УДК 517.956

И. И. Антыпко (Харьк. ун-т)

ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА–ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

We consider a solution $u(x, t)$ of the general linear evolutionary equation of second order with respect to time variable defined on the ball $\Pi(T) = \{(x, t): x \in \boldsymbol{R}^n, t \in [0, T]\}$ and study the dependence of behavior of this solution on the behavior of functions

$$u_1(x, t) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x, t) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}.$$

exhibited at infinity.

Вивчається залежність поведінки розв'язку $u(x, t)$ загального лінійного еволюційного рівняння другого порядку за часовою змінною, заданого на шарі $\Pi(T) = \{(x, t): x \in \boldsymbol{R}^n, t \in [0, T]\}$, від поведінки на нескінченності функцій

$$u_1(x, t) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x, t) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}.$$

Теорема типа Фрагмена – Линделефа — это утверждение о поведении в некоторой бесконечной области решений дифференциального уравнения, принадлежащих заданному классу функций, по информации о поведении этих решений на границе или в некоторой подобласти рассматриваемой области. Этой тематике посвящен ряд работ, где рассматриваются системы или уравнения специальные (см., например, [1 – 6]) или не связанные априори с какой-либо специальной алгебраической природой рассматриваемых дифференциальных операторов [7, 8].

В настоящей работе изучается поведение решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + P(D_x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Q(D_x)\, u(x, t) = 0, \tag{1}$$

заданного в слое $\Pi(T) = \boldsymbol{R}^n \times [0, T]$, в зависимости от поведения на бесконечности функций

$$u_1(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}, \qquad u_2(x) = \frac{\partial u(x, T)}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь $P(s)$ и $Q(s)$ — произвольные многочлены с постоянными комплексными коэффициентами относительно

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in \boldsymbol{C}^n, \quad D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad u \in \boldsymbol{C}.$$

Обозначим $\Lambda(s) \equiv |\operatorname{Re} P(is)| - \operatorname{Re} D(is)$, где $D(is) \equiv \sqrt{P^2(is) - 4Q(is)}$

(в качестве $\sqrt{P^2(is) - 4Q(is)}$ выбрана та ветвь, на которой $\operatorname{Re}\sqrt{P^2(is) - 4Q(is)} \geq 0$).

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $P(s)$, $Q(s)$ *и* $\Lambda(s)$ *удовлетворяют условиям*

$$Q(i\sigma) \neq 0 \qquad \forall\, \sigma \in \boldsymbol{R}^n, \tag{3}$$

$$D^2(i\sigma) + 4k^2\pi^2 T^{-2} \neq 0 \qquad \forall\, \sigma \in \boldsymbol{R}^n, \quad k \in \boldsymbol{N}, \tag{4}$$

$$\sup\{\Lambda(\sigma)\colon\ \sigma \in \boldsymbol{R}^n\} < +\infty. \tag{5}$$

Пусть решение $u(x, t)$ *уравнения* (1) *в слое* $\Pi(T)$ *удовлетворяет следующим оценкам:*

$$|u(x, t)| \leq C_1 \exp\{C_2 \|x\|^\gamma\}, \tag{6}$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad \gamma \in (0, 1) \qquad \left(\|x\|^2 = \sum x_i^2\right);$$

$$\max_{|q| \leq m}\left(\left|D_x^q \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}\right| + \left|D_x^q \frac{\partial u(x, T)}{\partial t}\right|\right) \leq C_3(1 + \|x\|)^h, \tag{7}$$

$$C_3 > 0, \quad h \in \boldsymbol{R} \qquad \left(D_x^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}, \quad |q| = q_1 + \ldots + q_n\right).$$

Тогда если m *достаточно велико, то для функции* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$|u(x, t)| \leq C_4(1 + \|x\|)^h, \qquad (x, t) \in \Pi(T), \quad C_4 > 0. \tag{8}$$

1. Вспомогательные факты. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра $s \in \boldsymbol{C}^n$:

$$\frac{d^2 v(s, t)}{dt} + P(is)\frac{dv(s, t)}{dt} + Q(is)\,v(s, t) = 0, \tag{9}$$

$$v_1'(s, 0) = v_1(s), \qquad v_t'(s, T) = v_2(s). \tag{10}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_1(s, t) &= \frac{1}{2}\left\{D(is)\operatorname{ch}\frac{(T - t)D(is)}{2} - P(is)\operatorname{sh}\frac{(T - t)D(is)}{2}\right\} \times \\ &\quad \times \left\{Q(is)\operatorname{sh}\frac{TD(is)}{2}\right\}^{-1} \exp\left\{-\frac{tP(is)}{2}\right\}, \\ R_2(s, t) &= -\frac{1}{2}\left\{D(is)\operatorname{ch}\frac{tD(is)}{2} + P(is)\operatorname{sh}\frac{TD(is)}{2}\right\} \times \\ &\quad \times \left\{Q(is)\operatorname{sh}\frac{TD(is)}{2}\right\}^{-1} \exp\left\{\frac{(T - t)P(is)}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

если $D(is) \neq 0$;

$$\begin{aligned} R_1(s, t) &= \{TQ(is)\}^{-1}\left\{1 - \frac{(T - t)P(is)}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{tP(is)}{2}\right\}, \\ R_2(s, t) &= -\{TQ(is)\}^{-1}\left\{1 + \frac{tP(is)}{2}\right\}\exp\left\{\frac{(T - t)P(is)}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{12}$$

если $D(is) = 0$.

Формулы (11) и (12) имеют смысл при всех $s \in \boldsymbol{C}^n$, для которых $Q(is) \neq 0$, $D^2(is) + 4k^2\pi^2 T^{-2} \neq 0$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Нетрудно видеть, что решение $v(s, t)$ задачи (9), (10) записывается в виде

$$v(s, t) = R_1(s, t)v_1(s) + R_2(s, t)v_2(s). \tag{13}$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных функций $R_j(s, t)$, $j = 1, 2$, при $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$.

Обозначим $D^q R(s, t) = \max\limits_{j=1,2} |D_s^q R(s, t)|$ $(D_s^0 R(s, t) = R(s, t))$.

Лемма. *Пусть многочлены* $Q(s)$ *и* $D^2(s)$ *удовлетворяют условиям* (3) *и* (4), *а* $\Lambda(s)$ — *условию* (5).

Тогда при всех $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$, $t \in [0, T]$ *и для любого мультииндекса* q *справедлива оценка*

$$D^q R(\sigma, t) \leq M(q)(1 + \|\sigma\|)^{\mu + |q||l|}, \tag{14}$$

$$M(q) > 0, \quad \mu \in \boldsymbol{R}, \quad l \in \boldsymbol{R}.$$

Доказательство. Обозначим $\Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau \colon \|\tau\| \leq L(1 + \|\sigma\|^{\lambda}\}$, $L > 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Как показано в [9], если выполнены условия (3) и (4), то существует область $\Omega_{L,\lambda}$ такая, что при всех $s \in \Omega_{L,\lambda}$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$R(s, t) \leq C_1(1 + \|s\|)^{C_2} \exp\{c(t)\Lambda(s)\}, \tag{15}$$

$$C_1 > 0, \quad C_2 \in \boldsymbol{R}, \quad 0 \leq c(t) \leq T.$$

Оценим $D_\sigma^q R_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, использовав (5) и формулу Коши и выбрав в качестве контура интегрирования границу кругового полицилиндра с центром в точке $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$, лежащего в области $\Omega_{L,\lambda} \subset \boldsymbol{C}^n$:

$$D_\sigma^q R_j(\sigma, t) = \frac{q_1! \ldots q_n!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_\sigma} \frac{R_j(s, t)}{(s - \sigma)^{q_0}} \, ds,$$

$$q_0 = (q_1 + 1, \ldots, q_n + 1),$$

$$C_\sigma = \{s \in C^n \colon |s_i - \sigma_i| = R_\sigma = L'(1 + \|\sigma\|^l\}, \qquad l = \min(\lambda, 0\}.$$

Ясно, что при достаточно малом L' $C_\delta \subset \Omega_{L,\lambda}$. Используя (15), заключаем, что при любом мультииндексе q справедливы неравенства

$$|D_\sigma^q R_j(\sigma, t)| \leq \frac{q_1! \ldots q_n!}{(2\pi)^n} \hat{C}_1 (1 + \|\sigma\|)^{\mu} \int\limits_{C_\sigma} \frac{d\sigma}{\|s - \sigma\|^{q_0}} \leq$$

$$\leq M(q)(1 + \|\sigma\|)^{\mu + |q||l|}.$$

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Обозначим через $u(x, t)$ решение краевой задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям (6), (7) (величина m будет указана ниже).

Идея доказательства теоремы 1 заключается в следующем. Представим функцию $u_j(x)$, $j = 1, 2$ (см. краевые условия (2)), в виде ряда финитных функций

$$u_j(x) = \sum_k u_{jk}(x-k), \qquad k \in \mathbf{Z}^n,$$

где функции $u_{jk}(x-k)$ обращаются в нуль при $\|x\| \geq 1$. Решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $u_{kj}(x)$, обозначим $u_k(x,t)$. Покажем, что ряд

$$u(x,t) = \sum_k u_k(x,t), \qquad k \in \mathbf{Z}^n,$$

сходится и представляет искомое решение.

Обозначим через $e(x)$ функцию со следующими свойствами:

a) $e(x) \in C_0^\infty$ (финитная бесконечно дифференцируемая функция, $x \in \mathbf{R}$);

b) $e(x) \equiv 0$ при $|x| > \dfrac{3}{4}$;

c) $e(x) \equiv 1$ при $|x| < \dfrac{1}{4}$;

d) $e(1-x) \equiv 1 - e(x)$ при $\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}$.

При $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ положим $e(x) = \prod_{i=1}^n e(x_i)$. Функция $e(x)$ обращается в нуль вне шара радиуса $\dfrac{3}{4}\sqrt{n}$ и удовлетворяет условию

$$\sum_k e(x-k) \equiv 1, \qquad k \in \mathbf{Z}^n.$$

Тогда

$$u_j(x) = u_j \sum_k e(x-k) = \sum_k u_{jk}(x-k),$$

где $u_{jk}(x) = u_j(x+k)\, e(x)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $v_{jk}(\sigma) \equiv F\{u_{jk}(x)\}$ преобразование Фурье функций $u_{jk}(x)$.

Если $u_j(x) \in C^m(\mathbf{R}^n)$, то для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq m$, и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$|\sigma^\alpha D_\sigma^\beta v_{jk}(\sigma)| = \left| \int\limits_{\|x\| \leq 1} D_x^\alpha (x^\beta u_{jk}(x)) \exp\{-i(x,\sigma)\}\, dx \right|. \tag{16}$$

Оценим (16), использовав (7). Тогда

$$|\sigma^\alpha D_\sigma^\beta v_{jk}(\sigma)| = \int\limits_{\|x\| \leq 1} (|D_x^\alpha (x^\beta u_{1k}(x))| + |D_x^\alpha (x^\beta u_{2k}(x)|)\, dx \leq$$

$$\leq C_{\alpha\beta} \int\limits_{\|x\| \leq 1} (1 + \|x+k\|)^h\, dx \leq C'(1 + \|k\|)^h. \tag{17}$$

Здесь $k \in \mathbf{Z}^n$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$, постоянная $C' = C'(m, \beta, h)$ не зависит от σ и k.

Далее оценим $D_\sigma^\alpha v_k(\sigma, t)$. Для любого мультииндекса α в силу (13), (14) и (17) имеем

$$|D_\sigma^\alpha v_k(\sigma,t)| \le A(m,\alpha,h)(1+\|\sigma\|)^{\mu+|\alpha||l|-m}(1+\|k\|)^h$$

для $k\in \mathbf{Z}^n$, $(\sigma,t)\in \Pi(T)$, откуда для любых мультииндексов α и ρ

$$|D_\sigma^\alpha\{\sigma^\rho v_k(\sigma,t)\}| \le$$

$$\le B(m,\alpha,h,\rho)(1+\|\sigma\|)^{\mu+|\alpha||l|-m+|\rho|}(1+\|x\|)^h. \tag{18}$$

Тогда из (18) для $m > n+\mu+|\alpha||l|+|\rho|$ получаем

$$|x^\alpha D_x^\rho u_k(x,t)| \le C(1+\|k\|)^h, \tag{19}$$

где $(x,t)\in \Pi(T)$, $k\in \mathbf{Z}^n$, а C не зависит от k, x и t.

Из (19) имеем

$$|D_x^\rho u_k(x,t)| \le C'(1+\|k\|)^h(1+\|x\|)^{-\alpha}. \tag{20}$$

Зафиксируем теперь $\rho_1\in \mathbf{N}$ и $\rho_2\in \mathbf{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho_1 \ge \max\{\deg P(s), \deg Q(s)\}, \qquad \rho_2 > n+|h|,$$

и выберем m из условия $m > \rho_1+\mu+|l|\rho_2+n$. В силу легко проверяемого неравенства при любых $h\in \mathbf{R}$

$$(1+\|k\|)^h(1+\|x\|)^{-h} \le (1+\|k-h\|)^{|h|}$$

и оценки (20) при $|\rho|\le\rho_1$ и $|\alpha|=\rho_2$ получаем

$$|D_x^\rho u_k(x-k,t)| \le C''(1+\|k\|)^h(1+\|x-k\|)^{-\rho_2} \le$$

$$\le C''(1+\|x\|)^h(1+\|x-k\|)^{|h|-\rho_2},$$

откуда следует, что ряд

$$\tilde u(x,t) = \sum_k u_k(x-k,t), \qquad k\in \mathbf{Z}^n,$$

а также ряды, получаемые его почленным дифференцированием до порядка ρ_1, сходятся равномерно на каждом компакте в $\Pi(T)$. Поэтому функция $\tilde u(x,t)$, удовлетворяет уравнению (1) и оценке

$$|\tilde u(x,t)| \le C''(1+\|x\|)^h\sum_k(1+\|x-k\|)^{|h|-\rho_2} \le$$

$$\le C''(1+\|x\|)^h\sum_k(1+\|x-k\|)^{-2} \le C'''(1+\|x\|)^h. \tag{21}$$

И наконец, для любого $t_0\in[0,T]$

$$\left.\frac{\partial\tilde u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial t}\sum_k u_k(x-k,t)\right)\right|_{t=t_0} =$$

$$= \sum_k\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}e(x-k) = \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \qquad \frac{\partial \tilde{u}(x,T)}{\partial t} = u_2(x).$$

Следовательно, функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением краевой задачи (1), (2). Но условия (3) и (4) теоремы обеспечивают единственность решения краевой задачи в классе функций, удовлетворяющих оценке (6) (см. теорему 9 в [10]).

Таким образом, оценка (21) свидетельствует о справедливости утверждения теоремы.

3. Анализ условий теоремы 1. Покажем необходимость условий (3) – (5).

***Пример* 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \qquad (Q(s) \equiv 0).$$

Условие (5) теоремы выполнено.

Функция

$$u(x,t) = \exp\left\{\sqrt[3]{x^2+1}\right\} + \exp\left\{-\sqrt[3]{(x+t)^2+1}\right\}$$

является решением данного уравнения и удовлетворяет условиям (6) и (7) при любых $h \in \boldsymbol{R}$ и $m \in \boldsymbol{N}$. Однако условие (8) не выполняется ни при одном $h \in \in \boldsymbol{R}$.

***Пример* 2.** Пусть $i\sigma_0$, $\sigma_0 \in \boldsymbol{R}^n$, является корнем многочлена $Q(s)$. Тогда существует решение уравнения (1), не зависящее от t: $u(x,t) = e^{-i(\sigma_0, x)}$.

***Пример* 3.** Если при некоторых $\sigma_0 \in \boldsymbol{R}^n$ и $k_0 \in N$ $D^2(i\sigma_0) = -4k_0^2\pi^2T^{-2}$, то функция

$$u(x,t) =$$
$$= \left[\frac{P(-i\sigma_0)}{D(-i\sigma_0)} \operatorname{sh} \frac{D(-i\sigma_0)t}{2} + \operatorname{ch} \frac{D(-i\sigma_0)t}{2}\right] \exp\left\{-i(\sigma_0, x) - \frac{t}{2} P(-i\sigma_0)\right\}$$

удовлетворяет уравнению (1) и для нее выполнено условие (6): $|u(x,t)| \le C$ для $(x,t) \in \Pi(T)$. При этом $u_t'(x,0)$ и $u_t'(x,T)$ тождественно равны нулю, следовательно, условие (7) при любых $m \in \boldsymbol{N}$ и $h \in \boldsymbol{R}$ выполняется. Однако при $h < 0$ теорема не верна.

***Пример* 4.** В случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 4\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x^2} + 3\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + u(x,t) = 0$$

условия (3) и (4) выполнены. Однако условие (5) не выполняется: $\Lambda(\sigma) = = 2\sigma^2 - \sqrt{\sigma^4 - 1}$ и неограничено при $\sigma \in \boldsymbol{R}$.

Рассмотрим функцию $\mu(r) = \max\limits_{|\sigma|=r} \Lambda(\sigma)$. Функция $\mu(r)$ — алгебраическая и $\mu(r) = 3r^2(1 + o(1))$, где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$. Если нарушено условие $\sup\limits_{\boldsymbol{R}} \Lambda(\sigma) < \infty$, то существует последовательность $\{r_n\}$ такая, что $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\mu(r_n) = n$; для достаточно больших n

$$\frac{1}{2} n^{1/2} \le r_n \le 4n^{1/2}.$$

Пусть $|\sigma_n| = r_n$, $\Lambda(\sigma_n) = n$. Выберем подпоследовательность $n_k \to \infty$ так, что $2\sigma_{n_k}^2 - \sqrt{\sigma_{n_k}^4 - 1} = n_k$. Нетрудно показать, что

$$\left|\frac{\partial R_1(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t}\right| \geq C_1 e^{n_k t} n_k^{-C_2}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0.$$

Положим

$$u_{1k}(x) \equiv \varepsilon_{n_k} \exp\{i\sigma_{n_k} x\}, \quad \varepsilon_{n_k} = n_k^{-(\varepsilon + l/2)}, \quad \varepsilon > 0, \quad l > 0,$$

$$u_{2k}(x) \equiv 0, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Тогда если $q < l$, то $|D_x^q u_{1k}(x)| \leq \varepsilon_{n_k} |\sigma_{n_k}|^q < C_3 n_k^{-\varepsilon} \to 0$, $k \to \infty$; $|D_x^q u_{2k}(x)| \equiv 0$.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым функциям $u_{jk}(x)$, $j = 1, 2$, обозначим через $u_k(x, t)$. Легко проверить, что

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial R_1(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t} u_{1k}(x),$$

и поэтому при достаточно малом $\tau = T - t$

$$\left|\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t}\right| \geq C_4 e^{n_k t} n_k^{-C_5 - \varepsilon - l/2} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

В заключение покажем, что условие (6) теоремы нельзя ослабить, заменив его оценкой

$$|u(x, t)| \leq C \exp\{a\|x\|\}, \quad a > 0, \quad C > 0. \tag{22}$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + i u(x, t) \tag{23}$$

в слое $\boldsymbol{R} \times [0, 1]$. Условия (3)–(5) теоремы выполнены. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $k_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ из условия $\varepsilon > \left[2\left(\sqrt{k^4\pi^4 + 1} + k^2\pi^2\right)\right]^{-1/2}$. Нетрудно проверить, что функция

$$u_\varepsilon(x, t) = \exp\left\{ix\sqrt{k_\varepsilon^2\pi^2 + 1}\right\} \cos k_\varepsilon \pi t$$

удовлетворяет уравнению (23) и краевым условиям

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x, 0)}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon(x, T)}{\partial t} \equiv 0.$$

Для этого решения выполнены условия (22) и (7) с любыми $m \in \boldsymbol{N}$ и $h \in \boldsymbol{R}$. Однако результат теоремы неверен для $u_\varepsilon(x, t)$ при $h < 0$.

Возможность такого примера обусловлена тем, что нули многочлена $D^2(i\sigma) + 4k^2\pi^2 T^{-2}$ попадают в любую полоску, содержащую вещественную ось. В ситуации, когда это не так, теорему 1 можно усилить.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (7) *и многочлены* $Q(is)$ *и* $D^2(is) + 4k^2\pi^2 T^{-2}$ *не обращаются в нуль при* $\|\operatorname{Im} s\| \leq \tau_0$, $\tau_0 > 0$, $k \in \boldsymbol{N}$. *Тогда теорема* 1 *справедлива для решений задачи* (1), (2), *удовлетворяющих в слое* $\Pi(T)$ *оценке*

$$|u(x, t)| \leq C \exp\{\tau_0 \|x\|\}, \quad C > 0. \tag{24}$$

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 лишь на завершающем этапе, когда вместо теоремы 9 из [10] следует воспользоваться теоремой 6 из той же работы, гарантирующей единственность решений в классе функций, удовлетворяющих оценке (24).

1. *Ландис Е. М.* Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для решений эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. – 1970. – **193**, № 1. – С. 32–35.
2. *Ландис Е. М.* О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1974. – **31**. – С. 35–58.
3. *Ландис Е. М.* Об одной теореме Фрагмена–Линделефа для решений эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 5. – С. 213.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1974. – **95**, № 1. – С. 130–145.
5. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 4. – С. 59–70.
6. *Олейник О. А.* Теорема Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для эллиптических систем // Успехи мат. наук. – 1980. – **35**, № 4. – С. 171–172.
7. *Борок В. М.* Теорема типа Фрагмена–Линделефа для решений линейного дифференциального уравнения в слое // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 1. – С. 25–32.
8. *Чаус Н. Н.* Вариант теоремы Фрагмена–Линделефа для решений системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **13**, № 10. – С. 1897–1899.
9. *Антыпко И. И., Борок В. М.* Краевая задача Неймана в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – **35**. – С. 71–78.
10. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений // Мат. сб. – 1969. – **49**, № 2. – С. 293–304.

Получено 19.03.96