УДК 517.5

**П. М. Тамразов** (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
**А. А. Сарана** (Житомир. пед. ин-т)

# КОНТУРНО-ТЕЛЕСНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ *

We prove contour-solid theorems for the holomorphic functions defined in finely open sets of the complex plane.

Доведено контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій, заданих на тонко відкритих множинах комплексної площини.

**1. Введение.** В работах [1, 2] установлены усиленные контурно-телесные теоремы соответственно для субгармонических и голоморфных функций в открытых множествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В [3, 4] получены аналоги результатов работы [1] для тонко гипогармонических функций в тонко открытых множествах на $\mathbb{C}$, а в [5] приведены некоторые аналоги результатов работы [2] для тонко голоморфных функций в тонко открытых множествах на $\mathbb{C}$. В настоящей работе дается уточнение, усиление и обобщение результатов работы [5]. При этом используются методы, разработанные в [1, 2].

**2. Основные условия и обозначения.** Если множество $E$ содержится в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, используем следующие обозначения (см. [4]): $CE := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, $b(E)$ — база множества $E$ в $\overline{\mathbb{C}}$, $\tilde{E} := E \bigcup b(E)$ — тонкое замыкание множества $E$ в $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\partial}_f E$ — тонкая граница множества $E$ в $\overline{\mathbb{C}}$, $\partial_f E := \mathbb{C} \bigcap \overline{\partial}_f E$, $(E)_i := E \setminus b(E)$ — множество всех тонко изолированных точек множества $E$, $(E)_l := E \setminus (E)_i$.

Для любого тонко открытого множества $G$ выполнены соотношения $(G)_i = \varnothing$, $b(G) = \tilde{G}$ [6, с. 29].

Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — тонко открытое множество. Функция $\varphi\colon D \to \mathbb{C}$ называется *тонко голоморфной*, если каждая точка $z \in D$ имеет тонкую окрестность $V \subset D$, компактную в $\overline{\mathbb{C}}$ (в стандартной топологии) и такую, что сужение функции $\varphi$ на множество $V$ равно сужению на $V$ некоторой функции, голоморфной в открытой окрестности множества $V$ [7].

Функция $\varphi$, определенная в открытом множестве $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, является тонко голоморфной тогда и только тогда, когда она голоморфна в $D$ [8, с. 126].

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $\mu\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для каждой из которых множество $I_\mu = \{x\colon \mu(x) > 0\}$ связно и сужение функции $\log \mu(x)$ на $I_\mu$ вогнуто относительно $\log x$. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — класс всех $\mu \in \mathfrak{M}$, для которых множество $I_\mu$ не пусто. Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ через $x_\mu^-$ и $x_\mu^+$ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка $I_\mu$. Очевидно, $0 \le x_\mu^- \le x_\mu^+ \le +\infty$. Существуют пределы

$$\mu_0 := \lim_{x \to 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \qquad \mu_\infty := \lim_{x \to +\infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x}$$

и выполняются соотношения

$$\mu_0 \ge \mu_\infty, \qquad \mu_0 > -\infty, \qquad \mu_\infty < +\infty, \tag{1}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № UB 4000), Международного научного фонда и Украины (грант № UB 4200) и INTAS (грант № 94-1474).

а если $x_\mu^- > 0$ (аналогично $x_\mu^+ < +\infty$), то положим $\mu_0 = +\infty$ (соответственно $\mu_\infty = -\infty$). Для $\mu \equiv 0$ в качестве $\mu_0$ и $\mu_\infty$ можно использовать произвольные конечные числа, удовлетворяющие условиям (1). При $\mu_0 < +\infty$ определим целое $m_0$ условиями $m_0 - 1 < \mu_0 \le m_0$, а при $\mu_\infty > -\infty$ — целое $m_\infty$ условиями $m_\infty \le \mu_\infty < m_\infty + 1$.

Классы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ рассмотрены в [2]. Когда $\mu(\cdot)$ пробегает класс $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}^*$, функция $\log\mu(\cdot)$ пробегает соответственно класс $L$ или $L^*$ из работ [1, 4].

Пусть $G$ — тонко открытое множество в $\mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{C}\setminus G$. Для функции $f$: $G \to \mathbb{C}$ введем величины

$$f_{a,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to a,\ z\in G}} \dfrac{\log|f(z)|}{|\log|z-a||} & \text{при } a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{при } a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to \infty,\ z\in G}} \dfrac{\log|f(z)|}{\log|z|} & \text{при } \infty \in \overline{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при } \infty \notin \overline{\partial}_f G. \end{cases}$$

**3. Локальные контурно-телесные результаты.** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *— фиксированная точка;* $G \subset \mathbb{C}\setminus\{a\}$ *— тонко открытое множество;* $\mu \in \mathfrak{M}$; $f$: $(\tilde{G}\setminus\{a\})\cap\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* $G$ *и удовлетворяющая условию*

$$|f(z)| \le \mu(|z-a|) \qquad \forall\, z \in (\partial_f G)\setminus\{a\}. \tag{2}$$

*Положим* $z_1 = a$, $z_2 = \infty$. *Предположим, что при каждом* $s = 1, 2$ (*независимо друг от друга*) *для каждой тонко связной компоненты* $G_j$ *множества* $G$, *для которой* $z_s \in b(G_j)$ $(= \tilde{G}_j)$, *выполняется неравенство*

$$f_{z_s, G_j} < +\infty, \tag{3}$$

*а если* $z_s \notin b(CG_j)$, *то предположим также, что при* $z_s = a$ *верно*

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0 - 1}) \quad (\zeta \to a), \tag{4}$$

*а при* $z_s = \infty$

$$\mu_\infty > -\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty + 1}) \quad (\zeta \to \infty). \tag{5}$$

*Тогда выполняется одна и только одна из двух возможностей: либо верно соотношение*

$$|f(\zeta)| \le \mu(|\zeta - a|) \qquad \forall\, \zeta \in G, \tag{6}$$

*либо имеет место следующий исключительный случай:* $G = \mathbb{C}\setminus\{a\}$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - a)^m$ $\forall\, \zeta \in G$, $m$ *— целое число,* $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \ge 0$, $\beta$, $c$ *— постоянные.*

Теорема 1 является частным случаем следующего более общего утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *— фиксированная точка;* $G \subset \mathbb{C}\setminus\{a\}$ *— тонко открытое множество;* $Q$ *— множество, которое содержится в* $\overline{\partial}_f G$, *со-*

*держит точки* $z_1 = a$ *и* $z_2 = \infty$, *но не содержит никаких неполярных компактов;* $\mu \in \mathfrak{M}$; $f\colon G \to \mathbb{C}$ — *тонко голоморфная функция, ограниченная на каждой части множества* $G$, *отделимой от точек* $z_1 = a$ *и* $z_2 = \infty$, *и удовлетворяющая условию*

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in G} f(\zeta) \le \mu(|z-a|) \qquad \forall z \in (\partial_f G)\setminus Q. \tag{7}$$

*Предположим, что при каждом* $s = 1, 2$ *(независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты* $G_j$ *множества* $G$, *для которой* $z_s \in b(G_j)$ $(= \tilde{G}_j)$, *выполняется неравенство* (3), *а если* $z_s \notin b(CG_j)$, *то предположим также, что при* $z_s = a$ *верно* (4), *а при* $z_s = \infty$ *верно* (5). *Тогда реализуется одна и только одна из двух возможностей: либо верно соотношение* (6), *либо имеет место следующий исключительный случай:* $G = \mathbb{C}\setminus Q$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - a)^m$ $\forall \zeta \in G$, $m$ — *целое число,* $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \ge 0$, $\beta$, $c$ — *постоянные.*

Пусть $D$ — тонко открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$.

Мы используем теорему Б. Фугледе о тонко гипогармоническом продолжении [6, с. 96] (теорема 9.14), сформулированную в виде следующего утверждения.

**Утверждение 1.** *Пусть функция* $u$ *тонко гипогармонична в* $D\setminus E$, *где* $E$ — *некоторое полярное подмножество тонко открытого множества* $D$. *Тогда если функция* $u$ *ограничена сверху в некоторой тонкой окрестности каждой точки множества* $E$, *то она имеет тонко гипогармоническое продолжение на множество* $D$. *Это продолжение единственно и задается формулой*

$$u(z) = \overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D\setminus E} u(\zeta) \qquad \forall z \in E.$$

Из этого утверждения и теоремы 4 из работы [9] вытекает следующий факт.

**Утверждение 2.** *Пусть* $E \subset D$ — *полярное множество, а* $\varphi\colon D\setminus E \to \mathbb{C}$ — *тонко голоморфная функция, ограниченная в тонкой окрестности каждой точки из* $E$. *Тогда* $\varphi$ *продолжается на* $E$ *до функции, тонко голоморфной в* $D$.

Поведение тонко голоморфных функций возле своих нулей характеризуется следующим свойством [7] (п. 4.3).

**Утверждение 3.** *Тонко голоморфная функция, определенная в тонкой области* $D$ *и отличная от постоянной, может иметь не более счетного числа нулей. Каждый нуль* $d$ *тонко голоморфной функции в тонкой области* $D$ *имеет конечный порядок* $n$, *определяемый любым из следующих эквивалентных условий:*

1) $f^{(k)}(d) = 0$ *для* $k < n$ *и* $f^{(n)}(d) \ne 0$;

2) *существует тонко голоморфная в* $D$ *функция* $g$ *такая, что* $g(d) \ne 0$ *и* $f(z) = g(z)(z-d)^n$ $\forall z \in D$.

Для $z \in \mathbb{C}$ через $\varepsilon_z$ будем обозначать меру Дирака, сосредоточенную в $\{z\}$. Меру, полученную в результате выметания меры $\varepsilon_z$ на множество $W \subset \mathbb{C}$, будем обозначать через $\varepsilon_z^W$ [6, с. 25].

Пусть множество $D$ ограничено. Для $w, \zeta \in \mathbb{C}$, $w \ne \zeta$, существует тонкая функция Грина:

$$g_D(w, \zeta) := \int \log \frac{|w-z|}{|w-\zeta|}\, d\varepsilon_\zeta^{CD}(z).$$

Для $\varepsilon \in (0, 1)$, $w, z \in \mathbb{C}$ введем функцию $l_\varepsilon(w, z) := \log \max\{\varepsilon, |w-z|\}$ и обозначим

$$H_D(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) := \int l_\varepsilon(w, \cdot)\, d\varepsilon_\zeta^{CD}.$$

Нам понадобится следующее утверждение из [4].

**Лемма 1.** *Для произвольных* $\zeta \in D$ *и* $w \in \mathbb{C}$ *существует предел* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H_D(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) =: h_D(w, \zeta)$, *который (тонко) субгармоничен по* $w \in \mathbb{C}$ *и удовлетворяет соотношению*

$$h_D(w, \zeta) - \log|w-\zeta| = g_D(w, \zeta) \quad \forall\, \zeta \in D, \quad w \in \mathbb{C}.$$

***Доказательство теоремы 2.*** Обозначим

$$G \cap \{\zeta\colon |\zeta - a| < 1\} =: D_a, \quad G \cap \{\zeta\colon |\zeta - a| > 1\} =: D^a.$$

Зафиксируем произвольные $\sigma > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\mu(x) \le \sigma x^\nu \quad \forall\, x > 0. \tag{8}$$

Это возможно, так как $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $q > \sigma$ таково, что

$$|f(\zeta)| < q \quad \forall\, \zeta \in G \cap \{\zeta\colon |\zeta - a| = 1\}. \tag{9}$$

Докажем, что $|f(\zeta)| \le q|\zeta - a|^\nu$ $\forall\, \zeta \in D_a$. Вначале докажем, что

$$|f(\zeta)| \le q|\zeta - a|^\nu \quad \forall\, \zeta \in D_a. \tag{10}$$

Предположим, что (10) не выполняется. Пусть $D$ — произвольная тонко связная компонента множества $D_a$, в какой-нибудь точке $\zeta'$ которой $|f(\zeta')| > q|\zeta' - a|^\nu$. Обозначим через $D_*$ множество всех $\zeta \in D$, в которых

$$|f(\zeta)| \ge q|\zeta - a|^\nu, \quad \zeta \in D_*. \tag{11}$$

Тогда $D_*$ — непустое тонко замкнутое в $D$ множество, а $D \setminus D_*$ — непустое тонко открытое множество. Поэтому $\partial_f D_* \subset D \cup \partial_f D$, а так как $D \cap \partial_f D = \varnothing$, то $(\partial_f D_*) \cap \partial_f D = (\partial_f D_*) \setminus D$. Из условий (7)–(9) следует

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} |f(\zeta)| < q|z - a|^\nu \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q,$$

а поэтому $\partial_f D_* \subset D \cup Q$. Отсюда и из соотношения $D \cap Q = \varnothing$ (которое является следствием соотношений $Q \cap G = \varnothing$ и $D \subset G$) следует $Q \cap \partial_f D_* = (\partial_f D_*) \setminus D$. Таким образом, $Q \cap \partial_f D_* = (\partial_f D) \cap \partial_f D_*$. Следовательно, множество $Q \cap \partial_f D_*$ тонко замкнуто в $\mathbb{C}$ и поэтому полярно. Обозначим $Q_1 := Q \cap (\{a\} \cup \partial_f D_*)$. Множество $Q_1$ полярно, а на непустом множестве $(\partial_f D) \setminus Q_1$ справедливо неравенство

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} |f(\zeta)| < q|z - a|^\nu \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{12}$$

Для $\zeta \in \mathbb{C}$ обозначим $u(\zeta) := \log|f(\zeta)|$. Функция $u(\zeta)$ тонко гипогармонична на множестве $G$.

Если точка $z_1 = a$ тонко отделима от $D$, то она отделима от $D$ и в стандартной топологии, и поэтому функция $u(\zeta)$ ограничена сверху в $D$ согласно условию теоремы. Тогда из (12) и принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] с учетом полярности множества $Q \cap \partial_f D_*$ и тонкой связности $D$ следует

$$u(\zeta) \leqq \nu \log|\zeta - a| + \log q \qquad \forall\, \zeta \in D_a.$$

Но это противоречит соотношениям $\zeta' \in D_* \subset D_a$ и предположенной оценке в точке $\zeta' \in D$. Следовательно, в этом случае оценка (10) верна.

Пусть теперь точка $a$ является тонко граничной точкой для $D$, а потому $a \in b(D)$. Тогда то же самое верно для той компоненты $G_j$ множества $G$, которая содержит $D$, т. е. $a \in b(G_j)$.

Рассмотрим случай, когда $a \in b(C G_j)$ и $f_{a, G_j} < +\infty$. Так как в некоторой окрестности $V$ точки $a$

$$\sup_{\zeta \in G_j \cap V} \frac{u(z)}{|\log|\zeta - a||} < +\infty,$$

то существует постоянная $A > |\nu|$ такая, что функция $\theta(\zeta) := u(\zeta) + A \log|\zeta - a|$ ограничена сверху в $D_a$ и на основании данного выше определения точки $\zeta'$ и оценки (12) получаем

$$\theta(\zeta') > (\nu + A) \log|\zeta' - a| + \log q, \tag{13}$$

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A) \log|z - a| + \log q \qquad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{14}$$

Из определения $l_\varepsilon$ и (14) следует оценка

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A)\, l_\varepsilon(a, z) + \log q \qquad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q_1. \tag{15}$$

В $D$ функция $\theta$ ограничена сверху и тонко гипогармонична, функция $H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), w)$ ограничена снизу и тонко гармонична по $w$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Поэтому из (15) и того, что множество $Q \cap \partial_f D_*$ полярно, на основании принципа максимума следует, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$ верно

$$\theta(\zeta) \le (\nu + A) H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), \zeta) + \log q \qquad \forall\, \zeta \in D.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, на основании леммы 1 получаем

$$\theta(\zeta) \le (\nu + A) h_D(a, \zeta) + \log q =$$

$$= (\nu + A)(\log|\zeta - a| + g_D(a, \zeta)) + \log q \qquad \forall\, \zeta \in D.$$

Из условия $a \in b(C G_j)$ следует, что $a \in b(C D)$, и поэтому $g_D(a, \zeta) = 0$. Следовательно,

$$\theta(\zeta) \le (\nu + A) \log|\zeta - a| + \log q \qquad \forall\, \zeta \in D.$$

Но это противоречит соотношению (13). Следовательно, при условиях $a \in b(C G_j)$ и $f_{a, G_j} < +\infty$ снова верно (10).

Пусть теперь $a \notin b(C G_j)$. Из условий теоремы следует, что тогда выполняется (4). Функция $\Psi(\zeta) := f(\zeta) / (\zeta - a)^{m_0 - 1}$ тонко голоморфна в $G$ и

$$\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta\to a,\ \zeta\in G} \Psi(\zeta) = 0.$$

Применяя утверждения 2 и 3, убеждаемся, что функция $\Psi(\zeta)$, продолженная в точку $a$ значением $0$, тонко голоморфна в $G\bigcup\{a\}$ и поэтому имеет в точке $a$ нуль конечного порядка. Отсюда следует существование целого $k$ и тонко голоморфной в $G\bigcup\{a\}$ функции $\varphi$ такой, что $\varphi(a)\neq 0$ и

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta)(\zeta-a)^k \qquad \forall\,\zeta\in G. \tag{16}$$

Из определения $f_{a,G}$ видно, что $k=-f_{a,G}$. Таким образом, $f_{a,G}$ — целое. Доопределим функцию $f$ в точке $a$ с помощью равенства (16) до тонко мероморфной в $G\bigcup\{a\}$ функции, которая в точке $a$ имеет нуль порядка $k$ при $k>0$ и полюс порядка $|k|$ при $k<0$. Очевидно, $f_{a,D}\le f_{a,G}$. Из (8) и определения $\mu_0$ и $m_0$ видно, что $m_0\ge\mu_0\ge\nu$. Из условия (4) и соотношения (16) следует, что $k\ge m_0$.

Если $a\in b(D_*)$, то из (11) следует, что $-f_{a,D}\le\nu$. Тогда имеет место такая цепочка соотношений:

$$-f_{a,G}\le -f_{a,D}\le\nu\le\mu_0\le m_0\le k=-f_{a,G},$$

и поэтому $k=m_0=\nu$. Из (16) и условий теоремы вытекает, что функция $\varphi$ ограничена в $D_a$, а из (12) следует

$$\overline{\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta\to z,\ \zeta\in D}} |\varphi(\zeta)| \le q \qquad \forall\, z\in(\partial_f D)\setminus Q_1.$$

Следовательно, в $D$ верно $|\varphi(\zeta)|\le q$ и $|f(\zeta)|\le q|\zeta-a|^k$. Но это противоречит предположенной оценке $|f(\zeta')|>q|\zeta'-a|^\nu$ в точке $\zeta'\in D$.

Если же $a\notin b(D_*)$, то существует тонкая окрестность $V$ точки $a$ такая,что $\overline{V}\subset(D\bigcup\{a\})\setminus D_*$ [6, с. 68], и поэтому в $\overline{V}$ имеем

$$|f(\zeta)|\le q|\zeta-a|^\nu. \tag{17}$$

Множество $C\overline{V}$ тонко открыто; следовательно, множество $D\bigcap C\overline{V} = D\bigcap\overline{V}$ тонко открыто и тонко отделимо от точки $a$. Для каждой тонко связной компоненты $W$ множества $D\setminus\overline{V}$ верно $\partial_f W\subset(\overline{V}\bigcap D)\bigcup\partial_f D$, причем $W$ отделимо от точки $a$ в стандартной топологии, поскольку $V$ содержит полные окружности с центром $a$ как угодно малых радиусов. Поэтому $f$ ограничена в $W$. На $(\partial_f W)\bigcap\overline{V}\bigcap D$ верно (17), а вследствие (12) квазивсюду на $(\partial_f W)\bigcap\partial_f D$ верно неравенство

$$\overline{\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta\to z,\ \zeta\in W}} |f(\zeta)| \le q|z-a|^\nu.$$

Поэтому согласно принципу максимума [6, с. 76] приходим к выводу, что оценка (17) верна в $W$ и поэтому также в $D\setminus\overline{V}$ и в $D$. Но это противоречит предположенной оценке в точке $\zeta'$.

Этим доказано, что при условии $a\notin b(CG_j)$ снова верно (10).

Справедлив также аналог оценки (10) для множества $D^a$. В этом можно убедиться, рассмотрев образы множеств $D^a$, $Q$, $G$ при отображении $\zeta_1 := 1/(\zeta-a)$ и применив приведенные выше рассуждения к точкам $a_1:=0$, функциям $f_1(\zeta_1):=f(\zeta)$, $\mu_1(x):=\mu(1/x)$ и числам $\nu_1:=-\nu$, $\sigma_1:=\sigma$,

$q_1 := q$ (что законно вследствие инвариантности условий теоремы относительно указанной замены). В результате получаем аналог оценки (10), из которого при обратной замене объектов получаем соотношение

$$|f(\zeta)| \leq q|\zeta - a|^{\nu} \qquad \forall\, \zeta \in D^a. \tag{18}$$

Из (9), (10) и (18) следует

$$|f(\zeta)| \leq q|\zeta - a|^{\nu} \qquad \forall\, \zeta \in G. \tag{19}$$

Предположим, что в $G$ не выполняется оценка

$$|f(\zeta)| \leq \sigma|\zeta - a|^{\nu}. \tag{20}$$

Тогда при некотором $\sigma' > \sigma$ в $G$ не верна также оценка

$$|f(\zeta)| \leq \sigma'|\zeta - a|^{\nu}. \tag{21}$$

Зафиксируем произвольную тонко связную компоненту $G'$ множества $G$ такую, что (21) не выполняется в некоторой ее точке $\zeta'$. Обозначим через $G_*$ множество всех тех $\zeta \in G'$, в которых $f(\zeta) \geq \sigma'|\zeta - a|^{\nu}$. По аналогии с доказательством соответствующих свойств множества $\partial_f D_*$ (см. выше) убеждаемся, что множество $Q \cap \overline{\partial}_f G_*$ тонко замкнуто и поэтому полярно. При этом имеем

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\ \zeta \in G'} |f(\zeta)| \leq \sigma|z - a|^{\nu} \qquad \forall\, z \in (\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*). \tag{22}$$

Функция $\varphi(\zeta) := \log(|f(\zeta)|/(\sigma|\zeta - a|^{\nu}))$ тонко гипогармонична и ограничена сверху в $G'$. Предположим, что $(\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*) \neq \varnothing$. Тогда к функции $\varphi(\zeta)$ применим принцип максимума [6, с. 76] и на основании (22) получим

$$\log \frac{|f(\zeta)|}{\sigma|\zeta - a|^{\nu}} \leq 0 \qquad \forall\, \zeta \in G'$$

и потому

$$|f(\zeta)| \leq \sigma|\zeta - a|^{\nu} \qquad \forall\, \zeta \in G',$$

что противоречит предположению о нарушении в $G'$ оценки (20). Следовательно, $(\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*) = \varnothing$ и множество $\partial_f G'$ содержится в $Q$, а так как оно тонко замкнуто, то является полярным множеством. Значит, $G' = \mathbb{C} \setminus \partial_f G' = G$, и отсюда вытекает $G' \subset G \subset \mathbb{C} \setminus Q \subset \mathbb{C} \setminus \partial_f G' \subset G'$, т. е. $G' = G = \mathbb{C} \setminus Q = \mathbb{C} \setminus \partial_f G' = \mathbb{C} \setminus \partial_f G$, $Q = \overline{\partial}_f G' = \overline{\partial}_f G$. Поэтому множество $Q$ тонко замкнуто и полярно, а на основании утверждения 2 функция $f(\zeta)$ продолжается на множество $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ до тонко голоморфной функции $f_*(\zeta)$ с сохранением неравенства

$$|f_*(\zeta)| \leq q|\zeta - a|^{\nu}.$$

Тонко гипогармоническая и ограниченная сверху в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ функция $\log(|f_*(\zeta)|/(\sigma|\zeta - a|^{\nu}))$ постоянна, и верно равенство

$$f_*(\zeta) = c(\zeta - a)^{\nu} \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \tag{23}$$

с некоторой постоянной $c$, $\sigma < |c| \le q$. На основании утверждения 3 число $\nu$ должно быть целым. Из соотношений (4) и (5) следует $\mu_0 \le m_0 \le \nu \le m_\infty \le \mu_\infty$, а с учетом (1) получаем $\mu_0 = m_0 = \nu = m_\infty = \mu_\infty$.

Если $\mu \equiv 0$, то из (7) и вида $f$ следует, что имеет место исключительный случай из утверждения теоремы 2.

Пусть теперь $\mu \in \mathfrak{M}^*$. Из равенства $\mu_0 = \mu_\infty$ следует $I_\mu = (0, +\infty)$. Так как множество $\overline{\partial}_f G = CG = Q$ полярно, то точки $a$ и $\infty$ принадлежат множеству $b(G)$ и не принадлежат (пустому) множеству $b(CG)$. При этом функция $\log \mu(|z-a|)$ конечна и гипергармонична в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, а функция

$$\varphi_*(\zeta) := \log \frac{|f_*(\zeta)|}{\mu(|\zeta - a|)}$$

конечна, ограничена сверху и тонко гипогармонична в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Поэтому

$$\varphi_*(\zeta) \equiv \log \delta \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \tag{24}$$

с некоторой постоянной $\delta > 0$. Из (23) и (24) следует $\mu(x) = (|c|/\delta)\, x^\nu \;\; \forall\, x \in \in (0, +\infty)$, а с учетом (8) получаем $\sigma \ge |c|/\delta$. Поэтому $\sigma > 1$. Следовательно, если в $G$ оценка (20) не верна, то имеет место исключительный случай теоремы 2, причем $|c| > \beta \ge 0$, а постоянная $\nu$ однозначно определяется функцией $f(\zeta)$.

Теперь предположим, что исключительный случай теоремы 2 не имеет места. Тогда при любых $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, удовлетворяющих условию (8), в $G$ верно (20). Пусть $\zeta_0 \in G$ и $G(\zeta_0)$ — тонко связная компонента множества $G$, содержащая точку $\zeta_0$.

Сначала положим $\mu \in \mathfrak{M}^*$. Если $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ такие, что выполняется (8) и

$$\mu(|\zeta_0 - a|) = \sigma |\zeta_0 - a|^\nu.$$

Отсюда и из (20) следует

$$f(\zeta_0) \le \mu(|\zeta_0 - a|). \tag{25}$$

Если $|\zeta_0 - a| \notin [x_\mu^-, x_\mu^+]$, то за счет выбора $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ при сохранении условия (8) число $\sigma|\zeta_0 - a|^\nu$ может быть сделано меньше произвольного заданного числа $\varepsilon > 0$. Поэтому из (20) следует

$$f(\zeta_0) = 0. \tag{26}$$

Если же $|\zeta_0 - a|$ равно $x_\mu^-$ или $x_\mu^+$, то в соответствии с доказанным получаем $f(\zeta_0) = 0$, поскольку $\zeta_0$ — тонко внутренняя точка множества $G$, а функция $f(\zeta)$ тонко непрерывна. Следовательно, при $\mu \in \mathfrak{M}^*$ оценка (25) всегда верна.

Если $\mu \equiv 0$, то для любых $\nu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ верно (8), откуда следуют соотношения (25), (26) для любого $\zeta_0 \in G$.

Теорема 2, а вместе с нею и теорема 1 доказаны.

**4. Глобальные контурно-телесные результаты.** Для произвольного тонко открытого множества $G \in \overline{\mathbb{C}}$ имеем $b(CG) = C(G \cup (CG)_i)$ и $b(CG) \cap \cap \partial_f G = (\partial_f G)_l$. Поэтому из теоремы 2, если в ней в качестве $a$ взять произвольную точку $z \in (\partial_f G)_l$, получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $f\colon \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в $G$, ограниченная на каждой ограниченной части множества $G$ и удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z-\zeta|) \qquad \forall\, z, \zeta \in \partial_f G, \quad z \neq \zeta. \tag{27}$$

*Для каждой тонко связной компоненты $G_j$ множества $G$, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$, дополнительно предположим, что выполняется условие* (3) *с точкой $z_s = \infty$, а если $\infty \in (\overline{\partial}_f G)_i$, то предположим, что выполняется* (5) *и $\mu_\infty \geq 0$. Тогда верно*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z-\zeta|) \qquad \forall\, z \in (\partial_f G)_l, \quad \forall\, \zeta \in \tilde{G} \cap \mathbb{C}, \quad z \neq \zeta. \tag{28}$$

***Доказательство.*** Предположим, что $w \in (\partial_f G)_l$, и при фиксированном $w$ рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) := f(\zeta) - f(w)$. Для точки $z_s = \infty$ условие (3) равносильно условию $\varphi_{z,G_j} < +\infty$ (для каждой тонко связной компоненты $G_j$ множества $G$, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$), а если $\infty \in (\overline{\partial}_f G)_i$ и $\mu_\infty \geq 0$, то условие (5) равносильно тому, что $\varphi(\zeta) := o(|\zeta|^{m_\infty + 1})$ при $\zeta \to \infty$. Таким образом, функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, в том числе соотношению типа (2), причем исключительный случай утверждения теоремы 1 невозможен. Отсюда следует оценка (28) для точки $z = w$, а вследствие произвольности $w$ эта оценка верна и для всех $z \in (\partial_f G)_l$.

Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Пусть фиксированы тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C}$, точка $z_0 \in (\partial_f G)_i \cup G$ и мажоранта $\mu \in \mathfrak{M}$ с $\mu_0 < +\infty$. Пусть $f\colon \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в $G$, ограниченная на каждой ограниченной части множества $G$ и удовлетворяющая условию* (27) *и*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq o(|z - z_0|^{m_0 - 1}) \qquad (z \to z_0). \tag{29}$$

*Для каждой тонко связной компоненты $G_j$ множества $G$, для которой $\infty \in \tilde{G}_j$, дополнительно предположим, что выполняется условие* (3) *с точкой $z_s = \infty$, а если $\infty \in (\overline{\partial}_f G)_i$, то предположим, что выполняется* (5) *и $\mu_\infty \geq 0$. Тогда реализуется одна из двух возможностей: либо соотношение*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \mu(|z - z_0|) \qquad \forall\, z \in \tilde{G} \setminus \{z_0, \infty\}, \tag{30}$$

*либо следующий исключительный случай: $(\partial_f G)_l = \varnothing$, $\mu(x) = \beta x^m$ $\forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m + b$ $\forall\, \zeta \in \tilde{G}$, $m$ — натуральное, $m = m_0 = m_\infty$, $|c| > \beta \geq 0$, $\beta$, $c$, $b$ — постоянные; если $z_0 \in (\partial_f G)_i$ или $m = 1$, то множество $\mathbb{C} \setminus G$ содержит не более одной точки, а* (30) *невозможно.*

***Доказательство.*** Введем функцию $\varphi(\zeta) := f(\zeta) - f(z_0)$. Применяя к ней теорему (3), получаем (28). Так как $z_0 \notin b(CG)$ и $\mu_0 < +\infty$, то можно положить $a := z_0$ и из соотношений (27)–(29) получить для функции $\varphi$ соотношения типа (2)–(5). Поэтому для функции $\varphi$ и множества $G \setminus \{z_0\}$ выполнены все условия теоремы 2. Применяя эту теорему, конкретизируем ее утверждение на основании того, что в исключительном случае верно $\mu(x) = \beta x^m$, $\varphi(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m$, $f(\zeta) = c(\zeta - z_0)^m + f(z_0)$, $|c| > \beta \geq 0$, а так как функция $f(\zeta)$ тонко непрерывна в точке $z_0 \notin b(CG)$, то $m \geq 1$. Из (27) и $|c| > \beta$ вытекает следующее: если $z_0 \in (\partial_f G)_i$ или $m = 1$, то $\mathbb{C} \setminus G$ содержит не более одной точки, и в любом из этих случаев (30) невозможно.

Теорема 4 доказана.

Справедлив следующий глобальный контурно-телесный результат, получаемый с помощью теорем 3 и 4.

**Теорема 5.** *Пусть фиксированы тонко открытое множество* $G \subset \mathbb{C}$ *и мажоранта* $\mu \in \mathfrak{M}$, *для которых* $\partial_f G \neq \varnothing$, $\mu_0 \leq 1$. *Пусть* $f\colon \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* $G$, *ограниченная на всякой ограниченной части множества* $G$ *и удовлетворяющая условию* (27). *Для каждой тонко связной компоненты* $G_j$ *множества* $G$, *для которой* $\infty \in \tilde{G}_j$, *дополнительно предположим, что выполняется условие* (3) *с точкой* $z_s = \infty$, *а если* $\infty \in (\overline{\partial}_f G)_i$, *то предположим, что выполняется* (5) *и* $\mu_\infty \geq 0$. *Тогда имеет место одна и только одна из двух возможностей: либо соотношение*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z - \zeta|) \qquad \forall\, z, \zeta \in \tilde{G} \cap \mathbb{C}, \quad z \neq \zeta, \tag{31}$$

*либо следующий исключительный случай:* $\mu(x) = \beta x \ \ \forall\, x > 0$, $f(\zeta) = c\zeta + b$ $\forall\, \zeta \in G$, $|c| > \beta \geq 0$, $\beta$, $c$, $b$ *— постоянные, множество* $\mathbb{C} \setminus G$ *содержит не более одной точки.*

Установлен также контурно-телесный результат, в котором нет условия $\mu_0 \leq 1$, но предполагается, что функция $f(\zeta)$ непрерывна (и конечна) в точке $\infty$.

**Теорема 6.** *Пусть фиксированы тонко открытое множество* $G \subset \mathbb{C}$ *и мажоранта* $\mu \in \mathfrak{M}$. *Пусть* $f\colon \tilde{G} \to \mathbb{C}$ *— конечная, тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* $G$, *удовлетворяющая условию* (27) *и непрерывная в точке* $\infty$ (*если* $G$ *— неограниченное множество*). *Если* $\infty \in (\overline{\partial}_f G)_i$, *то дополнительно предположим, что* $\mu_\infty \geq 0$. *Тогда верно* (31).

Вначале докажем следующий принцип максимума для разности значений тонко голоморфной функции, являющийся аналогом леммы 4 из [2].

**Лемма 2.** *Пусть* $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— тонко открытое множество,* $f\colon \tilde{G} \to \mathbb{C}$ *— конечная, тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* $G$, *непрерывная в* $\infty$ (*если* $G$ *— неограниченное множество*) *и* $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда* $(\partial_f G)_l \neq \varnothing$ *и при каждом* $\delta > 0$ *верно*

$$\sup_{z \in (\partial_f G)_l}\ \sup_{\zeta \in \tilde{G},\ |\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)| = \sup_{\zeta, z \in \tilde{G},\ |\zeta - z| = \delta} |f(\zeta) - f(z)|. \tag{32}$$

***Доказательство леммы.*** Множество $(\partial_f G)_i$ полярно, и функция $f$ может быть тонко голоморфно продолжена на него (см. утверждение 2). Поэтому без ограничения общности будем считать, что $(\partial_f G)_i = \varnothing$.

Предположим, что $(\partial_f G)_l = \varnothing$. Тогда $\tilde{G} = \overline{\mathbb{C}}$ и функция $f$ конечна и тонко голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ (см. утверждение 2), следовательно, она голоморфна на $\overline{\mathbb{C}}$, что противоречит условию $f \not\equiv \mathrm{const}$. Значит, $(\partial_f G)_l \neq \varnothing$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Левую и правую части (32) обозначим соответственно через $A(\delta)$ и $B(\delta)$. Очевидно, $A(\delta) \leq B(\delta)$. Предположим, что $A(\delta) < B(\delta)$. Тогда существуют точки $\zeta_1, \zeta_2 \in G$, для которых

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| = A(\delta), \qquad |\zeta_1 - \zeta_2| = \delta. \tag{33}$$

Функция $\varphi(\zeta) := |f(\zeta + \zeta_1) - f(\zeta + \zeta_2)|$ определена, конечна и тонко непрерывна на пересечении $T$ множеств $T_n := \{\zeta : \zeta - \zeta_n \in \tilde{G}\}$, $n = 1, 2$, а если $T$ содержит точку $\infty$, то $\varphi(\infty) = 0$. Обозначим через $G_1$ и $G_2$ тонко связные компоненты множества $G$, содержащие соответственно точки $\zeta_1$ и $\zeta_2$. Для каждого $n = 1, 2$ обозначим $D_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta + \zeta_n \in G_n\}$. Тонко открытое множество $D_0 := D_1 \cap D_2$ содержит точку $\zeta = 0$, а функция $\varphi(\zeta)$ тонко гипогармонична в $D_0$ и тонко непрерывна на $\tilde{D}_0$. Положим $(A(\delta) + \varphi(0))/2 =: t$ и обозначим через $D$ тонко связную компоненту тонко открытого множества $\{\zeta \in D_0 : \varphi(\zeta) > t\}$, содержащую точку $\zeta = 0$. Множество $D$ ограничено, так как в противном случае мы пришли бы к противоречию с равенством $\varphi(\infty) = 0$ и непрерывностью $\varphi$ в $\infty$.

Пусть $z \in \partial_f D$. Если при этом хотя бы одна из точек $z + \zeta_1$, $z + \zeta_2$ принадлежит $(\partial_f G)_l$, то тогда $\varphi(z) < t$. В противном же случае $z \in D_0 \cap \partial_f D$ и тогда $\varphi(z) = t$. Но в силу принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] это противоречит соотношению $\varphi(0) > t$, вытекающему из (33). Полученное противоречие доказывает равенство (32).

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы 6.*** Зафиксируем произвольные $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2 существуют точки $a \in (\partial_f G)_l$ и $w \in \tilde{G}$ такие, что $|a - w| = \delta$ и $|f(a) - f(w)| > A(\delta) - \varepsilon = B(\delta) - \varepsilon$. Применяя теоремы 1 и 3, получаем

$$\sup_{\zeta \in \tilde{G},\ |\zeta - a| = \delta} |f(\zeta) - f(a)| \le \mu(\delta).$$

Следовательно, $B(\delta) - \varepsilon \le \mu(\delta)$. Ввиду произвольности $\varepsilon$ отсюда следует $B(\delta) \le \mu(\delta)$.

Теорема 6 доказана.

**5. О знаке равенства в оценках локальных и глобальных теорем.** Ответ на вопрос о достижении знака равенства в локальных оценках теорем 1 и 2 содержится в следующей теореме.

**Теорема 7.** *Пусть фиксированы точка $a \in \mathbb{C}$, тонко открытое множество $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $\mu \in \mathfrak{M}$. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — тонко голоморфная функция, для которой верно $|f(z)| \le \mu(|z - a|)$ $\forall z \in G$ и $|f(\zeta_0)| \le \mu(|\zeta_0 - a|)$ в фиксированной точке $\zeta_0 \in G$. Тогда в тонко связной компоненте $G(\zeta_0)$, содержащей точку $\zeta_0$, справедливо равенство $f(\zeta) = c(\zeta - a)^\nu$ с некоторыми постоянными $\nu \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, а если $\mu(|\zeta_0 - a|) \ne 0$, то $\mu(|\zeta - a|) = |f(\zeta)|$ $\forall \zeta \in G(\zeta_0)$.*

Как следствие из теоремы 7 получаем теорему 8, дающую ответ на вопрос о достижении знака равенства в оценке теоремы 3.

**Теорема 8.** *Пусть $\mu \in \mathfrak{M}$, $G$ — тонко открытое множество в $\mathbb{C}$, $f : \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, тонко голоморфная $G$ и удовлетворяющая соотношению $|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|)$ $\forall z, \zeta \in \tilde{G}$, $z \ne \zeta$. Пусть при некоторых $z_0 \in (\partial_f G)_l$, $\zeta_0 \in (\partial_f G)_i \cup G$ верно равенство $|f(z_0) - f(\zeta_0)| = \mu(|z_0 - \zeta_0|)$. Обозначим через $G_0$ тонко связную компоненту множества $G$, тонкое замыкание которой содержит точку $\zeta_0$. Тогда выполняется соотношение*

$$f(\zeta) = f(z_0) + [f(\zeta_0) - f(z_0)]\left(\frac{\zeta - z_0}{\zeta_0 - z_0}\right)^\nu \qquad \forall \zeta \in \tilde{G}_0$$

*с некоторой постоянной* $\nu \in (-\infty, +\infty)$. *Если при этом* $\mu(|z_0 - \zeta_0|) \neq 0$, *то выполняется также равенство*

$$\mu(|\zeta - z_0|) = |f(\zeta_0) - f(z_0)| \left( \frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta_0 - z_0|} \right)^{\nu} \quad \forall \zeta \in \tilde{G}_0 .$$

Ответ на вопрос о достижении знака равенства в глобальных оценках теорем 4, 6 содержится в следующей теореме.

**Теорема 9.** *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}$, $G$ *— тонко открытое множество в* $\mathbb{C}$, $f\colon \tilde{G} \cap \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— тонко непрерывная функция, тонко голоморфная в* $G$ *и удовлетворяющая соотношению* $|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z-\zeta|)$ $\forall z, \zeta \in \tilde{G}$, $z \neq \zeta$. *Пусть при некоторых* $z_0, \zeta_0 \in (\partial_f G)_i \cup G$ $(z_0 \neq \zeta_0)$ *верно равенство* $|f(z_0) - f(\zeta_0)| = \mu(|z_0 - \zeta_0|)$. *Обозначим через* $G_1$ *и* $G_2$ *тонко связные компоненты множества* $G$, *тонкие замыкания которых содержат соответственно точки* $z_0$, $\zeta_0$. *Тогда выполняется одно из следующих двух соотношений: либо*

$$f(\zeta) = \begin{cases} f(z_0) & \forall \zeta \in \tilde{G}_1 \cap \mathbb{C}, \\ f(\zeta_0) & \forall \zeta \in \tilde{G}_2 \cap \mathbb{C}, \end{cases} \tag{34}$$

*либо*

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + \frac{f(z_0) - f(\zeta_0)}{z_0 - \zeta_0}(\zeta - \zeta_0) \quad \forall \zeta \in (\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) \cap \mathbb{C}. \tag{35}$$

*Если при этом* $\mu(|z_0 - \zeta_0|) \neq 0$, *то равенствам* (34) *и* (35) *отвечают соответственно равенства*

$$\mu(|z-\zeta|) = |f(z_0) - f(\zeta_0)| \quad \forall z \in \tilde{G}_1 \cap \mathbb{C}, \quad \forall \zeta \in \tilde{G}_2 \cap \mathbb{C},$$

$$\mu(|z-\zeta|) = \frac{|f(z_0) - f(\zeta_0)|}{|z_0 - \zeta_0|} |z-\zeta| \quad \forall z, \zeta \in (\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) \cap \mathbb{C}.$$


1. *Тамразов П. М.* Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 210–219.
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. – 1986. – **50**, № 4. – С. 835–848.
3. *Тамразов П. М., Сарана О. А.* Контурно-тілесні властивості тонко субгармонічних функцій. – Київ, 1994. – 14 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.33).
4. *Тамразов П. М., Сарана А. А.* Контурно-телесные свойства тонко гипогармонических функций // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1114–1125.
5. *Сарана О. А.* Контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій. – Київ, 1994. – 19 с. – Деп. в ДНТБ України, № 2346-Ук94.
6. *Fuglede B.* Finely harmonic functions // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1972. – № 289. – 188 p.
7. *Fuglede B.* Finely holomorphic functions. A survey // Rev. roum. math. pures et appl. – 1988. – **33**. – P. 283–295.
8. *Fuglede B.* Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. – 1976. – **2**. – P. 113–127.
9. *Fuglede B.* Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid. – 1986. – **11**. – P. 111–136.


Получено 24.12.96