание* 2.** Сравнение найденных выше оценок величины $\operatorname{Card}_{\delta,p}$ для проекционных схем $\left(\Gamma_n^{a,b}, E\right)$ и $\left(\Pi_{m,l}, B\right)$ показывает, что с точки зрения объема дискретной информации (9), требуемой для достижения на классах $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $p \ge 2$, и $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$, $p > 1$, оптимального порядка точности (8), предлагаемая схема дискретизации экономичнее традиционного подхода по порядку величины δ при любых $r, s > 0$.

***Замечание* 3.** С помощью построенной в [7] схемы дискретизации $\left(\Gamma_n^{1,2}, E\right)$, $2^{-2rn}n \asymp \delta^{p/(p+1)}$ при решении уравнений (1), где $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,r}$, $f \in AM_{p,\rho}(A)$, $p \ge 2$, получаем

$$\operatorname{Card}_{\delta,\,p}\left(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,\,r},\, R_{\alpha},\, \Gamma_{n}^{1,\,2},\, E\right) \asymp \delta^{-1/r}\log^{1+1/r}(\delta^{-1}).$$

Эта оценка лучше по порядку соответствующего результата

$$O\left(POW_{\delta}\left(\frac{3p}{2(p+1)r}\right)\right)$$

для галеркинской схемы $\left(\Pi_{m,l}, E\right)$, но, в свою очередь, существенно уступает величине

$$O\left(POW_{\delta}\left(\frac{2p+1}{2(p+1)r}\right)\right)$$

(см. следствие 3) для предлагаемой нами схемы $\left(\Gamma_{n}^{a,\,b}, E\right)$, где параметры a и b подобраны с учетом оптимальности $\operatorname{Card}_{\delta,\,p}$.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. *Корнейчук Н. П.* О приближении сверток периодических функций // Вопр. анализа и приближений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 76–80.
3. *Shabozov M.* On the recovery of solutions of Neuman's boundary-value problem // East J. Approx. – 1996. – **2,** № 3. – P. 369 – 379.
4. *Pereverzev S.* Optimization of methods for approximate solution of operator equations. – New York: Nova, 1996. – 350 p.
5. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving Ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57.** – P. 63 – 70.
6. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of the Ritz-Galerkin method for solving Ill-posed problems // Учен. зап. Тарт. ун-та. – 1989. – Вип. 868. – С. 3 – 17.
7. *Pereverzev S.* Optimization of projection methods for solving Ill-posed problems // Computing. – 1995. – **55,** № 2. – P. 113 – 124.
8. *Werschulz A. G.* What is the complexity of Ill-posed problems? – New York: Columbia Univ., 1985. – 352 p.
9. *Wozniakowski H.* Information based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1.** – P. 319 – 380.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
11. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 182 с.
12. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1967. – **7,** № 3. – С. 672 – 677.
13. *Pereverzev S., Sharipov C.* Information complexity of equations of second kind with compact operators in Hibert sapace // J. Complexity. – 1992. – **8.** – P. 176 – 202.

Получено 23.12.96