УДК 517. 5

І. Г. Даниленко (Нац. пед. ун-т, Київ)

ДО ПРОБЛЕМИ СЕНДОВА ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНУ СТАЛУ УІТНІ

For a function f continuous on $[0, 1]$ and satisfying the equalities

$$f(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) = 0,$$

we prove that

$$|f(x)| \le 2\omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right), \quad x \in [0, 1],$$

where $\omega_4(t, f)$ is the fourth module of smoothness of the function f.

Для неперервної на $[0, 1]$ функції f, що задовольняє рівності

$$f(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) = 0,$$

доведено, що

$$|f(x)| \le 2\omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right), \quad x \in [0, 1],$$

де $\omega_4(t, f)$ — четвертий модуль гладкості функції f.

Для функції f, неперервної на $[0, 1]$, позначимо через

$$\Delta_h^4(f, x) := f(x) - 4f(x+h) + 6f(x+2h) - 4f(x+3h) + f(x+4h)$$

четверту різницю в точці $x \in [0, 1]$ з кроком h, де $(x+4h) \in [0, 1]$; через

$$\omega_4(t, f) = \sup_{0 \le h \le t} \sup_{x \in [0, 1-4h]} \left|\Delta_h^4(f, x)\right|, \quad 0 \le t \le \frac{1}{4},$$

четвертий модуль гладкості функції f; через

$$L_k(x) := L_k\left(x; f; 0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\right)$$

многочлен Лагранжа степеня k, що інтерполює функцію f в точках 0, $1/k, \ldots, (k-1)/k, 1$ (многочлени L_k використовуватимуться далі у випадках $k = 3$ та $k = 4$). Нехай

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt,$$

$$G(x) := F(x) - L_4\left(x; F; 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right),$$

$$g(x) := G'(x) = f(x) - L_4'\left(x; F; 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right).$$

Нещодавно Ю. В. Крякін [1] довів нерівність

$$|g(x)| \le \omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

яка, зокрема, дає позитивну відповідь на гіпотезу Сендова [2] про сталу Уітні у випадку четвертого модуля гладкості. Застосовуючи нерівність (1), а також відому тотожність [3]

$$G(x) = P_4(x)\int_0^1 \Delta_{t/4}^4(f, x(1-t))\,dt, \tag{2}$$

де

$$P_4(x) := \frac{4^3}{3!}x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1),$$

доводимо наступну теорему.

Теорема 1. *Виконується нерівність*

$$\left|f(x) - L_3\left(x; F; 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right| \le 2\omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right), \quad x \in [0, 1]. \tag{3}$$

Нерівність (3) дає позитивну відповідь на гіпотезу Сендова [2] про інтерполяційну сталу Уітні (бібліографію див. в [1, 2, 4]) у випадку четвертого модуля гладкості.

Спочатку доведемо лему 1.

Лема 1. *Якщо*

$$\omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right) = 1,$$

то

$$\left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{1}{3}, \quad \left|g\left(\frac{2}{3}\right)\right| < \frac{1}{3}. \tag{4}$$

Доведення. Очевидно, $\omega_4(t, f) = \omega_4(t, g)$. Доведемо першу з нерівностей (4) (друга доводиться аналогічно). Враховуючи, що $G(0) = 0$ та $G(1/2) = 0$, маємо

$$\int_0^1 \Delta_{t/6}^4\left(g, \frac{1}{3}(1-t)\right)dt = 24G\left(\frac{1}{6}\right) + 6g\left(\frac{1}{3}\right) + 3G\left(\frac{2}{3}\right).$$

Звідси

$$3\left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right| \le \frac{1}{2} + 12\left|G\left(\frac{1}{6}\right)\right| + \frac{3}{2}\left|G\left(\frac{2}{3}\right)\right|.$$

Тому з тотожності (2) випливає

$$3\left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right| \le \frac{1}{2} + 12\left|P_4\left(\frac{1}{6}\right)\right| + \frac{3}{2}\left|P_4\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{2} + \frac{25}{81} < 1,$$

що і треба було довести.

***Доведення теореми* 1.** Не втрачаючи загальності, вважатимемо $\omega_4\left(\frac{1}{4}, f\right) = 1$. Оскільки

$$f(x) - L_3\left(x; f; 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = g(x) - L_3\left(x; g; 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) =$$

$$= g(x) + \frac{9}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)g(0) - \frac{9}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)3g\left(\frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{9}{2}x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)3g\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{9}{2}x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)g(1),$$

то, враховуючи, що внаслідок (1) $|g(x)| \le 1$, $x \in [0, 1]$, і зокрема $|g(0)| \le 1$, $|g(1)| \le 1$, та застосовуючи лему 1, знаходимо

$$\left| f(x) - L_3\left(x; f; 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right| \le$$

$$\le 1 + \frac{9}{2}\left(\left|\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right| + \left|x\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)\right| + \left|x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right|\right) =: A(x).$$

Легко перевірити, що $A(x) \le 2$, $x \in [0, 1]$ (ця нерівність є частинним випадком леми Сендова [4]). Теорему доведено.

Дана стаття є основним результатом дипломної роботи автора, виконаної під керівництвом професора І. О. Шевчука, якому автор висловлює вдячність за постановку задачі та допомогу при її розв'язанні.

1. *Крякин Ю. В.* О локальном приближении функций полиномами и квазиполиномами // Изв. АН РАН. Сер. мат. – 1997. – № 2.
2. *Sendov Bl.* On the constants of H. Whitney // C. R. Acad. Bul. Sci. – 1982. – **35,** № 4. – P. 431 – 434.
3. *Жук В. В., Натансон Г. И.* К теории кубических периодических сплайнов по равноотстоящим узлам // Вестн. Ленингр. ун-та. Мат., астрон. – 1984. – № 1. – С. 5–11.
4. *Sendov Bl.* On the theorem and constants of Whitney // Constr. Approxim. – 1987. – **3.** – P. 1–11.

Одержано 22.05.97